

# 偶应力问题的杂交/混合元分析

肖其林, 凌中, 吴永礼\*

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

**摘要:** 将弹性力学中的 Hellinger-Reissner 变分原理推广到偶应力理论中, 并以罚函数的形式引入其约束条件, 提出了一种有效的杂交/混合单元。文中分别分析了带中心小孔平板在轴向均匀加载时的应力集中情况, 以及含中间裂纹的无限平板单轴拉伸时的位移场和应力场。算例表明, 该单元计算效率高, 精度好, 即使在材料本征长度很小时, 仍然能够得到相当理想的结果。

**关键词:** 偶应力理论; 杂交/混合元; 罚函数; 稳定性条件

**中图分类号:** O 242 21 **文献标识码:** A

## 1 引言

偶应力理论是微极理论的一个特例, 最早由 Cosserat 两兄弟<sup>[1]</sup>于 1909 年提出, 因此又被称为 Cosserat 理论。随后 Toupin<sup>[2]</sup>, Mindlin<sup>[3,4]</sup>, Eringen<sup>[5,6]</sup>等人对该理论作了进一步的发展和完善。

微极理论中, 体内每一点上除了位移自由度外, 还存在独立的转动自由度, 这样连续体内的转动将由宏观转动  $\omega$  和微转动  $\phi$  组成。除了经典连续统力学中的应力分量外, 偶应力分量  $\mu_i$  也出现在该理论中(如图 1), 因此当确保微元体转动平衡时, 应力张量是可以不对称的。作为微极理论的一个特例, 偶应力理论要求微转动  $\phi$  和宏观转动  $\omega$  相等。

连续统力学基于所有物体都具有连续分布的密度这一基本假设, 并没有考虑到偶应力的影响。大多数情况下, 该假定在实验中都得到了验证。但是, 越来越多的事实表明经典连续统力学有着明显的局限性。例如, 大应变梯度范围的疲劳行为无法用经典连续统力学解释<sup>[7]</sup>; 又如, 按照传统的塑性理论, 同一材料大试件与小试件的拉伸或扭转应力-应变曲线是相同的, 而 Fleck 等<sup>[8]</sup>在细铜丝的扭转试验中却观察到, 当细铜丝的直径从  $170\mu\text{m}$  减小到  $12\mu\text{m}$  时, 无量纲的扭转硬化增加了 2 倍。现在知道, 要不要考虑偶应力的影响很大程度上依赖于一个新的材料常数  $l$ , 它具有长度量纲, 被称之为材料本征长度(对于理想连续体,  $l=0$ )。当所讨论物

理现象的特征尺度(如外载荷具有光滑分布区域的尺寸、波长、裂纹长度等)可以与材料本征长度相比较时, 偶应力的影响必须考虑在内。

相比经典弹性体, 偶应力弹性体具有更多的材料常数, 迄今, 只有少数的平面问题有了解析解<sup>[4,9,10]</sup>。经典连续统力学中提出的各种变分原理以及有限元方法在偶应力问题中的应用也不多。在 Hermann<sup>[11]</sup>和 Wood<sup>[12]</sup>等几篇探讨偶应力问题有限元方法的论文中, 所采用单元或者数值性能并不理想, 或者计算效率较低。

偶应力问题的有限元分析, 其复杂性首先在于单元位移试解更高的连续性要求, 应力不仅和应变相关, 还和应变梯度相关, 所以要求位移试解  $u \in C^1$ , 类似的问题可以从大量的板壳理论的有限元分析<sup>[13,14]</sup>中得到启发。另外, 不同于经典弹性理论以及微极理论, 偶应力理论的应力分量在本构关系中并不都是确定的, 因此考虑平衡方程时, 还应该注意到不确定的应力分量。

本文首先介绍了平面偶应力理论的基本概念, 然后基于 Hellinger-Reissner 变分原理<sup>[15]</sup>提出了一种新的单元模式, 通过计算轴向均匀加载时, 带中心小孔无限平板的应力集中情况, 对单元作了验证, 并和已有的单元进行了比较。最后分析了理想裂纹尖端的应力分布, 以及裂纹侧面的位移场。

## 2 偶应力理论

本节给出了平面问题下, 偶应力理论的基本方程。在必要的地方, 还提到了微极理论, 从而对偶应力理论的本构关系中切应力分量的不确定性有更为直观的认识。

收稿日期: 2001-12-26; 修改稿收到日期: 2002-06-17.

