

文章编号:1005-3085(2006)01-0133-06

## 载流薄板磁弹性动力失稳临界状态的判别\*

王知人<sup>1,3</sup>, 王平<sup>2,3</sup>, 白象忠<sup>2,3</sup>(1- 燕山大学理学院, 秦皇岛 066004; 2- 燕山大学建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004;  
3- 中国科学院力学研究所, 国家非线性连续介质力学重点实验室(LNM), 北京 100080)

**摘 要:** 本文利用马丢方程, 研究载流薄板在电磁场与机械荷载共同作用下的磁弹性动力失稳问题。在导出载电流薄板在电磁场与机械荷载共同作用下的磁弹性动力稳定性方程的基础上, 应用 Galerkin 原理将稳定性方程整理为马丢方程的标准形式, 将薄板的动力稳定性问题归结为马丢方程的求解。并利用马丢方程的稳定解区域与非稳定解区域的分界, 即方程系数  $\lambda$  和  $\eta$  的本征值关系, 以三边简支一边自由载流矩形薄板为例, 得出了载流薄板磁弹性动力失稳临界状态的判别方程。

**关键词:** 磁弹性; 稳定性; 马丢方程; 失稳; 薄板**分类号:** AMS(2000) 34K28**中图分类号:** O241.8**文献标识码:** A

## 1 引言

马丢 (Mathieu) 方程是数学物理领域中的一个著名方程。其标准形式为

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\lambda - 2q \cos 2z)y = 0, \quad (1)$$

其中  $\lambda$  和  $q$  是参数, 方程(1)只有当参数  $\lambda$  和  $q$  满足一定的关系时, 才有周期为  $\pi$  或  $2\pi$  的解, 此解称为马丢函数。马丢函数最早在椭圆波导系统, 椭圆柱体的电磁散射以及单模椭圆截面光纤的研究中具有重要应用。在物理学的许多问题的求解中都经常遇到马丢方程。而将马丢方程应用于稳定性的研究可参见文献[1-3]。

以前, 对磁弹性稳定性理论主要集中在铁磁性薄板屈曲理论模型的建立及分析方法的研  
究<sup>[4-7]</sup>、以 Tokamak 核聚变反应堆环向磁场载流线圈为代表的对载流线圈及载流杆件的稳定性研究<sup>[8]</sup>。而近些年来, 工程中存在许多涉及非铁磁载流薄板在电磁场与机械荷载作用下的稳定性问题, 使对载流薄板的磁弹性稳定问题研究成为力学工作者近几年极度关注的研究课题之

动力屈曲是指板壳结构对动力荷载相应的屈曲破坏。在参数空间的某些区域中参数的改变所引起的运动的变化很小, 然而在另外一些区域中, 参数的改变将引起振幅迅速增大而趋于发散。因此动力稳定性的研究就是要找出参数空间中这种收敛域与发散域的边界, 即系统的动力稳定性边界。本文将三边简支一边自由矩形板为例, 利用马丢方程的求解, 给出载流薄板磁弹性动力屈曲临界状态的判别方程。

收稿日期: 2005-01-25, 作者简介: 王知人(1964年5月生), 女, 博士, 副教授, 研究方向: 载流薄板的屈曲问题。  
\*基金项目: 国家自然科学基金(50275128)。

## 2 基本方程

### 2.1 载流薄板的磁弹性动力稳定方程的建立

将洛仑兹力<sup>[9]</sup>  $\rho f_x$ 、 $\rho f_y$ 、 $\rho f_z$  作为质动力载荷加到板运动方程中, 得板的磁弹性运动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + P_x + \rho f_x &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y + \rho f_y &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_z + \rho f_z &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_x + \rho f_x - Q_x &= \frac{\rho h}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}, & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - Q_y &= \frac{\rho h}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $h$  为板厚,  $P_x, P_y, P_z$  为机械载荷分量,  $N_x, N_{xy}, N_{yx}$ ;  $Q_x, Q_y$ ;  $M_x, M_{xy}, M_y$  为内力分量,  $\theta_x, \theta_y$  为角位移分量。

