

# 脆性短纤维增强复合材料亚宏观模型 及损伤本构关系\*

刘洪秋 梁乃刚

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

夏蒙芬

(北京大学物理系, 非线性科学中心, 北京 100871)

**摘要** 基于随机分布短纤维与基体损伤的物理机制与统计描述, 针对长径比、刚度模量与强度都比较大的脆性短纤维增强复合材料, 提出了一种亚宏观材料模型; 考虑了纤维与基体的损伤统计规律、损伤诱发的各向异性与损伤率等因素对材料宏观力学行为的影响, 导出了亚宏观损伤本构方程. 还以短玻璃纤维增强聚丙烯复合材料为例, 对损伤诱致各向异性与损伤率效应及初始取向分布对材料宏观力学性能的影响进行了定量分析; 理论预测与文献中提供的实验结果良好吻合.

**关键词** 短纤维增强复合材料 亚宏观材料模型 损伤本构方程 损伤诱致各向异性

短纤维增强复合材料以其高性能低成本而在工程中得到了广泛的应用. 以往对纤维增强作用的研究工作多基于自恰模型和等效夹杂模型. 文献[1]对等效夹杂理论的近似推广得到了较广泛的应用, 复合材料损伤力学得以迅速发展. 但就增强短纤维含量较高、长细比较大而且随机分布的复合材料而论, 仍缺乏合理实用的材料模型与损伤本构方程. Liang 等人<sup>[2]</sup>将纤维增强与滑移机制引入到材料模型中, 提出了一种具有取向构造的多晶体材料模型及相应的亚宏观弹塑性本构关系<sup>[3]</sup>; 直接体现了材料变形诱致各向异性的物理机制<sup>[4]</sup>; 纤维增强的细观描述还被用于多相纤维增强复合材料<sup>[5]</sup>; 为发展短纤维增强复合材料损伤理论提供了新的思路.

基于 Kachanov<sup>[6]</sup>的损伤概念, 均匀连续介质损伤力学得以建立与发展. 利用热力学内变量理论, Rousselier 将损伤变量引入到连续介质力学理论框架中<sup>[7]</sup>. Murakami<sup>[8]</sup>将各向同性损伤理论<sup>[9]</sup>发展为各向异性损伤理论. 基于裂纹与材料内部键合力破坏的统计描述, 文献[10]提出了模拟多晶金属的损伤行为的各向异性损伤模型. Krajcinovic 针对平行排列脆性纤维束模型认为材料损伤演化规律取决于纤维断裂强度的概率分布, 为建立纤维增强复合材料损伤理论做了卓有成效的尝试<sup>[11]</sup>.

与均匀连续介质不同, 建立短纤维增强复合材料损伤理论的困难在于短纤维与损伤分布的取向性、非均匀性、以及损伤对初始微结构缺陷、载荷历史与加载路径的复杂依赖性与损伤

1999-03-15 收稿

\*国家自然科学基金(批准号:19872065, 19732060)及中国科学院资助项目

耦合效应. 因而建立复合材料损伤理论需要发展一些不同于均匀连续介质损伤力学的思路与方法<sup>[12]</sup>. 如何构造体现短纤维增强复合材料微结构特征的材料模型, 如何描述纤维、基体及其界面的损伤演化规律, 如何实现材料细观物理构元损伤到材料宏观损伤响应的过渡等, 都成为发展复合材料损伤力学的难题<sup>[13]</sup>.

限于现有实验资料并考虑到数学描述的简明实用, 本文针对短纤维增强复合材料的结构与物理性质特征, 在下述 3 个方面做了基本假定: 一是非均匀局部应变与宏观应变的关系; 二是宏观材料代表单元中细观参量统计平均值的不变性; 三是取向不同纤维间的耦合作用可以忽略. 在上述假定条件下, 提出用增强纤维束构元构造材料模型; 研究了纤维断裂强度概率分布、取向分布密度对短纤维复合材料的各向异性损伤行为的影响, 并考虑纤维断裂引起的应力转移, 导出各向异性损伤率相关的损伤本构方程. 结合玻璃纤维增强复合材料, 着重讨论了损伤演化规律、损伤诱致各向异性以及初始取向分布对材料宏观力学行为的影响. 接着通过理论预测与实验结果的对照, 检验本文提出理论模型的预测能力. 最后列举结论与讨论.

## 1 材料模型的建立

### 1.1 局部应力应变的非均匀性描述

短纤维增强复合材料由众多随机分布的短纤维和基体组成. 由于短纤维的位置与取向分布不均匀, 局部应力应变具有非均匀性. 本文假设基体和短纤维中的应变率随所处位置不同而不同, 但在未损伤前分别保持与宏观应变率成比例. 因而可以用非均匀比例因子描写局部应变率的非均匀性.