基金项目: 国家自然科学基金(50172053)资助项目.

作者简介: 肖其林(1976-), 男, 硕士;

吴永礼\*(1940-), 男, 研究员.

## 2.1 应力和平衡方程

图1列出了平面微元体的各个应力分量,可以看出它在经典弹性理论的基础上增加了偶应力 $\mu_x$ 和 $\mu_y$ 。偶应力理论与微极弹性理论的平衡方程是一致的,不计体力和体力偶时:

$$\sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} = 0 \quad (1a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0 \quad (1b)$$

$$\mu_{x,x} + \mu_{y,y} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad (1c)$$

显然,由于偶应力的出现,式(1c)中 $\tau_{xy}$ 和 $\tau_{yx}$ 不再恒等。习惯地将切应力写成对称分量 $\tau_s$ 和反对称分量 $\tau_a$ 两部分:

$$\tau_s = (\tau_{xy} + \tau_{yx})/2, \quad \tau_a = (\tau_{xy} - \tau_{yx})/2 \quad (2)$$

在经典弹性理论中, $\tau_s = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_a = 0$

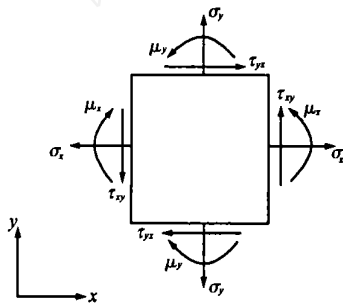


图1 笛卡儿坐标系中的正应力、切应力以及偶应力  
Fig.1 Force stresses and couple stress in cartesian coordinate system

## 2.2 应变位移关系

微极弹性理论以及偶应力理论的应变位移关系中,正应变和切应变都可以写成:

$$\epsilon_x = u_{,x}, \quad \epsilon_y = v_{,y}, \quad \gamma_{xy} = v_{,x} + u_{,y} \quad (3)$$

由于微转动自由度 $\phi$ 的出现,新定义了两个弯曲应变分量:

$$\kappa_x = \phi_{,x}, \quad \kappa_y = \phi_{,y} \quad (4)$$

在偶应力理论中,假定微转动 $\phi$ 和宏观转动 $\omega$ 相等:

$$\phi = \omega = (v_{,x} - u_{,y})/2 \quad (5)$$

将此关系代入式(4)中,得到弯曲应变分量:

$$\kappa_x = \omega_{,x} = \left( \frac{\partial v}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x \partial y} \right) / 2 \quad (6a)$$

$$\kappa_y = \omega_{,y} = \left( \frac{\partial v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y^2} \right) / 2 \quad (6b)$$

## 2.3 本构关系

平面偶应力弹性理论的本构方程可以用柔度矩阵 $C$ 和 $F$ 表示为

$$\epsilon = C\sigma, \quad \kappa = F\mu \quad (7a)$$

其中

$$\epsilon = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]^T, \quad \kappa = [\kappa_x, \kappa_y]^T \quad (7b)$$

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_s]^T, \quad \mu = [\mu_x, \mu_y]^T \quad (7c)$$

对于各向同性材料,平面应变状态下,柔度矩阵为

$$C = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{4B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 $E$ 为杨氏模量, $\nu$ 为泊松比,而 $B$ 是一个新的弹性常数,被称之为弯曲模量,它和材料本征长度 $l$ 的关系为

$$B = l^2 G = l^2 \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

在本构方程(7)中,切应力的反对称部分 $\tau_a$ 并没有出现,原因可以作如下解释。Eringen<sup>[6]</sup>定义的微极应变张量:

$$e_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{ijk} \phi \quad (10)$$

令 $U_\tau$ 表示与切应力 $\tau_{xy}$ 和 $\tau_{yx}$ 相关的应变能密度,则有

$$U_\tau = \tau_{xy} e_{xy} / 2 + \tau_{yx} e_{yx} / 2 \quad (11)$$

由式(2),式(3),式(5),可以得到

$$U_\tau = \tau_s \gamma_{xy} / 2 + \tau_a (\omega - \phi) \quad (12)$$

因为偶应力理论 $\omega = \phi = 0$ , $\tau_a$ 将不会出现在应变能密度 $U_\tau$ 中,因此也消失在本构关系里。从这个意义上说, $\tau_a$ 是不确定的。

