

坡面流运动方程和有支流入汇时的一维明渠流方程形式¹⁾

陈 力 刘青泉

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 从带源项的圣维南方程出发, 根据坡面流特点, 分析给出了坡面水流运动方程的基本形式; 通过基本的力学分析, 指出了通常应用于有支流入汇时的一维明渠流方程存在的问题, 并得到了新的方程形式。

关键词 圣维南方程, 源项, 坡面流, 降雨, 支流入汇

1 引言

坡面径流是由降雨强度超过土壤入渗率时在坡面上产生的一种薄层水流, 是坡地上产生土壤水蚀的主要动力。由于坡面流水深小 (仅几毫米到一二十毫米), 边界复杂, 且受雨滴打击, 其流态和阻力规律都十分复杂, 细致地描述坡面水流十分困难, 目前仍主要借用明渠流方程描述。同时, 受降雨作用, 坡面流沿程不断有质量源和动量源加入, 类似于明渠河流中有支流入汇的情况, 二者均可以采用带源项的圣维南方程描述。但过去在运用带源项的圣维南方程对两者的描述中均有值得探讨和改进的地方, 本文主要针对圣维南方程在坡面流和有支流入汇的明渠流的运用形式进行一些讨论。

2 坡面水流运动方程

对于坡面径流的数学描述, 目前一维方程仍然是较实际的选择, 也成为多方面研究的基本出发点, 带源项的圣维南方程是通常采用的形式之一。以流速 u 、水深 h 为基本变量, 带源项的非守恒型一维圣维南控制方程形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} &= q \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= g(s_0 - s_f) - \frac{q}{h}(u - v) \end{aligned} \right\} (1)$$

式中 u 为坡面流流速, h 为水深, x 为水平方向空间坐标, t 为时间, s_0 为坡面坡度, s_f 为水流能坡, q 为侧向入流的质量源强度, v 为侧向入流的速度在 x 向的分量。

将其运用到坡面流, 在过去的处理中, 一般取水平方向为 x 轴, 侧向入流的方向垂直于 x 轴, 且入渗

速度值较 u 小得多, 因此认为 v 很小而取为零。得到坡面流方程形式为^[1~4]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} &= q \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= g(s_0 - s_f) - \frac{q}{h}u \end{aligned} \right\} (2)$$

其中 q 表示降雨和入渗综合结果, 即雨强与渗透率的差值

$$q = p - i \quad (3)$$

式中 p 为降雨强度 (m/s), i 为土壤入渗率 (m/s)。

对于坡度较小的情况, 将空间坐标方向取为水平方向与取为沿坡面向下方向差别不大, 并且此时降雨方向近似垂直于坡面, 入流流速也可以忽略, 上述方程可以较好地描述坡面流运动。对于坡度较大的坡面 (譬如在黄土高原地区二三十度的陡坡广泛分布), 水深 h 必须定义为垂直于坡面, 此时空间坐标应选择沿坡面向下的方向为 x 轴, 且降雨方向不垂直于坡面 (x 轴), 则上述方程组将难以较好地描述坡面流运动。对这种陡坡情况, 取沿坡面向下为 x 轴方向, 其坡面流运动方程可推导如下。

先推导连续方程。设坡面倾角为 θ , 取单位宽度的柱形单元 (图 1), 在 dt 时段内流入微元体的流体质量为 $\rho u h dt$, 流出的流体质量为 $\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right) dt$, 其中 ρ 为流体密度 (kg/m^3), u 为 x 向流速 (m/s), h 为垂直于 x 轴的水深 (m)。设降雨由铅直方向进入微元体, 其强度为 p (m/s), 考虑雨水均

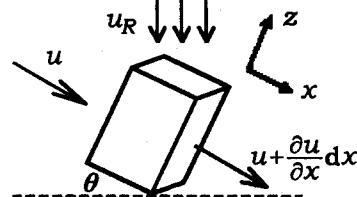


图 1 坐标示意图

1) 国家自然科学基金重点项目 (19832060) 资助。

本文于 2000-11-22 收到。

匀分布在整个坡面上, dt 时段内进入微元体的雨水的
质量通量应为

$$\rho p \cdot ds \cdot dt = \rho \left(p_x + p_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dt =$$

$$\rho (p \cos \theta + p \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x}) dx dt$$

ds 为微元体顶部面积矢量; p 为雨强矢量; p_x, p_x
为其在相应坐标轴上的投影. 由于 $\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$, 第二
项可以略去. 如果考虑向地下的入渗, 还须减去入渗
量 $i dx dy dt$, i 为入渗率 (m/s). 此处质量源强度是
 $\rho(p \cos \theta - i)$, 而非 $\rho(p - i)$. dt 内微元体的质量增
量为 $\rho \frac{\partial h}{\partial t} dt dx$. 由质量守恒原理, 有

