

不依赖数据库的最优动力系统建模理论 及其应用¹⁾

吴锤结^{*,†} 赵红亮[†]

^{*}(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

[†](解放军理工大学理学院流体力学研究中心, 南京 211101)

摘要 在 Wu 提出的流动数据库分析及建立低维动力系统的优化理论基础上, 进一步提出不依赖于数据库、直接由偏微分方程构造最优低维动力系统的方法. 以二维热对流问题为例求得五维最优低维动力系统, 研究其动力学特性, 并与 Lorenz 模型进行比较. 结果表明: 该方法无需依赖数据库即可提取真实反映复杂流动动力学特征的最优基, 建立在最优基之上的动力系统更充分地描述了问题的复杂动力学行为, 并揭示了一些新的动力学特征.

关键词 最优化, 偏微分方程, 动力系统, Lorenz 系统

前 言

为了解流动随参数(如 Re 数等)的变化规律, 可采用的有效途径之一就是无限维的偏微分方程系统降维到有限维的常微分方程系统中, 并在有限维系统中保留原系统的绝大多数主要特征不变. 客观地认识和分析湍流拟序结构, 应用动力系统理论研究湍流低维模型的动力特性, 认识其极为复杂的非线性动力学行为以及它与时、空混沌之间的联系, 在理论上具有极为重要的意义.

最近, Wu^[1~3] 提出了流动数据库分析及建立低维动力系统的优化理论, 为深入认识湍流的物理实质和数学规律提供了一条有效途径. 本文进一步提出不依赖于已知数据库、直接由偏微分方程构造最优低维动力系统的方法, 并对所得最优低维动力系统进行动力学特性分析.

1 无数据库最优低维动力系统建模理论

1.1 一般理论框架

为简便起见, 仅在实空间中讨论, 这一理论亦可推广到复空间中去. 设系统变量 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 满足某一偏微分方程定解问题. 将 \mathbf{u} 在正交基 ξ 上作有限截断线性分解

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t)\xi_i(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_R(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.1)$$

其中, $\mathbf{u}_R(\mathbf{x}, t)$ 表示余项. 对基 $\xi_i(\mathbf{x})$ 而言, 除了满足正交性外, 还应满足一定的光滑性条件和初始、边界条件等约束条件. 我们将 $\xi_i(\mathbf{x})$ 的取值函数空间定义为 B_N . 记研究目的为一状态关系式

$$\mathcal{F}(a_i(t), \xi_i(\mathbf{x})) = 0 \quad (1.1.2)$$

1999-10-21 收到第一稿, 2000-11-16 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(19472077), 中国科学院力学所非线性力学国家重点实验室和北京大学湍流研究国家重点实验室资助项目.

称 \mathcal{F} 为目标选择函数. 依问题的特点及分析的侧重点, 提出合理的最优条件 $J(a_i(t), \xi_i(x))$.

这样, 流动数据库分析及建立低维动力系统的最优理论就统一地归结为如下数学问题, 即: 求 $\xi_i^*(x) \in B_N$, 使得

$$J(\xi_i^*(x)) = \min_{\xi_i(x) \in B_N, \mathcal{F}(a_i, \xi_i)=0} J(\xi_i(x)) \tag{1.1.3}$$

运用变分法, 即可求出 a_i 与最优基 ξ_i^* .

这里, 必须着重指出, 在研究过程中一定要遵守一致性原则, 即: 所提最优条件必须与研究对象相一致. 另外, 研究对象不同时, \mathcal{F} 亦不同. 比如, 以最优提取数据集的特征为研究目的时, 则式 (1.1.2) 的 \mathcal{F} 为

$$\mathcal{F}: a_i(t) = (u, \xi_i) \tag{1.1.4}$$

这里, $(,)$ 为 L^2 上的内积. 若欲建立最优低维动力系统, 则

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_k(t) &= F_k(a_k; \xi_1, \dots, \xi_N; \nabla \xi_1, \dots, \nabla \xi_N) \\ a_k(0) &= \int_{\Omega} u_0 \cdot \xi_k d\Omega \end{aligned} \right\} \tag{1.1.5}$$

其中, “ \cdot ” 为对时间 t 的求导, u_0 为初始场.