## 3 有限元方法

偶应力问题的 $C^1$ 阶连续性要求和 $\tau_a$ 的不确定性使得我们必须寻求较为特殊的有限元方法(相对于通常使用的位移元来说)。本节将弹性力学中的Hellinger-Reissner变分原理推广到偶应力理论中,并从二变量的杂交/混合元出发推导有限元方程。因为应力试解无须预先满足平衡方程,因此可

以在局部 / 自然坐标中定义, 同时也避免了讨论  $\tau$  的不确定性. 偶应力理论的 H-R 泛函为

$$H_R = \iint_{\Omega} \left[ -\frac{1}{2} (\sigma^T C \sigma + \mu^T F \mu) + (\sigma^T \epsilon + \mu^T \kappa) \right] d\Omega - \int_{S_\sigma} (u^T t + \bar{\Phi}) ds \quad (13a)$$

在  $S_u$  上:  $u = \bar{u} = 0$ , 在  $S_\phi$  上:  $\phi = \bar{\phi} = 0$  (13b)

偶应力理论中  $\omega = \bar{\phi} = 0$ , 利用罚函数将该约束引入上式, 得到修正的 H-R 泛函:

$$m_{HR} = H_R + \frac{\alpha}{2} \iint_{\Omega} (\omega - \phi)^T (\omega - \phi) d\Omega \quad (\alpha \text{ 为一大数}) \quad (14)$$

令

$$U = [u, \phi^T, \epsilon = L_1 U, \kappa = L_2 U, \omega - \phi = L_\alpha U] \quad (15)$$

单元的离散化遵循一般的步骤<sup>[16]</sup>, 位移试解和微转动自由度试解均采用八结点等参形函数  $N_i, (i = 1, 2, \dots, 8)$ :

$$U = N q = [N_1 I_3, N_2 I_3, \dots, N_8 I_3] q \quad (16)$$

应力试解和偶应力试解的离散化在局部 / 自然坐标中取完全一次式:

$$\sigma = \psi_1 \beta_1, \quad \mu = \psi_2 \beta_2 \quad (17)$$

则有

$$B_1 = L_1 N, \quad B_2 = L_2 N, \quad B_\alpha = L_\alpha N \quad (18)$$

泛函式(14)可化为如下形式:

$$m_{HR} = -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}^T H \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}^T G q + \frac{\alpha}{2} q^T K_\alpha q - q^T Q \quad (19a)$$

其中

$$H = \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_1^T C \psi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \psi_2^T F \psi_2 \end{bmatrix} d\Omega, \quad G = \iint_{\Omega} \begin{Bmatrix} \psi_{1B1}^T \\ \psi_{2B2}^T \end{Bmatrix} d\Omega \quad (19b)$$

$$K_\alpha = \iint_{\Omega} B_\alpha^T B_\alpha d\Omega, \quad Q = \int_{S_\sigma} N^T \begin{Bmatrix} \bar{t} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} ds \quad (19c)$$

上述泛函分别对  $\beta = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$  和  $q$  作一次变分, 得到

$$G q - H \beta = \mathbf{0} \quad (20a)$$

$$G^T \beta + \alpha K_\alpha q - Q = \mathbf{0} \quad (20b)$$

最后的单元刚度矩阵为

$$K = G^T H^{-1} G + \alpha K_\alpha \quad (21)$$

显然, 这是一个对称阵.

将罚函数用于有限元法有一定的困难<sup>[16]</sup>, 首先在于矩阵  $K_\alpha$  上的强加奇异性, 同时又要求  $K$  是非奇异的. 本文通过降阶积分来引入奇异性, 对  $K_\alpha$  采用四点高斯积分即可, 而对  $K$  的其它项可以采用九点高斯积分. 其次是  $\alpha$  的选择, 理论上  $\alpha$  越大, 约束条件满足得越好, 但实际上,  $\alpha$  大到一定程度时, 方程就开始表现出病态, 这里取  $\alpha = 10^4 - 10^5$ .