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} dt dx = \rho u h dt - \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \cdot$$

$$\left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right) dt + \rho (p \cos \theta - i) dx dt \quad (4)$$

略去二阶小量, 整理得

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u h}{\partial x} = p \cos \theta - i \quad (5)$$

再推导动量方程. dt 时段内在 x 方向流入微
元体的动量为 $\rho u h dt \cdot u = \rho u^2 h dt$; 流出微元体的
动量为 $\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right) dt$; 由于动量输
入的速率与质量输入的速率不相等, 即雨水进入单元
体的速度是雨滴速度 u_R (m/s), 而非降雨强度 p ,
 u_R 一般较 p 大 5 个量级; 则降雨带入微元体的动
量为 $\rho p \cos \theta dx dt \cdot u_R \sin \theta$; 微元内的动量增量为
 $\frac{\partial (\rho h dx \cdot u)}{\partial t} dt = \rho \frac{\partial u h}{\partial t} dx dt$.

分析 x 方向微元所受外力, 重力为 $\rho g \sin \theta \cdot h \cdot$
 dx , 底部摩擦力为 $\rho g h s_f \cdot dx dy$, 断面总压力为
 $\int_0^h \rho g \cos \theta \cdot z dz \cdot dy = \frac{\rho g h^2 \cos \theta}{2} dy$, 由此得微元
体上下游断面压力差为

$$\frac{\rho g h^2 \cos \theta}{2} - \frac{\rho g \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right)^2 \cos \theta}{2} =$$

$$-\rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} dx$$

微元体内动量的增量等于外部动量的净输入量与外力
冲量之和, 即

$$\rho \frac{\partial u h}{\partial t} dx dt = \rho u^2 h dt - \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 \cdot$$

$$\left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right) dt + \rho p \cos \theta dx dt \cdot u_R \sin \theta -$$

$$\rho g \cos \theta \cdot h \cdot dx dt + \rho g \sin \theta \cdot h \cdot dx dt -$$

$$\rho g h s_f \cdot dx dt \quad (6)$$

整理后得

$$\frac{\partial u h}{\partial t} + h \frac{\partial u^2}{\partial x} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + g h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} =$$

$$g h \sin \theta - g h s_f + p \cos \theta \cdot u_R \sin \theta \quad (7)$$

即

$$\frac{\partial u h}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + g h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} =$$

$$g h \sin \theta - g h s_f + p \cos \theta \cdot u_R \sin \theta \quad (8)$$

式(4)、式(8)即为陡坡情况下, 以坡面向下方向为 x
轴方向的守恒型坡面流方程. 进而可以得到它的非守
恒形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u h}{\partial x} &= p \cos \theta - i \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} &= \\ g(s_0 - s_f) - \frac{p \cos \theta (u - u_R \sin \theta) - i}{h} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

可见, 在陡坡情况下, 连续方程的源项, 以及动量方程
均与原方程有所差异.

3 有支流入汇的一维河渠水流方程

对于任意断面非棱柱形渠道, 在有支流入汇的情
况下, 目前常用的水流运动方程形式为^[5~7]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_L \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) &= -gA \left(\frac{\partial z}{\partial x} + s_f \right) - \frac{q_L Q}{A} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 A 为过水断面面积, Q 为流量, q_L 为旁侧入流
的单宽流量, z 为水面高程, s_f 为能坡. 显然这也是
带源项圣维南方程的一种守恒形式, 且该方程组似乎
是从带源项的圣维南方程组(1)直接搬过来的. 事
事实上, 方程组(1)是一种非守恒形式, 而方程组(10)
是一种守恒形式, 是难以直接搬用的.

由方程组(1)可以得到守恒型的带源项的圣维南
方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u h}{\partial x} &= q \\ \frac{\partial u h}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + g h \frac{\partial h}{\partial x} &= g h (s_0 - s_f) + q v \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