最后, 应该看到, 必须根据所研究问题的特点和分析重点来决定最优条件和系统变量的形式. 系统变量可以是速度、涡量或其他任何合适的标量、矢量、张量以及它们间的某种组合. J 可以是全局时、空条件亦可是局部时、空条件, 或全局与局部相结合的条件.

1.2 无数据库最优低维动力系统的建模理论

下面, 在上述一般理论框架下建立无需数据库的最优低维动力系统建模理论.

该理论的基本思想是: 首先, 将系统变量近似表示为 $u \approx \sum_{k=1}^N a_k(t)\xi_k(x)$, 这里, a_k 与 ξ_k 均为依赖于具体问题的未知函数; 将所研究的偏微分方程在这组基上进行 Galerkin 投影, 得到所对应的低维动力系统, 而 $a_k(t)$ 是其解. 应用最优控制的思想求出满足最优条件的最优正交基 ξ_k . 求解对应的低维动力系统, 即可全面地了解这一系统随控制参数 (如 Reynolds 数等) 变化的动力学特性.

由于事先不知道真解, 因此必须根据研究重点的需要, 分别对初始条件和整体性态提出不同的要求. 最优条件与系统变量的选取原则是: 选取最能反映问题特征的条件和变量作为最优条件和系统变量, 并且所提最优条件必须针对动力系统, 而不是针对数据集.

为了得到所求最优低维动力系统, 要求最优条件泛函 J^*

$$J^*(\xi_1, \dots, \xi_N) \triangleq \int_0^T (u_R, u_R) dt, \mathcal{T} \text{ 固定} \tag{1.2.1}$$

使得

$$J^*(\xi_k^*) = \min_{\xi_k \in B_N} J^*(\xi_k) \tag{1.2.2}$$

但因真解未知, u_R 亦未知. 为此, 在 u_R 较小的前题下, 引进非负参数 ρ 以使得研究者可依研究重点, 以不同的精度逼近初始条件. 这样 J^* 可近似地由 $J(\rho; \xi_1, \dots, \xi_N)$ 取代,

$$J(\rho; \xi_1, \dots, \xi_N) \triangleq \int_0^T \left[(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \sum_{k=1}^N a_k^2 \right] dt + \rho \left(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) - \sum_{k=1}^N a_k(0) \xi_k, \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) - \sum_{k=1}^N a_k(0) \xi_k \right), \quad T \text{ 固定} \quad (1.2.3)$$

其中, ρ 为一非负参数. 这样, 求解最优低维动力系统的问题归结为: 首先, 对固定的 ρ , 求 $(\xi_1^*(\rho), \dots, \xi_N^*(\rho)) \in \mathcal{B}_N$, 使得

$$J(\xi_1^*(\rho), \dots, \xi_N^*(\rho)) = \min_{(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathcal{B}_N} J(\xi_1, \dots, \xi_N) \quad (1.2.4)$$

且 α 满足式 (1.1.5). 同时, 对分别控制整体特性与初始条件的逼近精度的 ε_1 和 ε_2 , 搜索 $\rho^* \geq 0$, 使得

$$\left| 1 - \frac{\int_0^T [a_k^*|_{\rho=\rho^*}]^2 dt}{\int_0^T [a_k|_{\rho=0}]^2 dt} \right| \leq \varepsilon_1 \quad (1.2.5)$$

和

$$1 - \frac{\int_0^T [a_k^*(0)|_{\rho=\rho^*}]^2 dt}{(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0), \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0))} \leq \varepsilon_2 \quad (1.2.6)$$

在最优条件泛函 J 中应用 Lagrange 乘子法考虑系统的约束, 而用罚函数法体现基的正交性要求, 从而得到增广最优条件泛函 J^g ; 对 J^g 求变分, 应用适当的数值方法求解所得变分方程, 并对参数 ρ 进行一维搜索, 得到在所有给定条件和逼近精度下的最优基 ξ_k^* , 将其代入式 (1.1.5) 即可得所求最优低维动力系统.