用 H-R 原理来推导的杂交应力元, 位移(微转动)试解只要求  $C^0$  阶连续, 本单元采用的 Serendipity 函数族就可以满足. 因为在假定的广义力和广义位移试解组中可能包含相互不做功的成分, 导致出现零能模式(ZEM). 对此国内外学者们开展了一系列研究工作, 如 Babuska 和 Brezzi 把 H-R 变分原理化为数学上的鞍点问题, 由此提出的收敛准则, 被称之为 B-B 条件. 这种极值形式的不等式约束不便直接应用于有限元的稳定性分析, 本文根据吴长春<sup>[17]</sup> 从力学观点出发分析 ZEM 问题的方法对本单元的可靠性进行了验证.

零能模式分成两类: 零能位移模式 ZEM ( $u$ ) 和零能应力模式 ZEM ( $\sigma$ ). 基于 H-R 原理的杂交元不会产生 ZEM ( $\sigma$ ). 记扣除单元刚体运动后, 余下的单元位移(微转动)参数为  $q^*$ , 吴长春得到了单元无 ZEM ( $u$ ) 的充要条件, 称之为杂交 / 混合元的保秩条件.

$$\beta^T G \cdot q^* = 0, \quad \forall \beta \quad \{\beta\} \Rightarrow q^* = 0 \quad (22)$$

即  $G \cdot q^* = 0 \Rightarrow q^* = 0 \quad (23)$

它的一个必要条件, 要求参数匹配满足:

$$\dim(\beta) = \dim(q^*) \quad (24)$$

本单元中  $\dim(\beta) = 15, \dim(q) = 24$ , 扣除刚体位移要求的 3 个约束和罚函数满足的 8 个约束 ( $\phi = \omega, i = 1, 2, \dots, 8$ ),  $\dim(q^*) = 13 < \dim(\beta)$ , 因此单元满足参数匹配条件.

更严格的保秩条件, 可以通过对单元的特征值进行检验而得到保证。设

$$U^* = [u \quad v \quad \phi]^T = N \cdot q^* \quad (25)$$

其中  $q^*$  为引入刚体位移约束和罚约束后的结点位移和微转动参数。

$$q^* = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6 \quad u_7]^T \quad (26)$$

$$G^* = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{matrix} \psi_1^T(L_i N^*) \\ \psi_2^T(L_i N^*) \end{matrix} \right\} dx dy \quad (27)$$

计算出  $(G^{T^*} G^*)$  的特征值, 它们均大于 0, 即矩阵是正定的, 保秩条件满足, 所以本单元是稳定的。

下面考虑单元的典型集合体——小片的稳定性。如前所述, 基于 H-R 原理的单元只可能出现 ZEM ( $u$ )。这时单元的集合将同时产生两个方面的效果: 一方面, 相邻单元公共结点处的位移(微转动)连续约束有可能抑制存在于单个元中的某些 ZEM ( $u$ ); 另一方面, 相邻单元公共结点处的应力(偶应力)连续(即平衡约束)则可能放松单元位移的约束, 从而引发某些新的 ZEM ( $u$ ) 出现。但基于 H-R 原理的杂交元, 由于应力(偶应力)试解与单元是一一对应的, 不存在相邻单元间的平衡约束, 单元的集合将不会引发新的 ZEM ( $u$ ) 出现, 因此本单元分片的数值稳定性是可以保证的。

### 4 算例

Hermann<sup>[11]</sup> 和 Wood<sup>[12]</sup> 分别用基于势能原理和余能原理的混合有限元方法分析了偶应力对带中心小孔无限平板轴向均匀加载下的应力集中的影响。本节中, 采用上节基于 Hellinger-Reissner 原理得到的单元模型分析该算例, 结果相当理想, 程序实现也非常容易。随后还用该单元第一次数值分析了偶应力理论下含理想裂纹的单轴加载平板, 在裂纹尖端附近的应力场和裂纹侧面的位移场。