以下用  $\tilde{\mathbf{E}}_m$  及  $\tilde{\mathbf{E}}_f$  分别表示基体和短纤维中的局部应变率;  $\mathbf{P} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$  表示取向在单位矢量  $\mathbf{1}$  方向上短纤维的取向张量,  $\dot{\mathbf{E}}$  为宏观应变率张量. 上述假设可以表示为

$$\tilde{\mathbf{E}}_m = \tilde{c}_m : \dot{\mathbf{E}}, \quad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_f = \tilde{c}_f \mathbf{P} : \dot{\mathbf{E}}, \quad (2)$$

其中四阶张量  $\tilde{c}_m$  和标量  $\tilde{c}_f$  分别为基体与短纤维的局部应变率和非均匀比例因子, 而符号“ $\sim$ ”表示它们是位置的函数. 由于材料各细观部分间的耦合作用, 通常它们还会随宏观应变  $\mathbf{E}$  的改变而变化, 即  $\tilde{c}_m(\mathbf{E})$  和  $\tilde{c}_f(\cdot)$ , 其中  $\mathbf{P} = \mathbf{P} : \mathbf{E}$ .

本文只考虑小变形等温过程, 材料各组分均为增量线性介质. 用  $\tilde{\mathbf{S}}_m$  和  $\tilde{\mathbf{K}}_m$  表示基体内部的应力率和瞬时刚度张量,  $\tilde{\mathbf{S}}_f$  和  $\tilde{\mathbf{K}}_f$  表示短纤维的应力率及瞬时刚度模量. 基体和短纤维的增量应力应变关系可以表示为

$$\tilde{\mathbf{S}}_m = \tilde{\mathbf{K}}_m : \tilde{\mathbf{E}}_m, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_f = \tilde{\mathbf{K}}_f \tilde{\mathbf{E}}_f. \quad (4)$$

### 1.2 材料模型与模型材料的瞬时(切线)刚度张量

本节考虑单向短纤维增强复合材料, 其中增强纤维在基体内的位置是随机的, 但分布在同一方向上. 单位体积的变形总功率等于各组分的变形功率之和, 即

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \int_{v_m} \tilde{\mathbf{S}}_m : \tilde{\mathbf{E}}_m \, dv + \int_{v_f} \tilde{\mathbf{S}}_f : \tilde{\mathbf{E}}_f \, dv = \left\{ \int_{v_m} \tilde{c}_m : \tilde{\mathbf{S}}_m \, dv + \int_{v_f} \tilde{c}_f \tilde{\mathbf{S}}_f \, dv \right\} : \dot{\mathbf{E}}, \quad (5)$$

在等温弹性过程中,总功率就是 Helmholtz 比自由能变化率. 由此可得宏观总应力为

$$S = v_m \tilde{c}_m : \tilde{S}_m dv + v_f \tilde{c}_f : \tilde{S}_f dv P, \quad (6)$$

上式表明,复合材料的总应力是由基体和纤维分担的. 于是,总应力率为

$$\dot{S} = v_m (\tilde{c}_m : \dot{\tilde{S}}_m + \dot{\tilde{c}}_m : \tilde{S}_m) dv + v_f (\tilde{c}_f : \dot{\tilde{S}}_f + \dot{\tilde{c}}_f : \tilde{S}_f) dv P, \quad (7)$$

将(1)和(2)式代入(3)和(4)式,并由(7)式可得

$$\dot{S} = (v_m \bar{K}_m + v_f \bar{K}_f) : \dot{E}, \quad (8)$$

其中

$$\bar{K}_m = \frac{1}{v_m} \left[ \tilde{c}_m : \bar{K}_m : \tilde{c}_m + \frac{1}{2} \left( \tilde{S}_m : \frac{d\tilde{c}_m}{dE} + \frac{d\tilde{c}_m}{dE} : \tilde{S}_m \right) \right] dv, \quad (9)$$

$$\bar{K}_f = \bar{k}_f P \odot P, \quad \bar{k}_f = \frac{1}{v_f} \left[ \tilde{c}_f^2 \bar{k}_f + \tilde{c}_f : \frac{d\tilde{c}_f}{d} \right] dv \quad (10)$$

分别为基体和纤维对宏观刚度张量的贡献,  $v_m$  与  $v_f$  分别是基体与纤维的体积分数. (8) ~ (10) 式即为等温无损伤过程单向非均匀短纤维增强复合材料的增量本构关系.