### 2.2 薄板的磁弹性动力稳定方程

由于  $u \ll w$ ,  $v \ll w$ , 在薄板的动力屈曲问题中一般仅考虑挠度引起的惯性力, 而忽略位移  $u$ 、 $v$  引起的惯性力。在几何线性的情况下, 根据薄板的小挠度理论, 磁弹性运动方程可进一步简化为:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_z + \rho f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3)$$

弯矩与曲率改变量和挠度的关系为

$$\begin{aligned} M_x &= D_M(\chi_x + \nu\chi_y) = -D_M\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= D_M(\chi_y + \nu\chi_x) = -D_M\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = D_M(1-\nu)\chi_{xy} = -D_M(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式整理得

$$-D_M \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_z + \rho f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (5)$$

设屈曲挠度解为

$$w(x, y, t) = W(x, y)\Theta(t), \quad (6)$$

式中  $\Theta(t)$  表示时间  $t$  的函数,  $w(x, y)$  为屈曲挠度函数。将屈曲挠度代入方程式(5)中, 得载流薄板的磁弹性动力稳定性方程

$$-\frac{\nabla^4 W}{W} + \frac{1}{D_M W} \left[ N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{P_z + \rho f_z}{\Theta(t)} \right] = \frac{\rho h}{D_M \Theta(t)} \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2}. \quad (7)$$

## 3 载流薄板磁弹性动力失稳临界状态的判别

本文将以三边简支一边自由矩形板为例, 给出载流薄板磁弹性动力屈曲临界状态的计算及判别。如图1所示, 三边简支一边自由矩形板, 长  $a$ , 宽  $b$ , 通侧向电流  $(0, J_{cl2}, 0)$ , 处于外加

横向磁场  $(0, 0, B_{03})$  中, 无外加机械载荷。

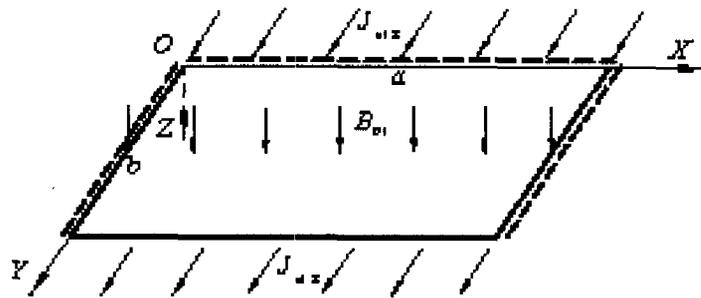


图1: 三边简支一边自由矩形薄板上电流磁场分布图

三边简支一边自由薄板边界条件为

$$\begin{aligned} x=0, a: \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad y=0; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\ y=a: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

将电流条件  $(0, J_{cl2}, 0)$ , 磁场条件  $(0, 0, B_{03})$  代入洛仑兹力<sup>[9]</sup>表达式中, 可得到:  $\rho f_y = 0$ ,  $\rho f_z = 0$ ,  $\rho f_x = J_{cl2} h B_{03}$ 。由薄板的小挠度理论,  $\rho f_x$  可视为均布随从力<sup>[9]</sup>, 设  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_{12}$  分别为矩形板承受的中面压力, 有

$$N_x = \int_x^a \rho f_x dx + P_1 = \rho f_x (a-x) + P_1,$$

$N_y = P_2$ ,  $N_{xy} = P_{12}$ 。将其代入动力稳定性方程式(7), 因无外加横向载荷 ( $P_z = 0$ ), 并且不考虑体力的影响, 可得

$$\rho h \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} W + \left\{ D_M \nabla^4 W + [\rho f_x (a-x) - P_1] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2P_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - P_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} \Theta(t) = 0 \quad (9)$$