#### 算例 1 带中心小孔无限平板的轴向加载

算例 1 考虑的平板长宽为  $0.32 \times 0.32$ , 小孔半径 0.01, 此时平板边长和小孔的比值已可以近似看作无限大了。由于对称性, 取四分之一平板来分析, 有限元网格的划分如图 2, 共有 49 个八结点单元, 文献[12]中用了 49 个九结点单元以及 30 个二次边界元。

在经典弹性理论中, 带小孔无限平板单轴拉

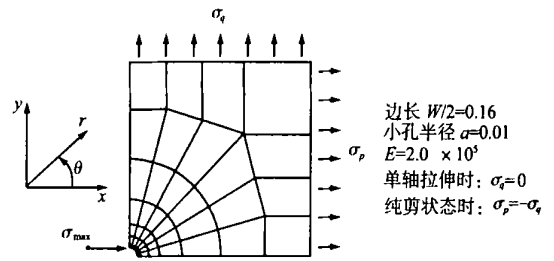


图 2 带中心小孔平板, 轴向加载时的有限元网格  
Fig.2 Finite element meshes for the stress concentration around a circular hole

伸时的应力集中因子为 3。从表 1 可以看出, 由于偶应力的存在, 应力集中因子减小了。

表 1  $x$  向单轴拉伸时的应力集中因子

$$(\sigma_{max}/\sigma_p, \theta = 90^\circ; r = a, v = 0.3)$$

Tab. 1 Stress concentration factor around a circular hole under tension in X direction

$$(\sigma_{max}/\sigma_p, \theta = 90^\circ; r = a, v = 0.3)$$

| $a/l$ | 0.5    | 0.5    | 1      | 2      | 3       | 3       | 5        |
|-------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|----------|
| B 值   | 30.769 | 7.6923 | 1.9231 | 0.8547 | 0.30769 | 0.07692 | 0.000769 |
| 理论解   | 1.924  | 2.067  | 2.336  | 2.529  | 2.744   | 2.913   | 3.0      |
| 有限元解  | 1.941  | 2.084  | 2.352  | 2.543  | 2.751   | 2.911   | 2.974    |
| 误差(%) | 0.94   | 0.82   | 0.68   | 0.55   | 0.26    | 0.07    | 0.87     |

表 2  $x$  向单轴拉伸时, 小孔周围的应力分布

$$(\sigma_x/\sigma_p, \theta = 90^\circ; v = 0.3)$$

Tab. 2 Stress distribution around a circular hole under tension in X direction

$$(\sigma_x/\sigma_p, \theta = 90^\circ; v = 0.3)$$

| $r/a$ | $a/l = 1$ |              |            | $a/l = 10$ |              |            |
|-------|-----------|--------------|------------|------------|--------------|------------|
|       | 理论解       | 有限元解         | 误差(%)      | 理论解        | 有限元解         | 误差(%)      |
| 1.00  | 2.067     | 2.084(2.070) | 0.82(0.15) | 2.913      | 2.911(2.939) | 0.07(0.89) |
| 1.10  | 1.913     | 1.948(1.929) | 1.83(0.84) | 2.422      | 2.512(2.513) | 3.71(3.76) |
| 1.20  | 1.785     | 1.799(1.785) | 0.78(0.00) | 2.074      | 2.085(2.082) | 0.53(0.39) |
| 1.35  | 1.634     | 1.663(1.650) | 1.77(0.98) | 1.733      | 1.781(1.804) | 2.77(4.10) |
| 1.50  | 1.518     | 1.524(1.513) | 0.40(0.33) | 1.524      | 1.509(1.527) | 0.98(0.20) |
| 1.75  | 1.381     | 1.404(1.396) | 1.67(1.09) | 1.326      | 1.352(1.383) | 1.96(4.30) |
| 2.00  | 1.288     | 1.286(1.278) | 0.16(0.78) | 1.221      | 1.201(1.231) | 1.64(0.82) |
| 2.50  | 1.176     | 1.193(1.191) | 1.45(1.28) | 1.119      | 1.133(1.162) | 1.25(3.84) |
| 3.00  | 1.115     | 1.111(1.106) | 0.36(0.81) | 1.074      | 1.066(1.092) | 0.74(1.68) |