2 在 Lorenz 系统分析中的应用

2.1 二维热对流的基本方程 —— Lorenz 系统

由二维 Boussinesq 方程可导出 Lorenz 系统为^[4]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} + \mathcal{J}(\Psi, \nabla^2 \Psi) - Pr(1 + a^2) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{Pr}{1 + a^2} \nabla^4 \Psi &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{J}(\Psi, T) - Ra \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{1 + a^2} \nabla^2 T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

其中, T 为流体温度, Ra 为 Rayleigh 数, Pr 为 Prandtl 数, a 为几何比例因子, \mathcal{J} 为 Jacobi 矩阵, Ψ 为无量纲流函数. 几何边界为 $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \pi$ 的长方形区域. 物理边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \Psi(0, z) = \Psi(2\pi, z) = \Psi(x, 0) = \Psi(x, \pi) &= 0 \\ \nabla^2 \Psi(0, z) = \nabla^2 \Psi(2\pi, z) = \nabla^2 \Psi(x, 0) = \nabla^2 \Psi(x, \pi) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, z) = \frac{\partial T}{\partial x}(2\pi, z) = T(x, 0) = T(x, \pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

2.2 Lorenz 系统在最优基上的 Galerkin 投影

令

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \Psi_N + \Psi_R \doteq \sum_{k=1}^N a_k(t)\xi_k(x, z) \\ T &= T_N + T_R \doteq \sum_{k=1}^M b_k(t)\zeta_k(x, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

其中, Ψ_R 和 T_R 为余项, ξ_k 和 ζ_k 为最优正交基, 且满足正交性条件

$$\left. \begin{aligned} (\xi_k, \xi_l) &= \delta_{kl} \\ (\zeta_k, \zeta_l) &= \delta_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

将 Lorenz 系统 (2.1.1) 在 ξ_k 和 ζ_k 上进行 Galerkin 投影, 并考虑到边界条件 (2.1.2), 得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l=1}^N \dot{a}_l A_{kl} &= \sum_{l,m=1}^N a_l a_m B_{klm} + Pr(1+a^2) \sum_{l=1}^M b_l C_{kl} + \frac{Pr}{1+a^2} \sum_{l=1}^N a_l D_{kl} = Q_k^{(1)} \\ \dot{S}b_k &= \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^M a_l b_m E_{klm} + Ra \sum_{l=1}^N a_l F_{kl} + \frac{1}{1+a^2} \sum_{l=1}^M b_l G_{kl} = Q_k^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

其中各系数的具体形式如下

$$\left. \begin{aligned} A_{kl} &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} a^2 + \frac{\partial \xi_l}{\partial z} \frac{\partial \xi_k}{\partial z} \right) d\Omega \\ B_{klm} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial^2 \xi_m}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial z} \frac{\partial \xi_l}{\partial x} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \frac{\partial \xi_l}{\partial z} \right) d\Omega \\ C_{kl} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \zeta_l}{\partial x} \xi_k d\Omega \\ D_{kl} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial z^2} \right) d\Omega \\ E_{klm} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \xi_l}{\partial z} \frac{\partial \zeta_m}{\partial x} - \frac{\partial \xi_l}{\partial x} \frac{\partial \zeta_m}{\partial z} \right) \zeta_k d\Omega \\ F_{kl} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \xi_l}{\partial x} \zeta_k d\Omega \\ G_{kl} &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \zeta_l}{\partial x} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x} a^2 + \frac{\partial \zeta_l}{\partial z} \frac{\partial \zeta_k}{\partial z} \right) d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

2.3 Lorenz 系统的最优条件泛函 J 及增广最优条件泛函 J^g

定义最优条件泛函 J 为

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T (\Psi_R, \Psi_R) dt + \int_0^T (T_R, T_R) dt = \\ &= \int_0^T [(\Psi_N, \Psi_N) - 2(\Psi, \Psi_N) + (T_M, T_M) - 2(T, T_M)] dt \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Ψ 与 T 为待求函数, 要求最优条件泛函 J 以逼近初始状态为目标, 即,

$$J = \sum_{k=1}^N (-2a_k(0)(\Psi(0), \xi_k) + a_k^2(0)) + \sum_{k=1}^M (-2b_k(0)(T(0), \zeta_k) + b_k^2(0)) \quad (2.3.2)$$

