

# 物面引射对滑移边界条件的影响<sup>1)</sup>

赵静野 沈 青 唐锦荣

(中国科学院力学研究所,北京 100080)

**摘要** 讨论壁面有引射的滑移边界条件的提法. 利用 Chapman-Enskog 速度分布函数, 通过分析 Knudsen 层外缘和壁面处的质量、动量和能量等通量守恒, 得到了有壁面引射的多组元气体有催化反应的壁面滑移边界条件方程组. 利用粘性激波层方程和所得的边界条件对钝头体绕流驻点区的流场进行了计算, 讨论了物面引射对边界上诸量及流场的影响.

**关键词** 滑移边界条件, 多组元气体, 催化壁, 壁面引射, 稀薄气体动力学

## 引 言

随着航天工业的迅速发展, 人们对高空低雷诺数航空器绕流问题的研究提出了越来越高的要求, 滑移边界问题就是引起人们兴趣的主要课题之一. 在壁面有质量流及化学反应的情况下如何处理滑移条件问题是一个重要研究内容, 而壁面质量引射对壁面的气动力和气动热有着重要的影响<sup>[1]</sup>. 目前, 人们对于适应广泛的滑移边界条件的研究尚处于探索阶段<sup>[2~5]</sup>, 关于壁面有质量引射的滑移边界问题, 还未见到有关的文章.

本文考虑壁面有引射的情况, 利用多组元气体 Chapman-Enskog 速度分布函数, 通过分析 Knudsen 层外缘和壁面处的质量、动量和能量等通量守恒, 导出了适应性广泛的壁面有引射的多组元气体有催化反应的壁面滑移边界条件方程组的一般形式. 作为算例, 利用粘性激波层 (VSL) 方程及导出的边界条件求解了钝头体驻点区的流场, 分析了引射对壁面滑移和流场的影响, 得到了一些有理论和实际意义的结果.

## 1 经 Knudsen 层的通量守恒关系

研究滑移问题, 要分析贴近壁面厚度为大约一个分子平均自由程的 Knudsen 层内的分子间断效应. 本文在 Knudsen 层内外边界处建立各通量守恒关系时, 作如下简化假设:

- 1) 在 Knudsen 层内, 质量、动量和能量等通量可近似地当做常数.
- 2) 需要计及的所有非平动内自由度都与平动自由度处于热平衡状态.
- 3) 为讨论简便起见, 壁面引射气体与固壁处于热平衡, 且以漫发射 (emission) 的形式从壁面引射. 入射到壁面的气体全部以漫反射和漫发射的形式反射, 与引射气体一样, 其热运动状态与壁面状态完全适应.

在壁面上  $i$  组元质量通量守恒关系式为

$$M_i = M_{iR} + M_{wiF} \quad (1)$$

1997 - 03 - 24 收到第一稿, 1998 - 02 - 16 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目.

其中  $M_i$  和  $M_{iR}$  分别为组元质量净通量和入射质量通量,  $M_{wiF}$  为漫反射和漫发射质量通量之和.

壁面  $i$  组元法向动量通量守恒关系式为

$$P_i = P_{iR} + P_{wiF} \tag{2}$$

这里,  $P_i$  和  $P_{iR}$  分别为组元法向动量净通量和入射动量通量,  $P_{wiF}$  为漫反射和漫发射的法向动量通量之和.

将上述  $i$  组元通量关系式对所有组元求和,得到混合气体法向动量通量守恒关系式

$$\sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N P_{iR} + \sum_{i=1}^N P_{wiF} \tag{3}$$

切向动量通量守恒关系式为

$$P_{//i} = P_{//iR} + P_{W//iF} \tag{4}$$

由壁面漫反射和漫发射的定义易知  $P_{W//iF} = 0$ .

与法向动量通量一样,上式对各组元求和

$$\sum_{i=1}^N P_{//i} = \sum_{i=1}^N P_{//iR} \tag{5}$$

壁面上混合气体总焓通量守恒关系式为

$$\sum_{i=1}^N E_i^T + \sum_{i=1}^N \bar{h}_i M_i = \sum_{i=1}^N E_{iR}^T + \sum_{i=1}^N (\bar{h}_i M_i)_R + \sum_{i=1}^N E_{wiF}^T + \sum_{i=1}^N (\bar{h}_{wi} M_{wi})_F \tag{6}$$

与前面定义类似,其中  $E_i^T$  为组元平动能净通量,  $\bar{h}_i$  为不包括平动内能和压力势能的焓.