注: 括号内的数据为文献[12]的计算结果。

表 2 将本文提出的单元和文献[12]中的单元计算结果作了比较, 两者都能够得到相当理想的精度, 而且边中结点的计算误差要比角结点大一些。文献[12]中, 当  $a/l = 10$  时, 相比  $a/l = 1$ , 有限元解的精度明显有所降低, 而本单元并没有出现这种趋势。文献[12]为了避免八结点 Serendipity 元在处理  $l$  很小的偶应力问题时的发散情形, 对部分场

变量采用了九结点 Lagrange 元离散, 但是这些增加的自由度并不能提高单元的精度。同时, 由于边界元自由度的出现, 单刚不对称, 计算效率也因此大大降低。

文献[11]用四种混合元计算了纯剪状态下,  $a/l = 2, \nu = 0.3$  时的应力集中因子, 理论解是 2.671。在网格一直加密趋势下, 它们的有限元解分别为 2.451(8.24)、2.456(8.05)、2.482(7.08)、2.472(7.45), 括号里是误差的百分数。这几种单元的精度都不高。若采用本文提出的方法, 49 个单元时, 计算结果为 2.700(1.09), 当单元加密到 104 个时, 有限元解为 2.675(0.15)。

**算例 2 含中间裂纹的单轴加载无限平板**

算例 2 考虑的平板如图 3(a), 取其四分之一, 按图 3(b) 网格划分, 共有 235 个单元。泊松比  $\nu = 0, 0.25, 0.49$  时, 分别计算出不同  $\lambda = l/a$  时的结果。

三种泊松比下, 裂纹中心处  $y$  向位移相对于经典弹性理论解的比值, 随  $\lambda$  的函数变化曲线如图 4 可以看出,  $\lambda$  增大时, 裂纹的最大张口(中心处)和

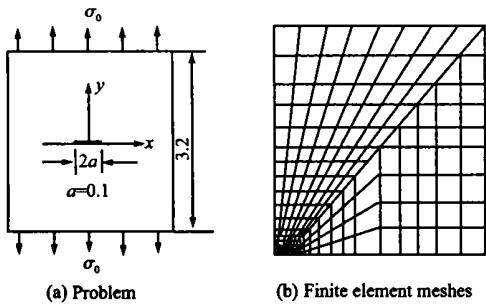


图 3 含中间裂纹的单轴加载无限平板及其网格划分  
Fig.3 Central crack in an infinite plate under simple tension

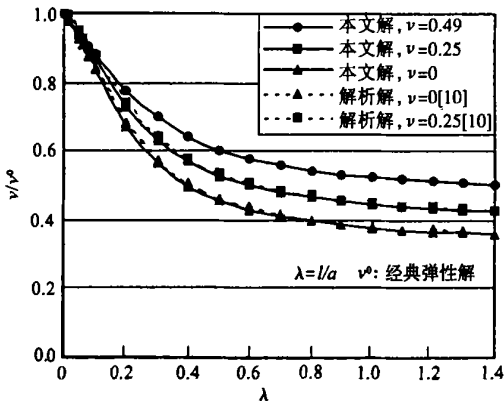


图 4 裂纹中心的侧向位移  
Fig.4 Transverse displacement at the center of crack

经典弹性解的比值单调减小, 而且这种趋势随泊松比  $\nu$  变小, 愈发显著, 但是当  $\lambda$  趋向于无穷大时,  $v/v^0$

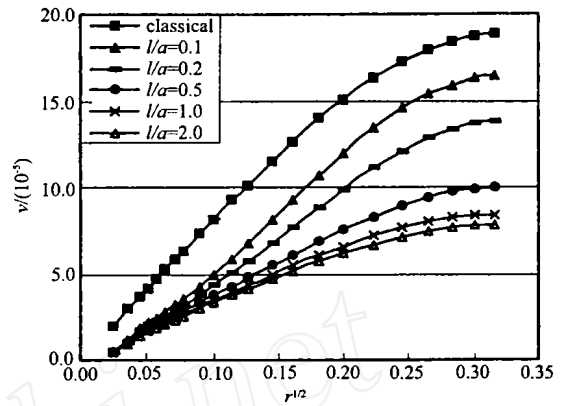


图 5 裂纹侧面位移,  $\nu=0.25$   
Fig.5 Transverse displacement distribution along the crack side face,  $\nu=0.25$

