

① 166-169

第19卷 第2期
1998年 6月固体力学学报
ACTA MECHANICA SOLIDA SINICAVol. 19 No. 2
June 1998

短裂纹随机行为与金属疲劳损伤的理论分析

乔宇 洪友士

(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室, 北京, 100080)

TG 113.255
0346j

摘要 近似求解了微裂纹演化系统随机偏微分方程. 结果表明: 当裂纹扩展速率的随机偏差正比于其平均速率时, 材料损伤不随裂纹随机行为而变化. 同时, 还讨论了金属疲劳损伤随机波动程度的变化趋势.

关键词 短裂纹, 裂纹数密度, 裂纹扩展速率, 随机行为, 疲劳损伤

金属

1 引言

实验表明, 金属材料在疲劳损伤初期处于短裂纹阶段, 此时裂纹尺度与材料细观组织单元尺度相近^[1]. 在这种情况下, 材料的损伤行为不是由个别裂纹控制, 而是大量短裂纹共同作用的结果. 利用文献[2]提出的相空间内裂纹数密度守恒的理论来描述疲劳损伤过程, 裂纹数密度演化可以由数密度守恒方程描述, 经无量纲化^[3]可得:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(c, t) + \frac{\partial}{\partial c} [A(c)n(c, t)] = N_g n_N(c) \quad (1)$$

式中 c, t 分别表示裂纹长度与时间; $A(c)$ 表示裂纹扩展速率; $n(c, t)$ 表示裂纹数密度; $n_N(c)$ 表示单位时间内裂纹成核及裂纹之间相互作用引起的裂纹数密度变化, 本文中仍称为裂纹成核率. 以上各量已无量纲化, 无量纲化系数 $N_g = \frac{n_0^* d}{n^* A^*}$, 其中 n_0^*, n^*, A^*, d 分别为特征成核率、裂纹特征数密度、特征扩展速率和特征尺度.

考虑初始裂纹数密度 $n(c, 0) = 0$ 的情况, 并令裂纹起始扩展长度阈值为 0, 由文献[2]可以得到无量纲裂纹数密度守恒方程[式(1)]的理论解:

$$n(c, t) = \frac{1}{A(c)} \int_{\eta(c, t)}^c N_g n_N(c') dc' \quad (2)$$

其中, $\eta(c, t)$ 的含义为: 设想 $t=0$ 时刻存在一条尺度为 $\eta(c, t)$ 的裂纹, 此裂纹按速率 $A(c)$ 扩展, 则至 t 时刻裂纹长度增加至 c . 图 1 是在设置有关参数后得到的不同时刻裂纹数密度与裂纹长度的关系. 从图 1 看出, 裂纹数密度发展过程中存在着“饱和”现象, 即随着疲劳进程的进行, 裂纹数密度分布由小尺度向大尺度逐渐收敛于一条稳态曲线 $n_0(c)$, 在图 1 中, 由虚线表示.

以上涉及到的 $A(c), n_N(c)$ 均指平均量, 所得到的结果也具有平均上的意义. 而事实上各个试样的行为存在着随机偏差, 其分散程度往往是一个重要的材料性能指标. 本文将讨论裂纹数密度分布, 尤其是接近 c_0 尺度区域裂纹数密度分布的随机分散程度与裂纹扩展速率、裂纹成核率的随机偏差之间的关系, 从而讨论金属材料整体行为(例如材料疲劳寿命)随机

· 本文得到国家自然科学基金、国家杰出青年科学基金和中国科学院资助。
1996-10-30 收到第 1 稿, 1997-05-16 收到修改稿。

偏差的内在控制因素,并探讨金属材料损伤行为的随机特征.这里 c_r 是短裂纹过渡为长裂纹的临界尺度,当材料中出现尺度大于 c_r 的裂纹时,就意味着疲劳损伤发展到了长裂纹阶段.

2 随机偏微分方程及其求解

为了讨论材料整体的随机行为,需要研究裂纹数密度分布,尤其是大尺度区域裂纹数密度分布和裂纹随机行为之间的关系.一般认为裂纹随机行为由裂纹平均扩展速率和裂纹成核率的随机偏差来描述,设:

$$\begin{aligned} A(c) &= A_0(c) + L(c)W(t) \\ n_N(c) &= n_{N0}(c) + H(c)W(t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $A_0(c)$ 、 $n_{N0}(c)$ 分别为裂纹扩展速率和裂纹成核率中的确定性部分,亦即数学期望值, $W(t)$ 为高斯白噪声, $L(c)$ 、 $H(c)$ 表示随机偏差与裂纹尺度的关系.将式(3)代入裂纹数密度守恒方程[式(1)],并沿 c 离散化,可得:

$$dn_j(t) = \left[-\frac{A_j}{\Delta c} n_j(t) + \frac{A_{j-1}}{\Delta c} n_{j-1}(t) + n_{Nj} \right] dt + \left[H_j - \frac{L_j}{\Delta c} n_j(t) + \frac{L_{j-1}}{\Delta c} n_{j-1}(t) \right] dB \quad (4)$$