根据以上讨论,单向短纤维复合材料可以看作是由刚度为  $\bar{K}_m$  的连续基体和刚度为  $\bar{k}_f$  的纤维束组成的模型材料,其中基体和纤维束分别满足关系式

$$\dot{S}_m = \bar{K}_m : \dot{E}, \quad (11)$$

$$\dot{S}_f = \bar{k}_f \dot{E} \quad (\text{其中 } \dot{E} = P : \dot{E}). \quad (12)$$

基体和纤维束的平均刚度反映了细观随机分布的统计平均特性,而它们随变形历程的变化规律由具体材料的统计特性决定. 应当指出:与长纤维增强复合材料不同,本文所考虑的材料代表单元尺度远大于纤维长度,纤维的长径比、刚度模量与强度都比较大. 纤维束的性质不仅取决于短纤维自身的性质,而且取决于短纤维分布的非均匀性. 由此,纤维束的整体性能与刚度为  $\bar{k}_f$  的长纤维等效. 由于不考虑不同取向纤维间的耦合作用,上述材料模型可推广应用于纤维取向更为复杂的复合材料,见 2.3 节. 下一节仍针对单向短纤维增强复合材料模型推导损伤本构方程. 由于不会引起混淆,下文中将省略平均刚度张量上的符号“-”.

## 2 损伤本构方程

### 2.1 损伤变量的统计表达式与热力学关系

短纤维增强复合材料的损伤包括短纤维的断裂、界面脱粘、基体损伤及它们的相互作用等. 基体损伤破坏了纤维的载荷传递路径,而纤维损伤导致基体内部的缺陷和应力集中加剧. 因此,不管哪一种损伤发生都将影响基体和纤维束二者的承载能力,导致复合材料的力学性质的蜕化. 对于如此复杂的损伤及相互耦合作用,很难分别对所有损伤的细节逐一进行描述. 为此,本文将复合材料损伤归为两类:一是基体损伤,一是由纤维断裂与界面脱粘引起的纤维束的损伤.

按照 Kachanov 的损伤定义,基体和纤维束的平均应力应满足下列关系:

$$S_m = (1 - D_m) S_m^{(ef)}, \quad (13)$$

$$f = (1 - D_f) f^{(ef)}, \quad (14)$$

其中  $D_m$  是基体承载面积的折减百分比,  $D_f$  为由纤维断裂与界面脱粘引起的纤维束损伤的百分比.

依照 Kachanov 的损伤定义, 有效应力  $S_m^{(ef)}$  与  $f^{(ef)}$  遵循无损伤材料的原有应力应变响应规律:

$$\dot{S}_m^{(ef)} = K_m : \dot{E}, \quad (15)$$

$$\dot{f}^{(ef)} = k_f \dot{f}, \quad (16)$$

其中  $K_m$  和  $k_f$  是基体与纤维束的平均刚度. 如果  $(f_c)$  表示界面脱粘或纤维断裂应变  $f_c$  的概率密度分布, 满足归一化条件

$$\int_{cr} (f_c) d f_c = 1, \quad (17)$$

则  $D_f$  可以表示为

$$D_f(f) = \int_{cr}^f (f_c) d f_c, \quad (18)$$

其中  $cr$  为损伤应变的阈值,  $f$  为累积应变. 广义地讲, 上式中的  $f$  应为变形过程中达到的最大应变. 这样, 纤维束的损伤可以由短纤维的断裂应变的概率密度分布及最大应变来确定.

对于等温无限小变形过程, 存在两类独立状态变量: 应变张量  $E$  和损伤向量  $D = \{D_m, D_f\}$ . 在增广状态空间, 由 Helmholtz 比自由能  $f$  表示的 Gibbs 关系可以推广为<sup>[12]</sup>

$${}_0 \dot{f} = S : \dot{E} - \dot{D}, \quad (19)$$

其中  ${}_0$  是质量密度. 与  $E$  和  $D$  共轭的变量为应力张量  $S$  和广义热力学力  $\mu = \{\mu_m, \mu_f\}$ , 而且  $S$  和  $\mu$  均为  $E$  和  $D$  的函数. 既然广义热力学力  $\mu$  是  $E$  和  $D$  的函数,  $D$  也可以看作  $E$  和  $\mu$  的函数. 于是损伤演化方程可写为

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial E} : \dot{E} + \frac{\partial D}{\partial \mu} \cdot \dot{\mu}. \quad (20)$$

考虑一个完全由宏观应变控制的准静态过程,  $D$  可以看成只是应变的函数. 上式便可进一步表示为

$$\dot{D} = \left\{ \frac{\partial D}{\partial E} + \frac{\partial D}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{dE} \right\} : \dot{E} = \frac{dD}{dE} : \dot{E}, \quad (21)$$

即损伤演化率与应变率呈线性关系. 在此情况下, 损伤演化取决于  $\frac{dD}{dE}$ , 而  $\frac{dD}{dE}$  由具体材料决定. 就纤维束而言, 由纤维束损伤的定义(18)式可得

$$\frac{dD_f}{dE} = (f) P. \quad (22)$$

## 2.2 损伤率效应与损伤本构方程

在考虑损伤的情况下, 宏观变形总功率仍然为基体和纤维束的功率之和, 利用(13)和(14)式, 单元体上的总功率为

$$S : \dot{E} = v_m(1 - D_m) S_m^{(ef)} : \dot{E} + v_f(1 - D_f) f^{(ef)} P : \dot{E}, \quad (23)$$