可见, 在守恒型方程中, 动量方程的右边最后
一项与主流无关. 因此方程组(10)显然是不准确的. 同
时, 方程组(10)没有考虑入汇支流与主流非垂直正交

的情况，对于更一般的支流与主流斜交情况，可以对其水流运动方程形式做如下分析。

如图 2，设支流与主流交角为 θ ，主流流量为 Q ，过水面积为 A ，支流单宽流量为 q_L 。在交汇河段处取长度为 dx 的单元体，重复前述的推导过程。

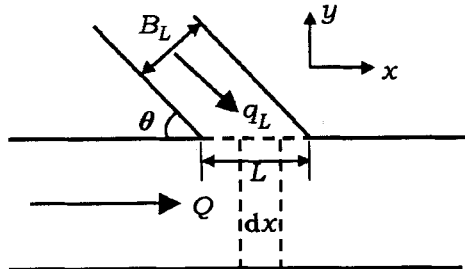


图 2 有支流入汇的明渠流示意图

dt 时间内上游侧流入单元体的质量为 Qdt ，从下游侧流出单元体的质量为 $(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx)dt$ ，单元体内质量增量为 $\frac{\partial A}{\partial t} dt$ ，侧向入流量为 $q_L \sin \theta$ ，由质量守恒可推得连续方程为

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L \sin \theta \quad (12)$$

在交汇河段以外的断面， $q_L = 0$ ，方程形式与通常的连续方程无异。若入汇河段总宽度为 L ，则支流入汇流量为 $q_L \sin \theta \cdot L$ 。若支流宽度为 B_L ， $B_L = L \sin \theta$ ，支流流量为 $Q_L = q_L \cdot B_L = q_L \sin \theta \cdot L$ ，即侧向入流的流量就是支流流量，但方程中必须考虑入流的方向。

dt 时间内上游侧流入单元体的动量为 $Q \cdot \frac{Q}{A} dt$ ，下游侧流出单元体的动量为 $(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx)^2 dt / (A + \frac{\partial A}{\partial x} dx)$ ，单元体中动量增量为 $\frac{\partial (A dx \cdot Q/A)}{\partial t} dt$ ，重力顺流分量和压力（包括侧向压力）的综合结果可表示为 $-gA \frac{\partial z_s}{\partial x}$ （参见文献 [6]），其中 z_s 为水面高程，阻力为 $-gA s_f$ ，侧向入流动量输入为 $-q_L \sin \theta dx dt \frac{q_L}{h_L} \cos \theta$ 。由动量守恒可推得运动方程为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -gA \left(\frac{\partial z_s}{\partial x} + s_f \right) + q_L \sin \theta \cdot \frac{q_L}{h_L} \cos \theta \quad (13)$$

可见最后一项与主流无关，该项的改变对于方程的影响将不可忽略。实际计算中还需注意，如果空间步长超过入汇河段长度，离散方程中入汇项的空间步长值不应该是 dx ，而是入汇段长度 L 。若入汇河段被划分入若干网格中，则应相应考虑每个网格中的入汇长度。

4 结 论

(1) 对于陡坡情况，降雨方向与坡面不垂直且有较大的斜角，应充分考虑实际单位面积降雨强度的变化，以及对坡面流动量汇入项的变化。根据陡坡坡面流的这些特点，从带源项的圣维南方程出发，分析给出了坡面水流运动方程的基本形式。

(2) 通过基本的力学分析，指出了通常应用于有支流入汇时的一维河渠流方程存在的问题，并得到了新的方程形式。

参 考 文 献

- 1 Woolhiser D A, Liggett J A. Unsteady, one dimensional flow over a plane—the rising hydrograph. *Water Resour Res*, 1967, 13(3): 753~771
- 2 Liggett J A, Woolhiser D A. Difference solution of the shallow water equation. *J Engr Mechs Div, ASCE*, 1967, 93(EM2): 39~71
- 3 Freeze R A. Mathematical models of hillslope hydrology. In: Kirkby M J ed. *Hillslope Hydrology*. New York: Wiley Interscience, 1978. 177~225
- 4 戚隆溪, 黄兴法. 坡面降雨径流和土壤侵蚀的数值模拟. *力学学报*, 1997, 29(3): 343~347
- 5 Mahmood K, Yevjevich V 编. 林秉南等译校. 明渠非恒定流 (第 1 卷). 北京: 水利电力出版社, 1987
- 6 杨国录. 河流数学模型. 北京: 海洋出版社, 1993
- 7 谭维炎. 计算浅水动力学. 北京: 清华大学出版社, 1998

ON THE EQUATIONS OF OVERLAND FLOW AND ONE DIMENSIONAL EQUATIONS FOR OPEN CHANNEL FLOW WITH LATERAL INFLOW

CHEN Li LIU Qingquan

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract Based on the St. Venant equations with source terms, the movement of overland flow was analyzed and a more general form of governing equations for it was established. Furthermore, it is also pointed out that the generally used one dimensional equations for open channel flow with lateral inflow are not suitable for some applications, and a revised form of these equations was presented.

Key words overland flow, precipitation, source item, St. Venant equations, lateral inflow