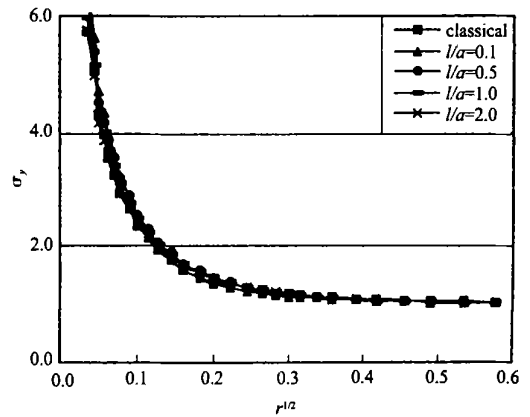


图 6 裂纹尖端应力场,  $\nu=0.25$   
Fig.6 Transverse stress distribution ahead the crack tip,  $\nu=0.25$

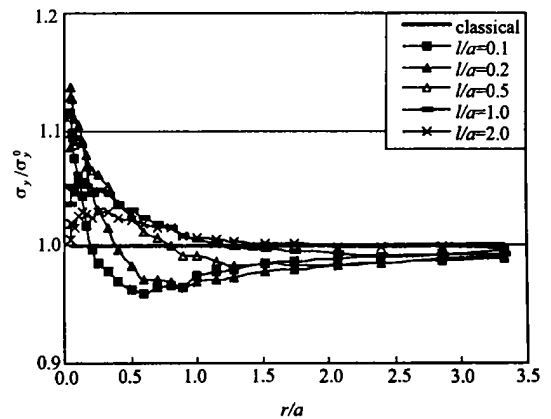


图 7 裂纹尖端应力场,  $\nu=0.25$   
Fig.7 Transverse stress distribution ahead the crack tip,  $\nu=0.25$

将会达到一个极限值。Sternberg 等人<sup>[10]</sup> 给出了偶应力弹性体中裂纹问题的部分解析解, 但公式非常复杂, 需要借助于计算机才能得到近似的解析解。

在经典弹性理论里, 裂纹线方向上裂纹尖端附近的  $y$  向位移和  $\sqrt{r}$  呈大致的线性分布, 而尖端前沿的  $y$  向应力和  $\sqrt{r}$  近似呈反比。偶应力理论中  $y$  向位移分布也有相似的特点, 如图 5, 只是斜率变

小了,而且材料的微观特性越明显( $l/a$ 越大),曲线越平滑,位移越小。图6是裂纹尖端前沿的 $y$ 向应力场,偶应力理论和经典弹性理论的曲线大致重合,因此可以推断,偶应力理论中裂纹根部侧向应力奇异性的阶数,与经典弹性理论同为 $O(r^{-\frac{1}{2}})$ 。为了了解偶应力沿裂纹方向上的主要影响区域,将图6用另一种形式表现,如图7,  $\sigma_y^0$  是对应的经典弹性有限元解。可以看到,由于偶应力的存在,裂纹尖端的应力集中加剧,而且 $l/a$ 越小,  $\sigma_y/\sigma_y^0$  越大。只是偶应力的这种影响主要集中在裂纹尖端附近的一个小区域内,尺寸大约为 $l$ 。随着 $l/a \rightarrow 0$ , 该区域内的 $\sigma_y/\sigma_y^0$  趋向一个大于1的极限值,而此时该区域的尺寸也将趋于0,因此从经典弹性理论向偶应力理论过渡时,裂纹根部的 $\sigma_y$  变化是不连续的。

## 5 结论

1. 基于 Hellinger-Reissner 变分原理, 本文提出了一种新的偶应力问题的杂交/混合元方法, 并用罚函数引入偶应力的约束条件。它可以方便地从已有的经典弹性程序中移植过来, 较已有的单元模式, 该方法推导思想简练, 程序实现容易, 计算效率明显提高。将其应用在带中心小孔无限平板的轴向均匀加载分析中, 结果相当理想。

2. 关于含裂纹平板的数值分析, 本文得到了一系列裂纹面上位移场和应力场的分布图, 文献[10]对该问题的解析解作了部分探讨, 可以看到裂纹中心处 $y$ 向位移随材料本征长度的变化曲线和解析解符合得很好(如图4)。文献[18]得出弹性情况下应变梯度在I型裂纹尖端的主要影响区域大小为 $l$ , 本文结果与此相一致。