由此可得

$$S = v_m(1 - D_m) S_m^{(ef)} + v_f(1 - D_f) P, \quad (24)$$

上式表明应力仍然是由基体和纤维束分担的, 损伤对总应力的影响分别通过基体和纤维束承载能力的折减来确定. 由上式可导出应力率为

$$\dot{S} = v_m \left\{ (1 - D_m) \dot{S}_m^{(ef)} - \dot{D}_m S_m^{(ef)} \right\} + v_f \left\{ (1 - D_f) \dot{P} - \dot{D}_f P \right\}, \quad (25)$$

由此可见, 总应力率不仅受损伤状态的影响, 而且受损伤率的影响. 鉴于对损伤过程的热力学考虑, 损伤率可由应变率表示. 将(15)、(16)及(21)式代入(25)式, 可得

$$\dot{S} = \{ v_m K_m^{(ef)} + v_f K_f^{(ef)} \} : \dot{E}, \quad (26)$$

其中

$$K_m^{(ef)} = (1 - D_m) K_m - \frac{1}{2} \left[ S_m^{(ef)} \otimes \frac{dD_m}{dE} + \frac{dD_m}{dE} \otimes S_m^{(ef)} \right], \quad (27)$$

$$K_f^{(ef)} = k_f^{(ef)} P \otimes P \quad \left[ \text{其中 } k_f^{(ef)} = k_f(1 - D_f) - P \frac{dD_f}{dE} \right], \quad (28)$$

$K_m^{(ef)}$  是基体的四阶有效刚度张量,  $K_f^{(ef)}$  为纤维束的四阶有效刚度张量.  $K_f^{(ef)}$  反映了单向纤维束的损伤对宏观刚度张量的影响. 同样, 有效刚度张量的折减也可以分为两部分: 一是由损伤状态引起的, 一是由损伤率引起的, 后者称之为损伤率效应.

本文不考虑应变减小情况下材料的愈合与损伤发展, 即应变幅度减小时  $\dot{D} = 0$ . 就一束纤维而言, 损伤演化过程中的有效刚度可叙述为

$$k_f^{(ef)} = \begin{cases} k_f(1 - D_f) - P \frac{dD_f}{dE}, & \text{当 } |f| / \max(|f|, |c_r|) \text{ 及 } f d f > 0, \\ k_f(1 - D_f), & \text{当 } |f| / \max(|f|, |c_r|) \text{ 或 } f d f = 0. \end{cases} \quad (29)$$

基体的损伤率为零时的有效刚度张量为

$$K_m^{(ef)} = (1 - D_m) K_m, \quad (30)$$

它与传统的损伤理论相同. 可见, 在损伤率效应对有效刚度影响不大时, (30) 式是估计有效刚度张量的近似公式. 基体损伤增长规律因材料而异, 在第 3 节中作具体讨论.

总之, (26) ~ (28) 式是单向短纤维增强复合材料增量亚宏观损伤本构关系. 在损伤增长过程中, 有效刚度张量不仅依赖于损伤状态而且依赖于损伤率效应. 损伤状态不足以确定材料的进一步承载能力. 而损伤率效应可能引起材料承载能力进一步降低, 成为最终导致损伤演化诱发灾变的关键因素<sup>[13]</sup>.

### 2.3 多向短纤维增强复合材料的损伤本构方程

多向短纤维增强复合材料中, 短纤维的空间位置是随机的, 其取向用取向密度分布函数描述. 模型材料中的纤维束取向分布应与短纤维的取向分布函数相同. 因此, 短纤维复合材料模型可以由两种构元组成: 一是基体, 一是具有取向分布密度的纤维束. 所有纤维束的取向单位矢量在三维空间中形成一单位半球. 纤维束的取向密度分布函数反映了短纤维取向的统计效应, 是对材料内部结构的统计表述. 而长纤维复合材料的取向结构相对比较简单.

由(28)式可知, 纤维束对宏观刚度张量的贡献取决于其取向张量  $P$ 、有效刚度及体积分数. 限于现有实验资料并照顾到数学描述的简明实用, 暂不考虑取向不同纤维间的耦合作用. 于是, 具有取向密度的短纤维增强复合材料的总功率可以通过叠加而得到, 由此导出的纤维组合刚度张量为

$$K_f^{(ef)} = k_f^{(ef)} P \otimes P d, \quad (31)$$

其中,取向在  $d$  中的纤维体积为  $d$ ,取向密度 满足

$$d = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi = 1, \quad (32)$$

其中  $\theta$  和  $\phi$  为球坐标. 因此,对于各向同性分布,应有  $\int d = 1/2$ . 如果  $\int d$  与  $k_f^{(ef)}$  均为常数,材料是初始各向同性的. 否则,材料为初始各向异性. 将(28)式中左端的方程改为方程(31),便得到多向短纤维增强复合材料的损伤本构方程.