其中 $j=1,2,3,\dots,(\cdot)_j = \cdot(c_j)$, $c_j = \Delta c \cdot j$, Δc 为一小的裂纹尺度步长, B 为维拿(Wiener)过程.式(4)具有 Ito 线性微分方程的形式^[4].当随机偏差与均值相比是小量时,式(4)右边 $n_j(t)$ 、 $n_{j-1}(t)$ 中的随机部分可以忽略.将初始时刻取为零时刻,初始条件设为 $n_j(0)=0$,记 $n_j(t)$ 中的随机部分为 $h_j(t)$,则方程(4)有解^[4]:

$$h_j(t) = \left[\exp\left(-\frac{A_j}{\Delta c} t\right) \right] \cdot \int_0^t \left[\exp\left(\frac{A_j}{\Delta c} s\right) \right] \left[H_j - \frac{L_j}{\Delta c} n_j(s) + \frac{L_{j-1}}{\Delta c} n_{j-1}(s) \right] dB \quad (5)$$

式中积分指均方积分, \hat{n} 具有式(2)的形式.

3 讨论

运用维拿积分的概念^[4],由式(5)可以求出裂纹数密度随机部分 $h_j(t)$ 的期望值 $E\{h_j(t)\}$ 和方差 $D\{h_j(t)\}$:

$$E\{h_j(t)\} = 0 \quad (6)$$

$$D\{h_j(t)\} = \int_0^t \left\{ \left[\exp\left(-\frac{A_j}{\Delta c}(t-s)\right) \right] \left[H_j - \frac{\partial(L\hat{n})}{\partial c} \Big|_{c=c_j} \right] \right\}^2 ds \quad (7)$$

参考 Miller^[5]根据实验观察提出的裂纹扩展的两阶段模型,考虑 c_r 附近尺度区域内的裂纹扩展,设:

$$A_0(c) = c^\nu \quad \text{及} \quad L(c) = \alpha c^\beta \quad (8)$$

其中 ν 、 α 、 β 为材料常数.根据一些已发表的关于裂纹扩展速率的数据^[6~8],可以对 α 的量级进行估计:对于不同的材料 α 分布在 0.3~7 之间.由式(8)和式(2)可以得到:

$$\frac{\partial(L\hat{n})}{\partial c} = \alpha(\beta - \nu)c^{\beta-\nu-1} \int_{\eta(c,s)}^{\infty} n_{N0}(c') dc' + \alpha c^{\beta-\nu} n_{N0}(c) \left[1 - \frac{\partial\eta(c,s)}{\partial c} \right] \quad (9)$$

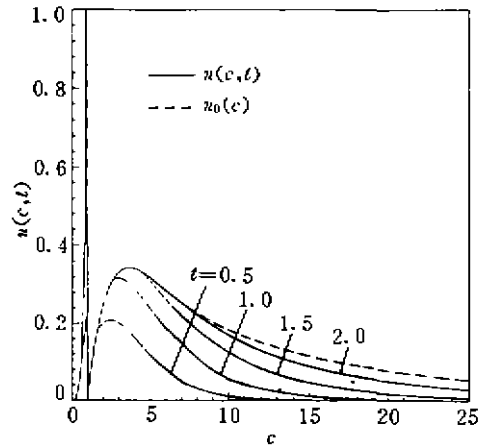


图 1 不同时刻裂纹数密度沿裂纹尺度的分布

短裂纹向长裂纹转变的临界时间(即出现尺度大于 c_c 的裂纹的时间)主要与 c_c 附近尺度区域内的裂纹数密度演化有关^[9]. 在这一尺度区域内, 裂纹成核率 $n_N(c) \rightarrow 0$, 故可以认为裂纹成核率的随机偏差 $h_i \rightarrow 0$. 将式(9)代入式(7), 令 $\eta(c, t) \rightarrow 0$, 并记 $\int_0^c n_{N0}(c') dc' \equiv \kappa$ (κ 为单位时间内的裂纹成核总数), 以 h_i^* 表示相应的随机偏差, 可得:

$$D\{h_i^*\} |_{c>c_1} \rightarrow \frac{\Delta c}{2A_3} [\alpha \kappa (\beta - \nu)]^2 c_i^{2\beta - 3\nu/2 - 1} \quad (10)$$

其中 c_1 是区分接近 c_c 尺度区域和小尺度区域的临界尺度. 式(10)的推导中利用了裂纹数密度接近稳态时 $\exp\left\{-\frac{2A_3}{\Delta c} t\right\} \rightarrow 0$. 从式中可以看到, 裂纹扩展速率的均值越大, 接近 c_c 尺度区域内裂纹数密度随机偏差越小; 裂纹扩展速率随机偏差越大, 裂纹数密度随机偏差则越大.