定义  $v_0$ ,  $c^i$  和  $V_i$  分别为气体宏观运动速度,  $i$  组元粒子运动速度和粒子热运动速度向量,则有下列关系式

$$c^i = v_0 + V_i \tag{7}$$

设  $F_i$  表示以上  $i$  组元各物理量的通量,  $i$  为该组元相应的质量、动量和总焓,则各通量表达式分别为全速度空间或半空间积分

$$F_i = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_y^i \rho_i(c) f_s^i(V) d^3 c \tag{8}$$

$$F_{iR} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_y^i \rho_i(c) f_s^i(V) d^3 c \tag{9}$$

$$F_{wiF} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( c_y^i \rho_i(c) \right)_w f_w^i(V) d^3 c \tag{10}$$

其中  $y$  为物面法向坐标,  $f_s^i$  为 Knudsen 层外缘速度分布函数,  $f_w^i$  为壁面处 Maxwell 速度分布函数,角标  $s$  和  $w$  分别表示 Knudsen 层外缘和壁面量.在此我们设  $f_s^i$  分布函数为多组元 Chapman-Enskog 分布函数<sup>[4]</sup>

$$f_s^i(V) = f_{0s}^i(V) \left( 1 + \phi_s^i(V) \right) \tag{11}$$

$f_{0s}^i(V)$  为多组元 Maxwell 速度分布函数,  $\phi_s^i(V)$  为 Chapman-Enskog 展开中偏离平衡项

$$\phi_s^i(V) = - A_k^i \frac{\partial \ln T}{\partial r_k} - B_{kl}^i \frac{\partial v_{0k}}{\partial r_l} + n \sum_{j=1}^N C_k^{i(j)} d_k^j \quad (12)$$

角标  $k, l$  为三坐标哑指标,  $n$  为混合气体的数密度.

由于在壁面有引射流量, 因此壁面上法向速度  $v_{0y}^w$  不为零, 但它相对其热运动速度为小量, 在本文的分析中略去二阶以上的小量. 例如

$$P_{wiF} = \int_0^\infty (v_{0y} + V_y^i)_w m_i (v_{0y} + V_y^i)_w f_w^i(V) d^3 c$$

$$2 v_{0y}^w \int_0^\infty (V_y^i)_w m_i f_w^i(V) d^3 V + \int_0^\infty (V_y^i)_w^2 m_i f_w^i(V) d^3 V \quad (13)$$

类似地, 积分以上各通量表达式, 并把各通量代入到前边列出的通量守恒关系式 (1) ~ (6) 中, 就可以建立起壁面各物理参数与 Knudsen 层外缘之值的关系.

### 2 滑移边界条件方程组

利用前面得到的各通量关系式, 我们可以得到滑移边界条件方程组的一般形式. 在滑移条件方程组中, 切向扩散质量流、切向热传导热流、热扩散及粘性正应力等项的影响相对较小, 故可略去以上各项的影响.

由质量通量守恒关系式, 可以得到组元浓度滑移条件

$$c_i^s = c_i^w \left[ 1 + \sqrt{\frac{v_{0y}^w}{V_i^w}} - \sqrt{\frac{J_i}{i V_i^w}} \right] \frac{w}{s} \left( \frac{T_w}{T_s} \right)^{1/2} \left/ \left[ 1 + \sqrt{\frac{v_{0y}^s}{V_i^s}} \right] \right. \quad (14)$$

其中  $c_i^s, c_i^w$  分别为 Knudsen 层外缘和壁面的  $i$  组元质量分数, 且有  $c_i = \frac{J_i}{i}$ ,  $\bar{V}_i = \sqrt{2 R_i T}$ ,  $J_i$  为组元扩散质量流, 其表达式为

$$J_i = \frac{m_i}{m} \sum_j^N D_{ij} \left( \frac{\partial c_i}{\partial y} - c_j m \sum_{q=1}^N \frac{1}{m_q} \frac{\partial c_q}{\partial y} \right) \quad (15)$$

$m_i$  为  $i$  组元粒子质量,  $m = \frac{1}{n}$ ,  $D_{ij}$  为多组元扩散系数

$$D_{ij}(\cdot) = \frac{n_i}{2 n m_j} \sqrt{2 R_i T} C_{i0}^{(j)}(\cdot), \quad \geq 1 \quad (16)$$

$n_i$  为  $i$  组元数密度,  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ ,  $C_{i0}^{(j)}$  为速度分布函数中 Sonine 展开式中的系数, 为展开式的项数.