### 3 玻璃纤维增强聚丙烯复合材料的损伤分析

本文将损伤归为基体损伤和由纤维断裂与界面脱粘引起的纤维束的损伤. 下面以玻璃纤维增强聚丙烯复合材料为例,提出具体的损伤演化规律. 利用本文提出的材料模型及损伤本构方程,综合分析各组分损伤对材料宏观力学行为的影响,并与相应的实验结果作比较.

#### 3.1 纤维束的损伤演化规律

短纤维增强复合材料的纤维断裂应变概率密度通常服从截断的 Weibull 分布,即

$$f(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_{fc} \\ \frac{f_f n_f}{\sigma_0} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_0} \right\}^{(n_f-1)} \exp \left\{ - \frac{1}{f_f} \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n_f} - \left( \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} \right)^{n_f} \right] \right\}, & \sigma_{fc} < \sigma < \sigma_{cr} \\ 0, & \sigma > \sigma_{cr} \end{cases}, \quad (33)$$

积分上式可以得到损伤变量为

$$D_f(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_{fc} \\ 1 - \exp \left\{ - \frac{1}{f_f} \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n_f} - \left( \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} \right)^{n_f} \right] \right\}, & \sigma_{fc} < \sigma < \sigma_{cr} \\ 1, & \sigma > \sigma_{cr} \end{cases}, \quad (34)$$

其中  $f_f$  是纤维束的损伤系数,  $n_f$  为断裂应变的 Weibull 指数,  $\sigma_0$  为无量纲化材料参数. 纤维断裂应变的 Weibull 分布恰好为纤维束的损伤率. 因而,

$$\frac{dD_f}{d\sigma} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \sigma < \max(\sigma_{fc}, \sigma_{cr}) \text{ 或 } \sigma > \sigma_{cr} \\ \frac{f_f n_f}{\sigma_0} (1 - D_f) \left\{ \frac{\sigma}{\sigma_0} \right\}^{(n_f-1)}, & \text{当 } \sigma_{fc} < \sigma < \sigma_{cr} \text{ 及 } \sigma > \sigma_{cr} \end{cases}, \quad (35)$$

上式表明,损伤率效应并非随应变而单调变化,它还会受到加载方式及损伤历史的影响.

若  $\dot{D}_f > 0$ , 对应于  $n_f = 2$  的损伤临界条件可以表示为

$$\frac{1}{2} k_f \sigma_f^2 - \frac{1}{2} k_f \sigma_{cr}^2 = 0, \quad (36)$$

上式与断裂力学中 Griffith 裂纹扩展条件类似.

#### 3.2 基体的损伤演化规律

实验结果表明:玻璃纤维增强聚丙烯复合材料的基体和纤维损伤是密切相关的. 以下对该类材料的损伤分析中,取基体承载能力的退化与纤维损伤的平均值及纤维的体积分数成比例,即

$$D_m = v_f^n \bar{D}_f, \quad \bar{D}_f = \int D_f d, \quad (37)$$

其中  $m$  是基体的损伤系数,  $n_m$  是基体损伤随纤维体积分数的变化指数. 在这种情况下, 基体的损伤增长取决于纤维束的损伤, 其损伤率张量可以表示为

$$\frac{dD_m}{dE} = m v_f^{n_m} \frac{dD_f}{d\epsilon} P_{dg} \quad (38)$$

其中  $P_{dg}$  为所有满足纤维束损伤增长条件的纤维束取向集合, 即

$$P_{dg} = \left\{ d_f; / f / \max ( / f / , / cr / ), f d_f > 0 \right\} \quad (39)$$

将 (35) 和 (38) 式代入 (26) ~ (28) 式可得用于玻璃纤维增强聚丙烯复合材料的损伤本构方程的具体形式.

### 3.3 基体和纤维束的力学参数

从文献 [14] 的有关玻璃纤维聚丙烯复合材料板的实验来看, 短纤维基本上在平面内随机分布. 因此, 该类复合材料板的取向分布可近似描述为

$$= \frac{1}{2} \left[ \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right] \quad (40)$$

其中  $\delta$  为 Dirac- 函数. 而空间各向同性复合材料的取向分布为  $\delta = 1/2$ . 为了专门考查纤维取向及损伤引起的各向异性效应, 先略去基体与纤维应变率的空间非均匀性, 即取  $\tilde{c}_m$  恒等于四阶单位张量,  $\tilde{c}_f = 1$ . 这种情况下, 复合材料的弹性刚度张量完全由基体和纤维的基本弹性常数所决定, 其中纤维模量  $k_f = 76$  GPa, 基体模量  $E_m = 1.6$  GPa, 基体 Poisson 比  $\nu_m = 0.4$ . 根据 Thomason 等的部分实验结果, 标定出的材料常数分别为:  $\nu_{cr} = 0.01$ ,  $\nu_0 = 0.038$ ,  $\nu_f = 21.0$ ,  $n_f = 4.0$ ,  $\nu_m = 12.0$ ,  $n_m = 0.5$ . 在数值模拟中, 将平面各向同性分布的纤维离散分布在 360 个等分的方向上, 各取向上的纤维束具有相同的物理性质. 而对于空间各向同性复合材料, 纤维离散为 1 440 个取向上的纤维束.