这里, 采用 Lagrange 乘子法考虑动力系统 (2.2.3) 的约束; 采用罚函数法考虑基函数的正交性条件 (2.2.2). 为此, 定义增广最优条件泛函 J^g 为

$$J^g = J + \int_0^T \sum_{k=1}^N \lambda_k(t) \left(Q_k^{(1)} - \sum_{j=1}^N A_{kj} \dot{a}_j \right) dt + \int_0^T \sum_{k=1}^M \eta_k(t) (Q_k^{(2)} - \dot{b}_k) dt + \mu_1 \sum_{k,l=1, k \leq l}^N [(\xi_k, \xi_l) - \delta_{kl}]^2 + \mu_2 \sum_{k,l=1, k \leq l}^M [(\zeta_k, \zeta_l) - \delta_{kl}]^2 \quad (2.3.3)$$

其中, μ_1, μ_2 为罚因子, $\lambda_k(t), \eta_k(t)$ 为 Lagrange 乘子, $Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}$ 分别满足式 (2.2.3) 中的两个方程. 为了求得最优基 ξ_k 和 ζ_k , 令 J^g 的变分等于零. 由变分基本原理, 令 $\delta a_k, \delta b_k, \delta \xi_k$ 和 $\delta \zeta_k$ 的系数项等于零, 得到一组常微分方程组 (受篇幅所限, 略去). 得到最优基 ξ_k 和 ζ_k 之后, 利用 (2.2.4) 求得方程 (2.2.3) 中的各项系数, 就可以构造出基于最优基的最优低维动力系统.

2.4 最优基计算结果

采用共轭梯度法数值求解上述问题. 在计算中, 交替地寻求满足上述方程的最优基 ξ_k 和 ζ_k .

2.4.1 初始场与迭代初始基

迭代初始基的选取应遵循两条原则: (1) 初始基必须满足边界条件. (2) 迭代初始基所包含的最高频率要大于或等于初始场所包含的最高频率.

为了验证本方法的正确性, 首先用 Lorenz^[5] 推导三维 Lorenz 动力系统所用的初始场与初始基 (它们满足以上两条原则) 进行试算. 由于这些基就是该系统的解, 所以我们的结果与之完全一致. 再取更为一般的初始场与迭代初始基进行计算, 结果表明本方法的有效性. 令 Rayleigh 数等于 28.0, Prandtl 数取 10.0, 几何尺寸比例因子为 1.5. 分别采用 2 个和 3 个最优基描述 Lorenz 系统的流函数场和温度场, 从而得到 5 维最优动力系统. 取初始场与迭代初始基分别为

$$\left. \begin{aligned} \Psi(0) &= 2 \sin x \sin z \\ T(0) &= 2 \cos x \sin z \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{2} \sin(mx) \sin z \\ \xi_2 &= \sqrt{2} \cos(mx) \sin z \\ \zeta_1 &= \sqrt{2} \cos(mx) \sin z \\ \zeta_2 &= \sqrt{2} \sin(mx) \sin z \\ \zeta_3 &= \sqrt{2} \sin(2z) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

2.4.2 计算结果分析

求解最优基 ξ_k 时, 采用上述参数、初始场和迭代初始基, 基的正交性精度和迭代收敛精度控制均为小于等于 10^{-7} . 所得结果如图 1, 图 2 所示. 由计算结果可见: 第一, 在这个算例中,

初始场与给定迭代初始基之间没有直接联系. 通过采用本文理论, 找到了适合具体问题的最优基. 它能够很好地反映问题的自身特征; 第二, 图 2 的结果说明了本方法对迭代初始基的选取不敏感, 并且可以很好地实现最优条件泛函的目标.

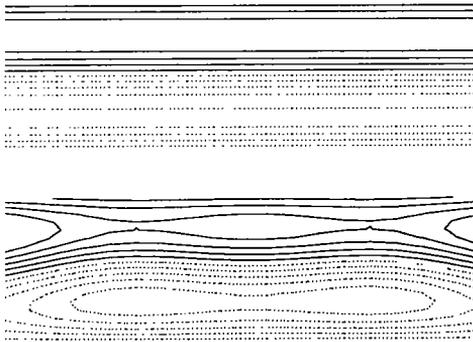


图 1 ζ_3 的初始形式和迭代后形式比较
 上图为初始形式, 下图为收敛后的形式

Fig.1 Comparison of the initial and converged forms of ζ_3 . Up: initial; Low: converged