当疲劳损伤演化到短裂纹阶段的后期, 损伤行为的随机波动程度将由最大尺度裂纹的 $D\{h_i^*\}$ 来衡量, 其发展趋势可以通过式(10)分析, 图2给出了 β, ν 不同取值时式(10)解的几种典型情况: 随着 c_i 的增大, 一方面裂纹扩展速率均值增大导致 $D\{h_i^*\}$ 趋于下降; 另一方面裂纹扩展速率的随机偏差增大导致 $D\{h_i^*\}$ 趋于上升, $\beta = \frac{3}{2}\nu + 1$ 时达到平衡. 若假设裂纹扩展速率的随机偏差正比于自身, 即 $\beta = \nu$. 从式(10)可见此时大尺度区域裂纹数密度分布随机偏差的方差为零, 这意味着材料损伤的随机行为与裂纹随机行为无关.

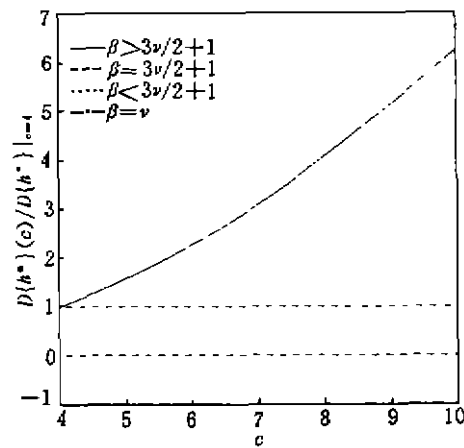


图2 不同参数下稳态裂纹数密度随机分布方差与裂纹尺度的关系

4 结论

本文通过近似求解理想微裂纹演化系统随机微分方程, 讨论了裂纹数密度分布随裂纹随机行为而产生的随机偏差. 得到以下结论:

(1) 裂纹扩展速率的均值越高, 随机偏差越小, 则大尺度区域裂纹数密度分布受裂纹随机行为影响的程度越小; 在此情况下, 裂纹成核率的随机行为对材料损伤的影响可以忽略.

(2) 若 $\beta > \frac{3}{2}\nu + 1$, 随着材料趋于破坏, 材料损伤行为的随机波动程度将越来越大.

(3) 当裂纹扩展速率的随机偏差正比于其均值时, 大尺度区域裂纹数密度分布与裂纹扩展速率的随机偏差无关.

参 考 文 献

- 1 洪友士, 方枫. 疲劳短裂纹萌生及发展的细观过程和理论. 力学进展, 1993, 3(4): 468~485
- 2 柯孚久, 白以龙, 夏蒙莽. 理想微裂纹演化系统的特征. 中国科学(A辑), 1990, 621~631

- 3 Fang B, Hong Y S, Bai Y L. Experimental and theoretical study on numerical density evolution of short fatigue cracks. *Acta Mechanica Sinica(English Edition)*, 1995, 11:144~152
- 4 Oksendal Bernt. *Stochastic differential equations*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985
- 5 Miller K J. Materials science perspective of metal fatigue resistance. *Materials Sci & Tech*, 1993, 9:453~462
- 6 Price C E. The progression of bending fatigue in Nickel. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 1988, 11:483~491
- 7 Price C E, Henderson G W. The progression of bending fatigue in Monel K500. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 1988, 11:492~500
- 8 Price C E, Houghton N R. The progression of bending fatigue in Inconel 625. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 1988, 11:501~508
- 9 洪友士, 乔宇. 疲劳短裂纹群体损伤演化. 走向 21 世纪的中国力学. 中国科协第 9 次“青年科学家论坛”报告文集. 北京:清华大学出版社, 1996, 40~49

A THEORETICAL ANALYSIS ON STOCHASTIC BEHAVIOUR OF SHORT CRACKS AND FATIGUE DAMAGE OF METALS

Qiao Yu Hong Youshi

*(Lab for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)*

Abstract In this paper, the closed form of solution to the stochastic differential equation for fatigue crack evolution systems is derived, and the relationship between metal fatigue damage and crack stochastic behaviour is investigated. It is found that the damage extent of metals is independent of crack stochastic behaviour if the stochastic deviation of crack growth rate is directly proportional to its mean value. The evolution of stochastic deviation of metal fatigue damage in the stage close to final fracture is also discussed.

Key words short cracks, crack numerical density, stochastic behaviour, fatigue damage, crack growth rate