### 3.4 损伤诱发各向异性效应

图 1 给出玻璃纤维聚丙烯复合材料板的拉伸模量、拉伸强度与破坏应变随纤维体积分数的变化曲线. 其中拉伸模量与拉伸强度随纤维体积分数的变化几乎呈线性关系, 见图 1(a) 和 1(b), 而破坏应变随纤维体积分数的变化呈现强非线性, 见图 1(c). 损伤使复合材料板呈现正交各向异性. 材料的软化是由于基体和纤维束的损伤以及损伤率效应所致. 上述理论预测与文献 [14, 15] 的实验结果吻合. 由于缺乏有关实验的刚度数据, 本文以  $E_{11} = -2 E_m$  对应的应变作为破坏应变.

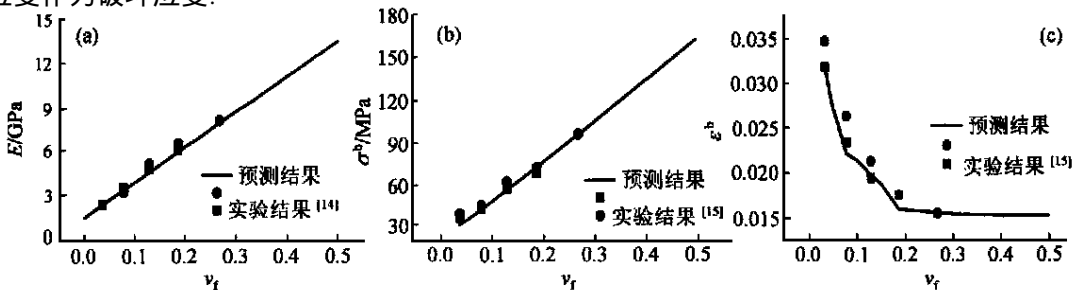


图 1 复合材料板的拉伸模量、拉伸强度与破坏应变随纤维体积分数的变化

(a) 拉伸模量随纤维含量的变化; (b) 拉伸强度随纤维含量的变化; (c) 拉伸破坏应变随纤维含量的变化

一条完整的单轴拉伸曲线包含了从初始弹性变形阶段到损伤萌生、演化至破坏全过程。在此过程中的损伤将诱发材料各向异性。然而,这种各向异性却难以通过单轴拉伸曲线来反映。下文通过分析刚度张量的变化揭示损伤对复合材料整体性能的影响及损伤诱致各向异性。以下将以 30%纤维含量的各向同性复合材料为例。图 2 给出复合材料的 5 个工程常数  $E_{11}/E_m$  与  $E_{22}/E_m (= E_{33}/E_m)$ ,  $G_{12}/G_m (= G_{13}/G_m)$  与  $G_{23}/G_m$  及  $\nu_{12}$  随拉伸应变的变化曲线。它们均随拉伸应变的增加而降低,与拉伸方向有关的分量比其他分量下降速度快,其中拉伸模量  $E_{11}$  下降得最快。各曲线的非光滑性是由损伤率效应引起的。 $E_{11}$  与  $E_{22}$  及  $G_{12}$  与  $G_{23}$  间的差别反应材料由初始各向同性变为损伤各向异性。这种损伤诱发的各向异性随损伤的增加而逐渐变强。

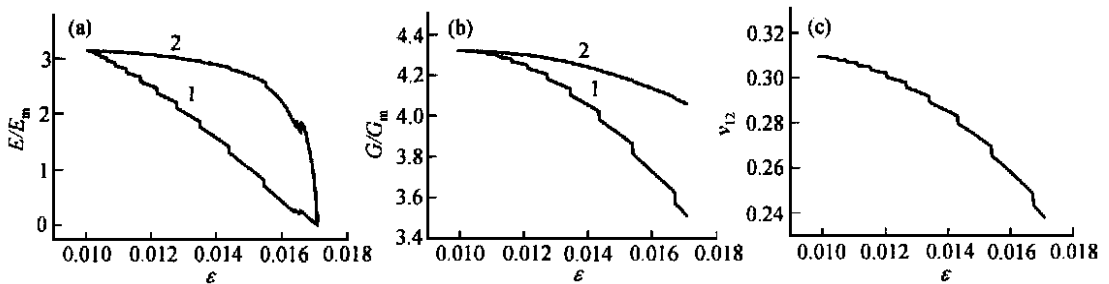


图 2 各向同性复合材料的工程材料常数随拉伸应变的变化

(a)  $E_{11}/E_m$ (曲线 1) 及  $E_{22}/E_m$ (曲线 2) 随拉伸应变的变化; (b)  $G_{12}/G_m$ (曲线 1) 及  $G_{23}/G_m$ (曲线 2) 随拉伸应变的变化;  
(c)  $\nu_{12}$  随拉伸应变的变化