由 Galerkin 原理有

$$\int \int_s \left\{ \rho h \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} W + \left[ D_M \nabla^4 W + (\rho f_x (a-x) - P_1) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2P_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - P_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \Theta(t) \right\} \delta W ds = 0 \quad (10)$$

设屈曲挠度函数为

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left( \frac{y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (11)$$

显然满足所有边界条件, 式中的  $m$ ,  $n$  分别为  $X$ ,  $Y$  方向板屈曲波形的半波数。将其代入式(10), 并对式中各项求偏导得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^a \int_0^a \left\{ \rho h \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} \left( \frac{y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} + \left[ D_M \pi^4 \frac{m^4}{a^4} \left( \frac{y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \right. \right. \\ \left. \left. - (\rho f_x (a-x) - P_1) \frac{m^2 \pi^2 W}{a^2} \left( \frac{y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} - 2P_{12} \frac{m\pi}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \right] \Theta(t) \right\} dx dy = 0, \end{aligned}$$

再对上式进行积分得

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \left\{ \rho h \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} \frac{ab}{2m\pi} (1 - \cos m\pi) + \left[ D_M \pi^3 \frac{m^3 b}{2a^3} (1 - \cos m\pi) - \rho f_x \frac{mb\pi}{2} + P_1 \frac{mb\pi}{2a} (1 - \cos m\pi) \right] \Theta(t) \right\} = 0,$$

由于当  $m, n$  均为偶数时上式不能为零, 故当  $m, n$  均为奇数时, 上式简化为

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \left\{ \rho h \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} \frac{ab}{m\pi} + \left[ D_M \pi^3 \frac{m^3 b}{a^3} - \rho f_x \frac{mb\pi}{2} + P_1 \frac{mb\pi}{a} \right] \Theta(t) \right\} = 0.$$

因  $A_m$  不能全部为零, 故可令

$$\rho h \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} \frac{ab}{m\pi} + \left[ D_M \pi^3 \frac{m^3 b}{a^3} - \rho f_x \frac{mb\pi}{2} + P_1 \frac{mb\pi}{a} \right] \Theta(t) = 0, \quad (12)$$

将  $\rho f_x = J_{cl2} h B_{03}$  代入上述方程, 令  $\Theta(t) = 0$ ,  $J_{cl2} = J \cos \varpi$  ( $\varpi$  为电流的变化频率), 并设  $P_1 = P_{01} + P \cos \varpi t$ ,  $P_2 = P_{02} + \alpha P \cos \varpi t$ , 式中:  $P_{01}$ 、 $P_{02}$  分别为  $P_1$ 、 $P_2$  静载部分;  $P$  为脉动中面荷载的振幅;  $\alpha$  是中面荷载之间的比例系数,  $P_{01} = 0$ 。式(12)可整理得

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \left[ \frac{4m^2 \pi^2}{a^2 \rho h \varpi^2} \left( \frac{D_M m^2 \pi^2}{a^2} + P_{01} \right) + \frac{4m^2 \pi^2}{a^2 \rho h \varpi^2} \left( P - \frac{JhB_{03}}{2} \right) \cos 2r \right] T = 0,$$

最后可将方程整理为标准的马丢方程

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + (\lambda - \eta \cos 2r) T = 0, \quad (13)$$

其中

$$\lambda = \frac{4m^2 \pi^2}{a^2 \rho h \varpi^2} \left( \frac{D_M m^2 \pi^2}{a^2} + P_{01} \right), \quad \eta = \frac{4m^2 \pi^2}{a^2 \rho h \varpi^2} \left( P - \frac{JhB_{03}}{2} \right), \quad r = \frac{1}{2} \varpi t. \quad (14)$$