3. 从两个算例中发现, 偶应力的存在对圆孔周围的应力集中有明显的缓解作用, 而在裂纹尖端附近反而导致应力的增大。正是因为这个原因, Itou<sup>[9]</sup>对两者之间的过渡情形——椭圆孔周围的应力集中进行了分析。由于篇幅的关系, 本文没有进一步探讨该问题。

## 参考文献(References):

[1] Cosserat E, Cosserat F. *Theorie Des Corps Deformables*[M]. Hermann et Fils Paris, 1909  
 [2] Toupin R A. Elastic materials with couple stresses [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1962, **11**: 385-414  
 [3] Mindlin R D, Tiersten H F. Effects of couple stresses in linear elasticity [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1962, **11**: 415-448

[4] Mindlin R D. Influence of couple stresses on stress concentrations[J]. *Exp Mech*, 1963, **3**: 1-7.  
 [5] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity [J]. *J Math Mech*, 1966, **15**: 909-923  
 [6] Eringen A C. Theory of Micropolar Elasticity [A]. Liebowitz H, ed. *Fracture* [M]. New York: Academic Press, 1968  
 [7] Koiter W T. Couple stresses in the theory of elasticity, I and II [A]. *Proc Royal Netherlands Acad Sci, Series B*, 1964, **LXV** II: 17-44  
 [8] Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, et al. Strain gradient plasticity: Theory and experiment [J]. *Acta Materialia*, 1994, **42**: 475-487.  
 [9] Itou S. The effect of couple-stresses on the stress concentration around an elliptic hole [J]. *Acta Mech*, 1973, **16**: 289-296  
 [10] Sternberg E, Muki R. The effect of couple-stresses on the stress concentration around a crack [J]. *Int J Solids Struct*, 1967, **3**: 69-95  
 [11] Hermann L R. Mixed finite elements for couple-stress analysis [A]. Atluri S N, et al eds. *Hybrid and Mixed Finite Element Methods* [M]. New York: Wiley, 1983: 1-17.  
 [12] Wood R D. Finite element analysis of plane couple-stress problems using first order stress functions [J]. *Int J Num Meth Engng*, 1988, **26**: 489-509  
 [13] Hermann L R. Finite element bending analysis for plates [J]. *J Engng Mech Div ASCE*, 1967, **93** (5): 13-26  
 [14] Pica A, Wood R D, Hinton E. Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a Mindlin formulation [J]. *Comp Struct*, 1980, **11**: 203-215  
 [15] Reissner E. On a variational theorem in elasticity [J]. *J Math Phys*, 1950, **29**: 90-95  
 [16] Zienkiewicz O C. *The Finite Element Method* [M]. 3rd edn. London: McGraw-Hill, 1977.  
 [17] Wu C C. Dual zero energy modes in mixed/hybrid elements-definition, analysis and control [J]. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1990, **81**: 39-56  
 [18] Huang Y, Chen J Y, Guo T F, et al. Analytic and numerical studies on mode I and mode II fracture in elastic-plastic materials with strain gradient effects [J]. *Inter J Fracture*, 1999, **100**: 1-27.

## Hybrid/mixed finite element analysis of couple-stress problems

Xiao Qilin, Ling Zhong, Wu Yongli\*

(State Key LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** In this paper the Hellinger-Reissner variational principle in classical elasticity is extended to couple-stress theory. Based on the generalized variational principle, a new effective hybrid/mixed finite element method for couple-stress theory is put forward and its constraint is introduced by a penalty function technique. In addition, the single element stability conditions and its patch stability test are discussed. Farther the verification for the element eigenvalues makes sure that the present method is reliable. Two numerical examples are given: the stress concentration around a central circular hole in a uniformly axially loaded field, and the displacement and stress fields around a crack in an infinite plate of uni-axial tension. The numerical results show that the present method has high efficiency and good accuracy. The considerably satisfying results can be obtained, even if the characteristic length is very small.

**Key words:** couple-stress theory; hybrid/mixed finite element; penalty function; stability condition