由法向动量通量守恒关系式, 可以得到压力滑移条件

$$P_w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_{0y}^s \sum_{i=1}^N (i \bar{V}_i)_s + p_s + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^N \left[ J_i \bar{V}_i + \frac{2}{5} \frac{q_i}{V_i} \right]_s - \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_{0y}^w \sum_{i=1}^N (i \bar{V}_i)_w \quad (17)$$

式中,  $q_i$  为组元法向热传导热流,  $q_i = -\frac{n_i}{n} K_i \frac{\partial T}{\partial y}$ .

类似地可得到切向滑移速度

$$v_{0,x}^s = \sqrt{\frac{\mu_s}{2kT_s}} \left( \frac{\partial v_{0,x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0,y}}{\partial x} \right) / \sum_{i=1}^N \left( n_i^s \sqrt{m_i} \right) \quad (18)$$

$$v_{0,z}^s = \sqrt{\frac{\mu_s}{2kT_s}} \left( \frac{\partial v_{0,z}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0,y}}{\partial z} \right) / \sum_{i=1}^N \left( n_i^s \sqrt{m_i} \right) \quad (19)$$

由能量通量的守恒关系式,可以得到温度滑移条件

$$T_s = (a_0 + a_1 T_w) / b_0 \quad (20)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} q \\ a_1 &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{i \bar{V}_i}{2 \sqrt{J_i}} \left( \frac{h_i}{T} - \frac{1}{5} C_{p,i} \right) + \frac{1}{2} v_{0,y}^w \frac{h_i}{T} \right]_w \\ b_0 &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} J_i \frac{h_i}{T} + \frac{i \bar{V}_i}{2 \sqrt{J_i}} \left( \frac{h_i}{T} - \frac{1}{5} C_{p,i} \right) + \frac{1}{2} v_{0,y}^s \frac{h_i}{T} \right]_s \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中,  $q = \sum_{i=1}^n q_i$  为混合气体热传导热流, 比热  $C_{p,i} = \frac{5}{2} R_i$ .  $h_i$  为组元静焓, 它与  $\bar{h}_i$  有如下关系

$$h_i = \frac{5}{2} R_i T + \bar{h}_i \quad (22)$$

$v_{0,y}^w$  和  $v_{0,y}^s$  按下列总质量流关系式确定

$$(v_{0,y})_w = M_0 \quad (23)$$

$$(v_{0,y})_w = (v_{0,y})_s \quad (24)$$

$M_0$  为壁面引射质量流量.

在前边的组元浓度滑移条件关系式(14)中, 壁面组元浓度与 Knudsen 层外缘浓度都是未知的, 需要补充一个关系式. 考虑壁面引射时, 发生催化反应的任一原子组元  $A$  的质量净通量  $M_A$ , 显然应等于催化反应和引射这两部分质量流之和, 即

$$M_A = {}_A M_{AR} + M_0 c_A^0 \quad (25)$$

其中  $c_A^0$  为引射流中  $A$  组元质量分数,  ${}_A$  为壁面催化复合系数.

与发生催化反应的原子组元  $A$  相对应的分子组元  $M$  的质量净通量

$$M_M = -{}_A M_{AR} + M_0 c_M^0 \quad (26)$$

其它不发生催化反应的组元质量净通量, 只与引射流有关,

$$M_i = M_0 c_i^0 \quad (27)$$

通过以上分析,可以得到组元浓度滑移补充关系式

$$c_A^s = \left[ M_0 c_A^0 - \frac{2 - \gamma_A}{2} J_A \right] / \left[ \frac{2 - \gamma_A}{2} M_0 + \frac{\gamma_A \sqrt{V_A^s}}{2 \sqrt{\mu}} \right] \tag{28}$$

$$c_M^s = c_M^0 - J_M / M_0 - \frac{\gamma_A}{2} \left( c_A^s + J_M / M_0 \right) + \frac{\gamma_A \sqrt{V_A^s}}{2 \sqrt{\mu}} \frac{c_A^s}{M_0} \tag{29}$$