到此, 随着时间变量的引进, 薄板的动力屈曲问题归结为马丢方程的求解<sup>[3]</sup>, 而式(13)解的稳定性与参数  $\lambda$  和  $\eta$  的分布有关, 在  $\lambda - \eta$  平面上, 出现了一系列稳定和不稳定区域<sup>[10]</sup>。这些区域相当于板的动力稳定区域和不稳定区域, 应用马丢方程的这种性质, 可确定载流薄板的失稳临界状态。其本征值关系表达为如下连分式形式

$$\begin{aligned} \lambda - (\gamma + 2k)^2 - \frac{\eta^2}{\lambda - (\gamma + 2k + 2)^2} - \frac{\eta^2 |}{\lambda - (\gamma + 2k + 4)^2} - \dots \\ = \frac{\eta^2}{\lambda - (\gamma + 2k - 2)^2} - \frac{\eta^2 |}{|\lambda - (\gamma + 2k - 4)^2} - \frac{\eta^2 |}{|\lambda - (\gamma + 2k - 6)^2} - \dots \end{aligned} \quad (15)$$

1) 全周期解时, 周期 =  $\pi$ ,  $\gamma =$  偶数

在(15)式中令  $\gamma = 0, k = 0$ , 如果所得结果的两边是有限的, 有

$$\lambda = -\frac{2\eta^2}{4 - \lambda} - \frac{2\eta^2 |}{|16 - \lambda} - \frac{2\eta^2 |}{|36 - \lambda} - \dots, \quad (16)$$

如果等式两边都是无穷大, 则有

$$\lambda - 4 = -\frac{2\eta^2}{16 - \lambda} - \frac{2\eta^2 |}{|36 - \lambda} - \dots \quad (17)$$

由上两式可以定出一系列的  $\lambda(\eta)$ 。由式(16)可以得出便于计算  $\lambda = a_{2n}(\eta)$  的公式 ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} \lambda - (2n)^2 - \frac{\eta^2}{\lambda - (2n-2)^2} - \frac{\eta^2}{|\lambda - (2n-4)^2} - \dots - \frac{\eta^2}{|\lambda - 4} - \frac{2\eta^2}{|\lambda} \\ = -\frac{\eta^2}{(2n+2)^2 - \lambda} - \frac{\eta^2}{|(2n+4)^2 - \lambda} - \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

由式(17)可以导出便于计算  $\lambda = b_{2n+2}(\eta)$  的公式

$$\begin{aligned} \lambda - (2n+2)^2 - \frac{\eta^2}{\lambda - (2n)^2} - \frac{\eta^2}{|\lambda - (2n-2)^2} - \dots - \frac{\eta^2}{|\lambda - 4} \\ = -\frac{\eta^2}{(2n+4)^2 - \lambda} - \frac{\eta^2}{|(2n+6)^2 - \lambda} - \dots. \end{aligned} \quad (19)$$

2) 半周期解时, 周期 =  $2\pi$ ,  $\gamma =$  奇数

$$\lambda - 1 - \frac{\eta^2}{\lambda - 9} - \frac{\eta^2}{|\lambda - 25} - \dots = \frac{\eta^2}{\lambda - 1} - \frac{\eta^2}{|\lambda - 9} - \frac{\eta^2}{|\lambda - 25} - \dots = \pm\eta, \quad (20)$$

取正号时, 得

$$\lambda = 1 + \eta - \frac{\eta^2}{9 - \lambda} - \frac{\eta^2}{|25 - \lambda} - \dots, \quad (21)$$

取负号时, 得

$$\lambda = 1 - \eta - \frac{\eta^2}{9 - \lambda} - \frac{\eta^2}{|25 - \lambda} - \dots, \quad (22)$$

此时, 由式(21)可导出计算  $\lambda = a_{2n+1}(\eta)$  的公式

$$\begin{aligned} \lambda - (2n+1)^2 - \frac{\eta^2}{\lambda - (2n-1)^2} - \frac{\eta^2}{|\lambda - (2n-3)^2} - \dots - \frac{\eta^2}{|\lambda - 9} - \frac{\eta^2}{|\lambda - 1 - \eta} \\ = -\frac{\eta^2}{(2n+3)^2 - \lambda} - \frac{\eta^2}{|(2n+5)^2 - \lambda} - \dots. \end{aligned} \quad (23)$$