### 3.5 纤维初始取向分布对材料宏观行为的影响

随着短纤维增强聚合物复合材料的塑料注射成型技术的广泛应用,取向集中对材料整体性能的影响也越来越重要。取向分布不仅影响复合材料的刚度而且影响其整体性能。鉴于塑料注射成型技术的特点,短纤维的取向分布可近似地采用余弦型函数描述,即

$$= \frac{1}{2} (n + 1) \cos^n \theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

其中  $x_1$  为轴注射方向,  $\theta$  为关于  $x_1$  轴的倾斜角。当  $n = 0$  时,对应于各向同性纤维分布;当  $n$  增大时,复合材料性质趋于单向纤维增强复合材料。为此,将  $n$  作为纤维取向集中程度的度量,研究初始取向结构对复合材料性能的影响。

纤维取向分布的集中程度对其他方向的性质也有较大的影响。特别是由于初始各向异性与损伤各向异性的共同作用,损伤过程中材料性质的变化也是非常复杂的。对于纤维具有余弦型分布的复合材料,初始性质表现为横观各向同性。图 3 给出纤维取向密度分布分别为  $n = 0, 1, 3, 5$  对拉伸与剪切模量的影响。初始拉伸模量  $E_{11}$  随着  $n$  的增加而增加,但由损伤引起的折减速度也随之加快。这正说明了较强取向的复合材料表现为高强低韧的原因。然而,横向拉伸模量  $E_{22}$  与剪切模量  $G_{23}$  均随  $n$  及损伤的增加而减少。剪切模量  $G_{12}$  随  $n$  的变化很复杂,表现出强非线性。由此可见,纤维的取向化在加强某些性质的同时,也削弱了其他方向的性质。因此,适当地控制短纤维增强复合材料的纤维取向分布对实现材料性能优化是十分重要的。