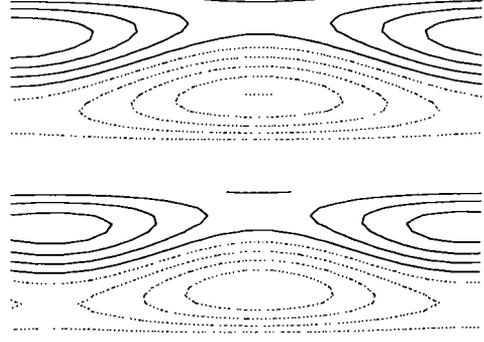


图 2 $T(0)$ 的精确解与迭代后的收敛解比较
 上图为精确解, 下图为收敛解

Fig.2 Comparison of the exact and converged solutions of $T(0)$. Up: exact; Low: converged.

2.5 Lorenz 最优低维动力系统动力学特性分析

2.5.1 动力系统相空间运动轨道

为了与经典的三维 Lorenz 系统的结果进行比较, 取 $Ra = 28.0, a = 1.5, Pr = 10.0$. 图 3, 图 4 分别为三维 Lorenz 系统和五维 Lorenz 最优低维系统的相空间轨道. 从图中看出三维系统与五维系统之间存在某种对应关系, 如 $X \sim a_2, Y \sim b_2$ 及 $Z \sim b_3$. 从而可知在五维系统中, a_2, b_2 及 b_3 主导系统的基本特性, 而 a_1 与 b_1 则进一步提供了三维系统所不具备的复杂特性. 从图 3, 图 4 亦可见, 在 X 与 a_2 之间存在镜像关系.

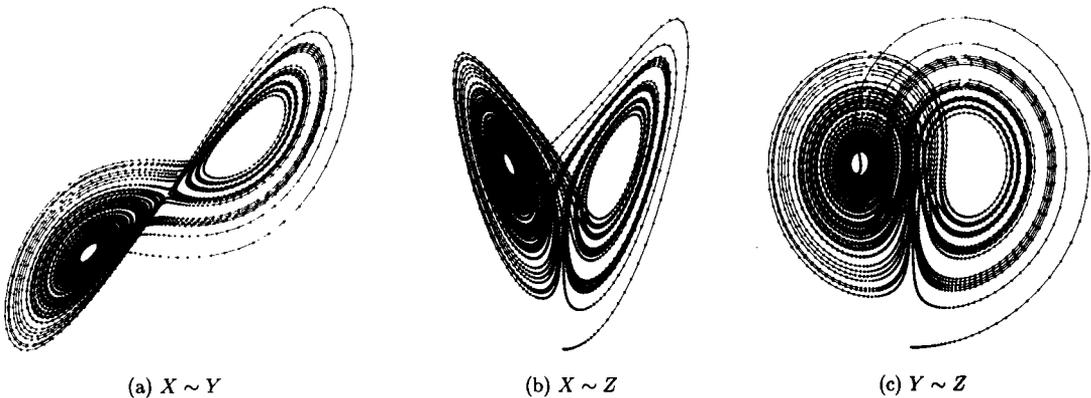


图 3 Lorenz 系统相轨道图

Fig.3 The phase trajectories of Lorenz system

必须强调指出: 第一, 五维系统中的最优基函数不是简单地由三维系统的基函数叠加上另外两维而得到的, 即: 它们之间不存在线性叠加关系; 第二, 最优基可视为由多个 Fourier 基叠加而成的, 所以基于最优基的五维动力系统所包含的系统信息远比基于 Fourier 基的五维动力

系统多得多. 因此, 上述对应关系并不是严格的. 五维 Lorenz 最优动力系统揭示了高维动力系统极为复杂的动力学特性.