$$c_i^s = c_i^0 - J_i / M_0 \quad (i \text{ 为其它不发生催化反应的组元}) \tag{30}$$

至此,通过对各通量守恒关系式的分析,得到了滑移边界条件方程组.有关组元扩散质量流  $J_i$ ,对于组元分子量相差不大(例如非电离空气)的混合气体情况,在实际计算中可用下列近似表达式代替(15)式

$$J_i = - \mu \frac{Le}{Pr} \frac{\partial c_i}{\partial y} \tag{31}$$

其中  $\mu$ ,  $Le$  和  $Pr$  分别为混合气体的粘性系数、Lewis 数和 Prandtl 数.

### 3 算例

利用计算量较小、适用再入高度范围大的粘性激波层(VSL)方程组和上节得到的滑移边界条件方程组,对有限催化的5组元( $N_2$ ,  $O_2$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $NO$ )混合气体壁面有引射的钝头体高超音速绕流的驻点区流场进行了计算.计算基本条件为:  $u = 7.5 \text{ km/s}$ , 头部半径  $R_N = 0.1 \text{ m}$ , 飞行高度  $H = 80 \text{ km}$ ,  $p = 1.0524 \text{ Pa}$ ,  $T = 198.64 \text{ K}$ ,  $\rho = 1.846 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3$ , 壁面温度  $T_w = 1000 \text{ K}$ , 取催化系数  $\gamma_A = 0.3$ . 假设由壁面引射的是冷空气,且为简便起见,令其组元浓度与来流组元浓度相同.

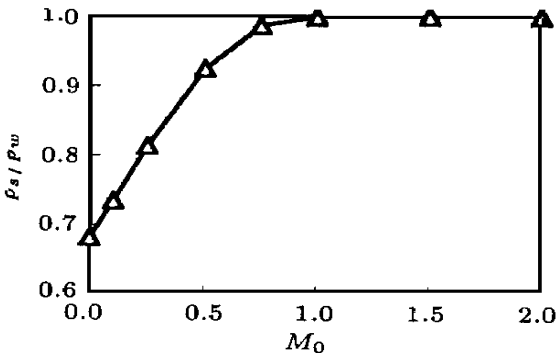


图1 壁面压力  
Fig. 1 Wall pressure

图1计算结果表明引射对气动力有显著影响,随着引射流量的增加,由于动量交换壁面压力  $p_w$  ( $p_w = p_w^* / u^{*2}$ ) 随引射流量的增加而增大,且最终趋于  $p_s$ . 由于引射冷空气,从图2可以看到 Knudsen 层外缘温度  $T_s$  随引射质量流量  $M_0$  ( $M_0 = M_0^* / u^*$ ) 增大而快速下降,趋于壁温. 激波厚度 随着引射流量的增加而增大,参见图3.

对于滑流区的宏观尺度的流场而言,与连续介质的流场特点类似,在壁面附近有一个流场参数变化激烈的薄层,为叙述方便以下简称它为“大梯度层”.若用  $T$  表示温度或原子组元浓度  $c_A$ ,则该层中平均法向梯度  $(\partial / \partial y)_{in}^{av}$  ( $c_{out} - c_{in}$ )/ $\delta$ ,其中  $\delta$  和角标 in, out 分别表示该层的厚度和内、外边界.在引射流量  $M_0$  还没有增大到将大梯度层完全推离壁面的工况范围内(这大致相当于本算例的  $M_0 < 1.5$  的区域),  $(\partial / \partial y)_{in}^{av}$  与  $(\partial / \partial y)_{in}$  趋势一致,  $c_{in}$  等于 Knudsen 层外缘值  $c_s$ ,冷空气引射流逐渐增大,会同时引起  $c_s$  的增大和  $c_s$  ( $T_s$  或  $c_A^s$ ) 的减小(见图4,其中  $(c_0^s)_0$  为无引射质量流时 Knudsen 层外缘氧原子浓度),前者使  $(\partial / \partial y)_{in}^{av}$  减小,而后者使其增大,图5中氧原子组元浓度梯度曲线随  $M_0$  增大并在  $M_0 = 0.3$  处出现峰值的变