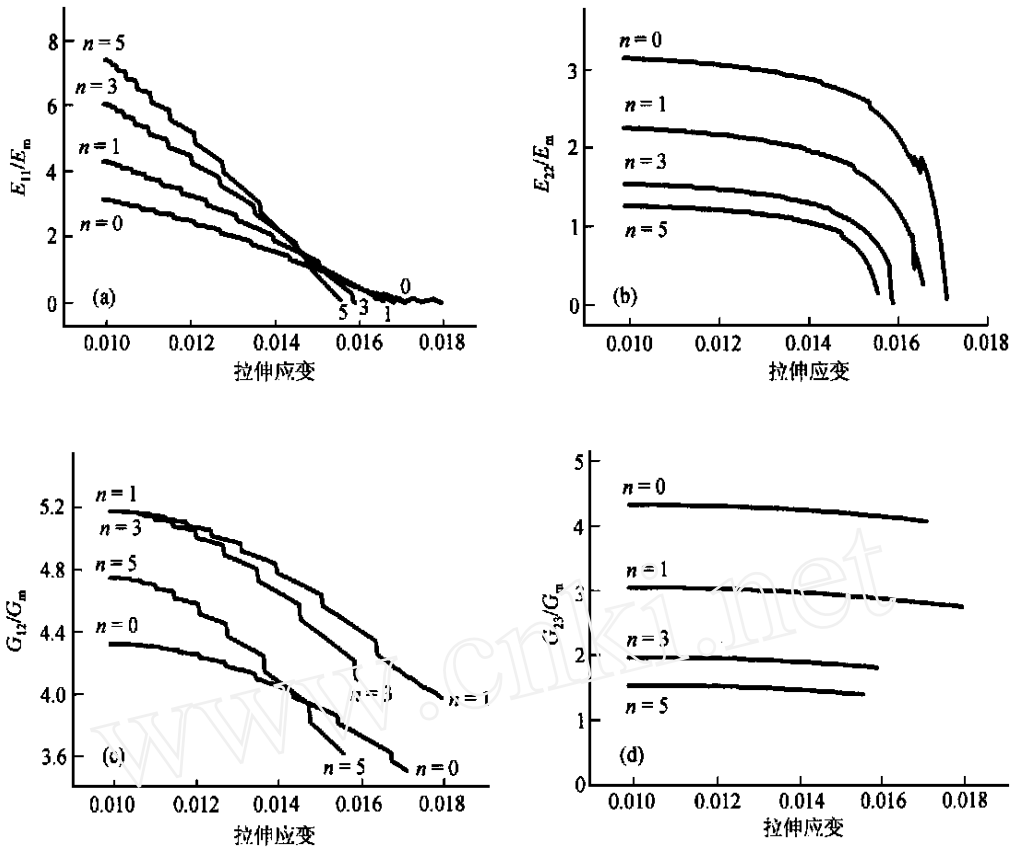


图 3 对应不同取向密度的拉伸与剪切模量随拉伸应变的变化曲线

- (a) 拉伸模量  $E_{11}/E_m$  随拉伸应变的变化; (b) 横向拉伸模量  $E_{22}/E_m$  随拉伸应变的变化;  
 (c) 剪切模量  $G_{12}/G_m$  随拉伸应变的变化; (d) 横向剪切模量  $G_{23}/G_m$  随拉伸应变的变化

## 4 讨论与结论

针对短纤维与基体损伤物理机制, 本文提出了一种亚宏观材料模型, 用于模拟复合材料的宏观力学响应, 特别是损伤行为, 导出了体现损伤各向异性与损伤率效应的本构关系. 该模型可以比较灵活方便地用于不同纤维取向分布的纤维增强复合材料, 如数值分析中所涉及到的各向同性分布、平面分布及余弦型分布等复合材料.

增强纤维取向不匀形成的初始各向异性与损伤诱发的各向异性对短纤维增强复合材料的性能有举足轻重的作用. 损伤诱发的各向异性, 与变形历史及载荷路径相关, 本模型易于反映这种相关性.

损伤率效应对短纤维增强复合材料的继续承载能力有至关重要的影响. 在外载荷控制的加载条件下, 损伤率效应诱发的材料强度失效与损伤诱致材料突然破坏会在损伤远小于 100% 时发生. 在应变控制的加载条件下, 损伤率效应导致材料软化.

当然, 实际的细观构造比本文的模型材料还要复杂得多. 本文提出的理论只是初步尝试. 旨在通过讨论, 在建立材料细观结构及其各取向组分物理参数的统计平均值与材料宏观

力学性能与变形响应之间的关系方面开阔思路,为短纤维增强复合材料的工程应用与优化设计提供参考.

### 参 考 文 献

- 1 Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1973, 21: 571 ~ 574
- 2 Liang N G, Bergan P G. A multi-dimension composite model of elasto-plastic continua under non-proportional loading condition. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 6(4): 357 ~ 366
- 3 梁乃刚,刘洪秋,王自强. 基于等效滑移与潜在硬化机制的多晶金属亚宏观弹塑性模型. *中国科学, A 辑*, 1995, 25(8): 858 ~ 867
- 4 Liu H Q, Hutter K. On a meso-elastoplastic constitutive equation with application to deformation-induced anisotropy of a polycrystalline aggregate. *Arch Mech*, 1996, 48(1): 53 ~ 65
- 5 Kalamkarov A L, Liu H Q. A new model for the multiphase fiber-matrix composite materials. *Composites*, 1998, 29B(5): 643 ~ 653
- 6 Kachanov L M. Time of the rupture process under creep condition. *Izv Akad Nauk USSR Otd Tekhn Nauk*, 1958, 8: 26 ~ 31
- 7 Rousselier G. Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage. In: *Proceedings of the IUTAM Symposium on Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*. Dordan: North-Holland Pub Company, 1980. 331 ~ 355
- 8 Murakami S. Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage Theory. *ASME J Eng Mat and Tech*, 1983, 105: 99 ~ 105
- 9 Lemaitre J, Chaboche J L. Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement. *J Meca Appl*, 1978, 2(3): 317 ~ 365
- 10 Liu H Q, Liang G N. A physical-mechanism-based anisotropic damage-rate-dependent constitutive equation. In: *Second Asia-Pacific Symposium on Advances in Engineering Plasticity and Its Application*. Beijing: International Academic Publishers, 1994. 155 ~ 160
- 11 Krajcinovic D. *Damage Mechanics*. Netherlands: Elsevier Science B V, 1996. Chap 2
- 12 匡震邦. 非线性连续介质力学基础. 西安: 西安交通大学出版社, 1989
- 13 夏蒙桢, 韩闻生, 柯孚久, 等. 统计细观损伤力学和损伤演化诱致突变. *力学进展*, 1995, 25: 1 ~ 40
- 14 Thomason J L, Vlugg M A. Influence of fiber length and concentration on the properties of glass fiber-reinforced polypropylene 1: Tensile and flexural modulus. *Composites*, 1996, 27A(6): 477 ~ 484
- 15 Thomason J L, Vlugg M A, Schipper G, et al. Influence of fiber length and concentration on the properties of glass fiber-reinforced polypropylene 3: Strength and strain at failure. *Composites*, 1996, 27A(6): 1 075 ~ 1 084