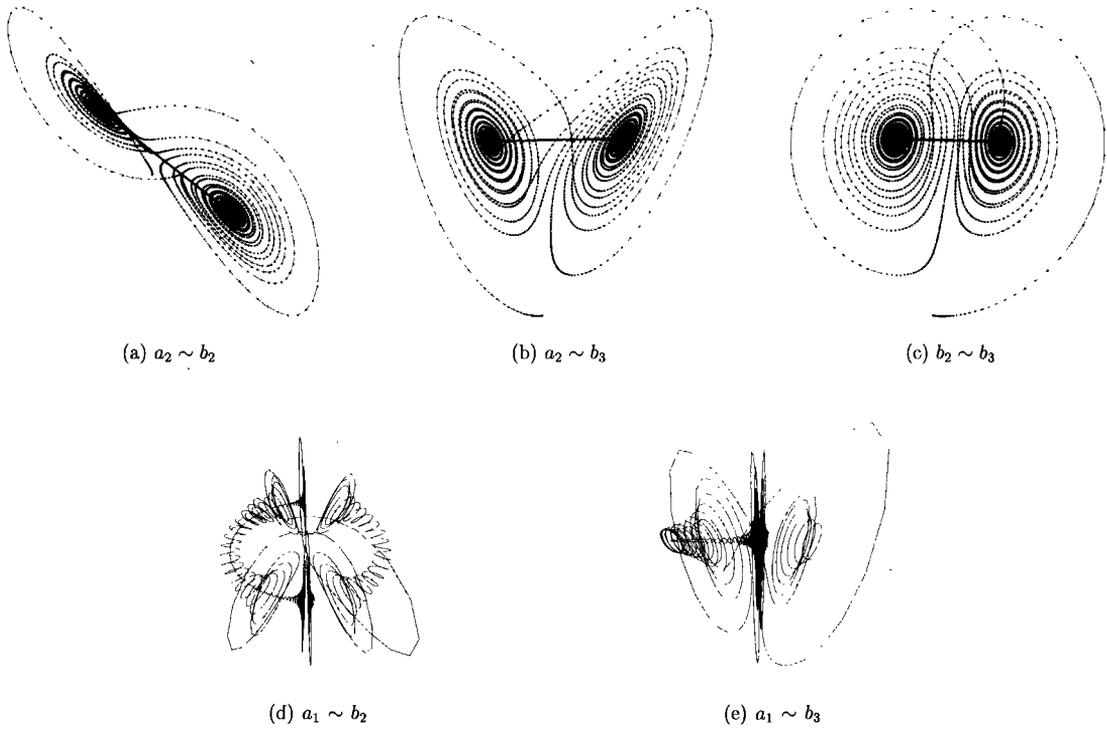


图 4 五维 Lorenz 最优低维系统相轨道图

Fig.4 The phase trajectories of 5D Lorenz optimal low dimensional dynamical system

2.5.2 Poincaré 截面

Poincaré 截面使得连续的“流”降为低维的离散映象. 图 5 给出 a_2, b_2 的相空间轨道从 $a_1 < 0$ 的空间经过 $a_1 = 0$ 平面的 Poincaré 截面, 它是五维吸引子在二维平面上的投影. 为了考察系统更加本质的特性, 将相空间轨道用两个约束条件截取, 即取 b_2, b_3 同时经过 $b_1 = -0.2$ 和 $a_1 = 0$ 的 Poincaré 截面, 它与三维 Lorenz 系统中出现的帐篷映射^[5] 极为类似 (见图 6), 它在本质上也是帐篷映射. 由于帐篷映射是混沌的, 所以在五维系统中亦存在混沌. 有趣的是, 图 6 中的帐篷映射与 Lorenz^[5] 得到的帐篷映射之间也存在着镜像关系.



图 5 Poincaré 截面
Fig.5 The Poincaré section

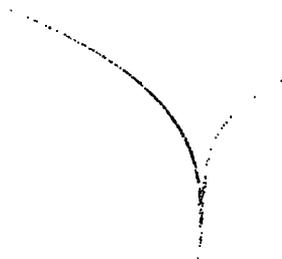


图 6 帐篷映射
Fig.6 The tent projection

2.5.3 功率谱分析

对所得最优动力系统的时间序列信号进行功率谱分析. 取无量纲计算时间 $50 \sim 1050$ 中的时序信号, 步长为 0.01 , 共计 $N = 10^5$ 个点. 图中横坐标为频率 ω , 纵坐标为对数功率谱 $\log P_\omega$. 为了对比, 在图 7 给出了三维 Lorenz 系统在参数取 $Ra = 28.0, a = 1.5, Pr = 10.0$ 时的功率谱图. 从图中看出, Z 的主频出现在 0.12 附近. 五维最优动力系统的功率谱图如图 8 所示. b_3 在 0.14 附近出现主频, 且有噪声背景, 这说明系统是混沌的.