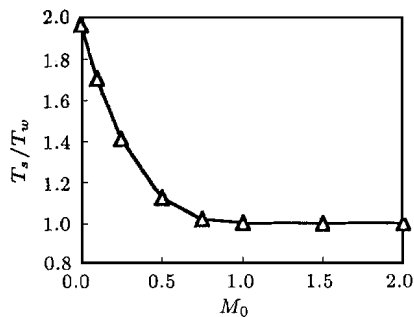


图 2 Knudsen 层外缘温度

Fig. 2 Temperature at the outer edge of the Knudsen layer

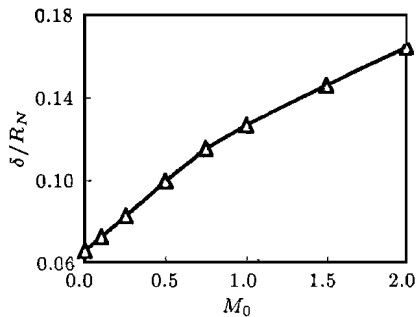


图 3 激波层厚度

Fig. 3 Thickness of the shock layer

化情况正是这两者综合作用的结果. 当引射量增大到将大梯度层完全推离壁面时, Knudsen 层外缘处的  $(\partial T / \partial y)_s$  和  $(\partial c_A / \partial y)_s$  都趋于零, 由热空气传向壁面方向的热流被壁面附近气体层全部吸收沿壁面方向流走, 壁面热流趋于零, 参见图 6, 图 7. 其中  $Q_{T0}$ ,  $Q_{c0}$  分别为无引射质量流时 Knudsen 层外缘热传导热流和扩散热流. 此后再继续加大引射流量, 只是使壁面处温度等于壁温的冷空气层厚度加大, 即大梯度层被推离壁面的距离加大,  $s = w$  保持不变.

压力和温度滑移随引射流  $M_0$  的增加而快速下降, 由气体状态方程可知, 密度也将是如此

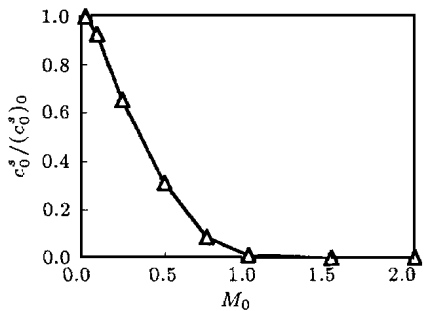


图 4 Knudsen 层外缘氧原子浓度

Fig. 4 Atomic oxygen mass fraction at the outer edge of the Knudsen layer

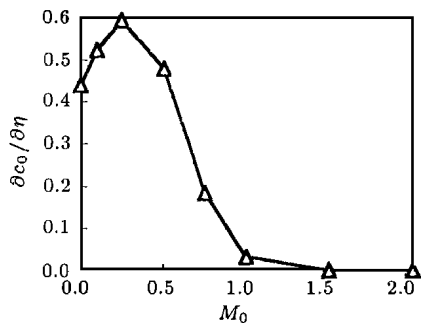


图 5 Knudsen 层外缘氧原子质量分数梯度

Fig. 5 Mass fraction gradient of the atomic oxygen at the outer edge of the Knudsen layer