由式(22)可导出计算  $\lambda = b_{2n+1}(\eta)$  的公式

$$\begin{aligned} \lambda - (2n+1)^2 - \frac{\eta^2}{\lambda - (2n-1)^2} - \frac{\eta^2}{|\lambda - (2n-3)^2} - \dots - \frac{\eta^2}{|\lambda - 9} - \frac{\eta^2}{|\lambda - 1 - \eta} \\ = -\frac{\eta^2}{(2n+3)^2 - \lambda} - \frac{\eta^2}{|(2n+5)^2 - \lambda} - \dots. \end{aligned} \quad (24)$$

由式(18), 式(19), 式(23), 式(24)所确定的四组本征值关系公式就是动力稳定区域与动力非稳定区域的分界线。而最低阶的动力屈曲临界状态更具有实际意义。令  $n = 0$ , 得最低阶的四组本征值基本公式  $\lambda = a_0(\eta)$ ,  $\lambda = b_2(\eta)$ ,  $\lambda = a_1(\eta)$ ,  $\lambda = b_1(\eta)$ , 其曲线对应各动力稳定区域与动力非稳定区域的分界线。

## 4 结论

本文通过理论推导给出了载电流薄板的磁弹性动力稳定性方程。应用 Galerkin 原理将稳定性方程整理为特殊函数马丢方程的标准形式, 并利用马丢方程的稳定解区域与非稳定解区域的分界, 即系数  $\lambda$  和  $\eta$  的本征值关系, 从而得出了磁弹性失稳临界状态的判别方程, 由此可计算载流薄板的磁弹性稳定性问题。

## 参考文献:

- [1] 罗诗裕. 马丢方程的一阶不稳定区及其在回旋加速器中的应用[J]. 应用数学和力学, 1982,4(3):555-561
- [2] N.Γ马尔金著. 运动稳定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1958
- [3] 吴连元编著. 板壳稳定性理论[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996
- [4] Moon F C, Pao Y H. Magnetoelastic buckling of a thin plate[J]. ASME J Appl Mech, 1968,35(1):53-58
- [5] Popelar C H. Postbuckling analysis of a magnetoelastic beam[J]. J Appl Mech, 1972,39:207-211
- [6] Pao YH, Yeh CS. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids[J]. Int J Engng Sci, 1973,11(4):89-114
- [7] Eringen AC. Theory of electromagnetic elastic plates[J]. Int J Engng Sci, 1989,27(4):363-375
- [8] 王海滨, 周义和, 郑晓静. 超导磁体感应电流及其对电磁弹性动力稳定性的影响[J]. 核聚变与等离子体物理, 2003,23(1):1-6
- [9] 白象忠. 板壳弹性理论基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996:156-158
- [10] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 1979:601, 610-613, 628-630
- [11] 莫宵伊, 计伊周, 王忠民. 矩形薄板在非保守力作用下的动力稳定性[J]. 西安理工大学学报[J], 2000,16(4):370-375

## The Magnetic-elasticity Stability Criterion of a Thin Current Carrying Plate

WANG Zhi-ren<sup>1,3</sup>, WANG Ping<sup>1,2</sup>, BAI Xiang-zhong<sup>1,2</sup>

(1- College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004; 2- College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004; 3- The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical(LNM), Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract:** The magnetic-elasticity kinetic stability problem of a current carrying plate under the action of mechanical load in a magnet field is studied by using the Mathieu equation. Based on deriving the magnetic-elasticity kinetic steady equation, the equation is changed into the standard form of the Mathieu equation by using the Galerkin method. Solving the Mathieu equation can then get the solution of the stability problem. Through discussing the boundary lines of steady and unsteady solution areas of the Mathieu equation, that is, discussing the eigenvalue relations between the coefficients  $\lambda$  and  $\eta$  in the Mathieu equation, the magnetic-elasticity criterion equation of a plate simply supported at three edges has been gotten as an example.

**Keywords:** magnetic-elasticity; stability; the Mathieu equation; buckling; thin plate