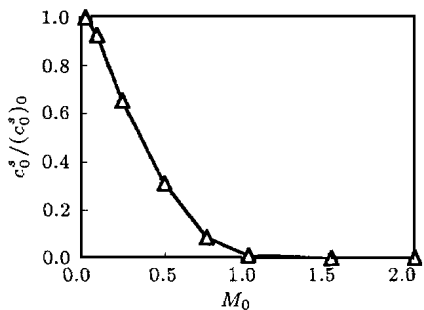


图 6 Knudsen 层外缘热传导热流

Fig. 6 Heat flux of thermal conduction at the outer edge of the Knudsen layer

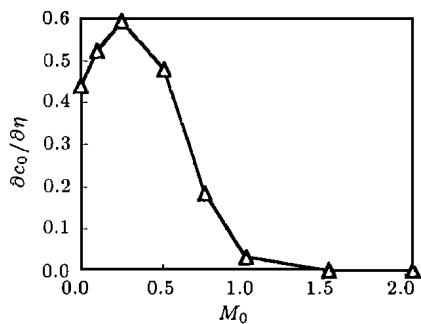


图 7 Knudsen 层外缘扩散热流

Fig. 7 Diffusion heat flux at the outer edge of the Knudsen layer

趋势,图 8 可以说明这一点.在切向滑移速度表达式(18), (19)中虽然引射速度  $v_{0y}^s$ ,  $v_{0y}^w$  并不显现,但是引射对切向滑移速度有影响,这是因为引射造成的动量交换影响速度梯度,进而影响切向滑移速度.由于驻点线上的切向速度为零,此时切向动量方程的解为切向速度的梯度,图 9 给出了引射对该梯度的影响(图中  $(\partial v_x / \partial x)_0^s$  为无引射质量流时 Knudsen 层外缘处的切向速度梯度).

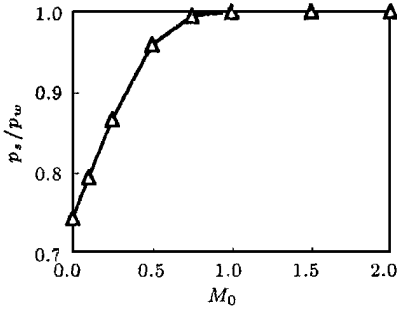


图 8 Knudsen 层外缘密度

Fig. 8 Density of mixture at the outer edge of the Knudsen layer

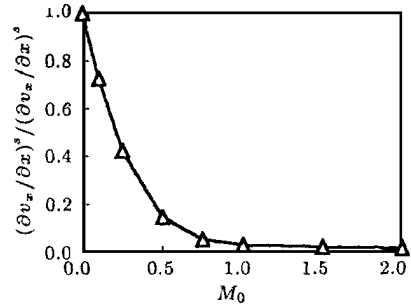


图 9 切向速度的切向梯度

Fig. 9 Tangential gradient of the tangential velocity

## 4 结 论

本文讨论了在航天工程中有诸多应用背景的壁面引射对壁面有催化反应的多组元气体滑移条件的影响.利用多组元气体 Chapman-Enskog 速度分布函数和 Knudsen 层内外边界质量、动量和能量等通量守恒关系式,首次得到了有壁面引射和催化反应的多组元气体滑移边界条件的一般形式.利用粘性激波层方程和所得到的边界条件对钝头体驻点区绕流问题进行了数值求解,结果表明了本文导出的滑移边界条件的合理性和重要性,同时看到壁面引射与壁面催化反应一样对壁面热流和壁面附近的组元浓度分布有大的影响,而且影响更显著.

## 参 考 文 献

- 1 Dorrance WH. Viscous hypersonic flow. McGraw-Hill Book Company, Inc, 1962
- 2 Scott CD. Wall boundary equations with slip and catalysis for multicomponent nonequilibrium gas flow. NASA TMX-58111, 1973
- 3 Hendricks WL. Slip conditions with wall catalysis for multicomponent nonequilibrium gas flow. NASA TMX-64942, 1974
- 4 Gupta RN, Scott CD, Moss JN. Slip-boundary equations for multicomponent nonequilibrium airflow. NASA Tech Paper 2452, 1985
- 5 Tang JR, Tao B. Wall slip-boundary equations with catalysis for multicomponent chemical nonequilibrium gas flows. In: Harvey J, Lord G, eds. Rarefied Gas Dynamics. Oxford University Press, 1995. 1093 ~ 1099

## EFFECT OF THE WALL INJECTION ON THE SLIP BOUNDARY CONDITIONS<sup>1)</sup>

Zhao Jingye      Shen Qing      Tang Jinrong

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

**Abstract** In this paper, the slip boundary conditions with wall injection are discussed. From analysis of mass, momentum and energy flux balance equations at inner and outer edges of the Knudsen layer using the Chapman-Enskog velocity distribution function, the system of slip boundary equations with wall injection and catalysis in a multicomponent gas mixture is derived in a general form. Numerical calculations are made for a hypersonic flow passing the stagnation region of a blunt body by using the Viscous Shock Layer (VSL) equations with the boundary conditions derived in the paper. The influence of the wall injection on the flow field and boundary conditions is investigated.

**Key words** slip boundary conditions, multicomponent gas mixture, catalytic wall, wall injection, rarefied gas dynamics

---

Received 24 March 1997, revised 16 February 1998.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China.