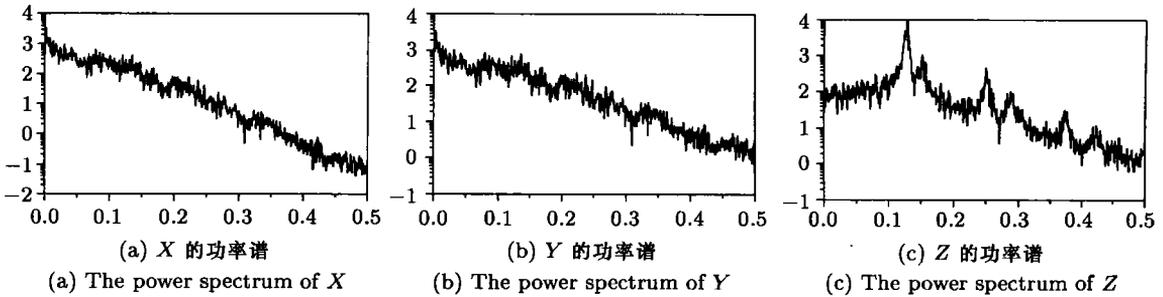


图 7 三维 Lorenz 系统轨道的功率谱
Fig.7 The power spectrum of 3D Lorenz system

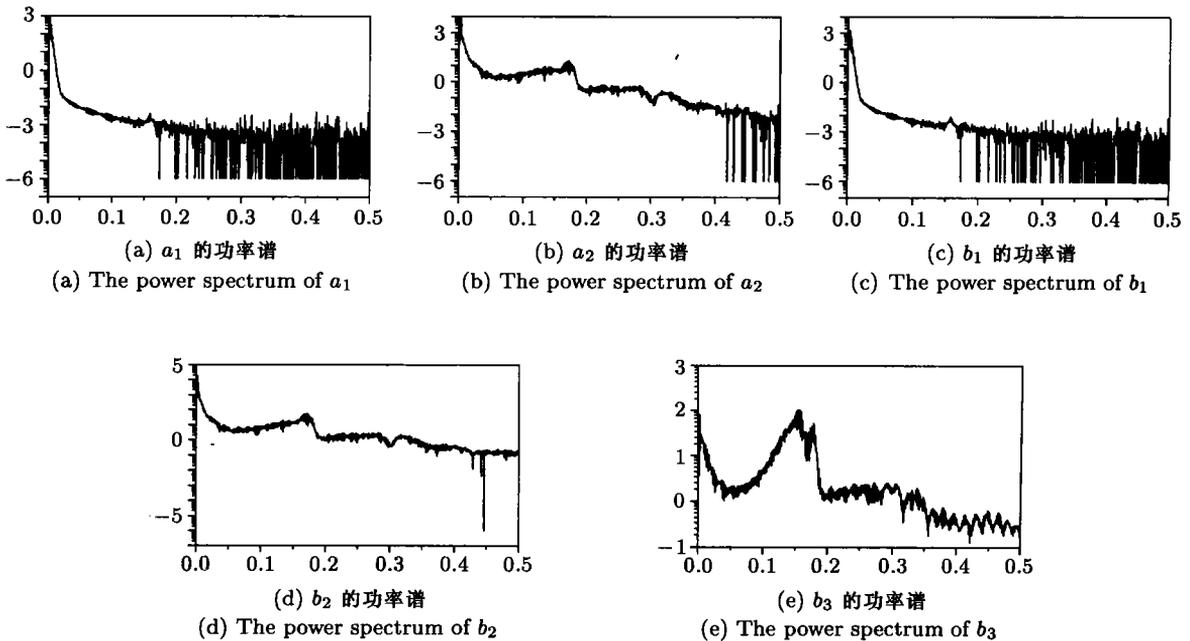


图 8 五维 Lorenz 最优低维系统轨道的功率谱
Fig.8 The power spectrum of 5D optimal low dimensional Lorenz system

2.5.4 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数是衡量一个系统可预报性的定量指标. 在高维系统中, 正的 Lyapunov 指数越多则越混沌. Lyapunov 指数 ($\lambda_i = 1 \dots k$) 可定义为

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\{ \text{eig} \left[\prod_{p=0}^n \mathcal{J}(p) \right] \right\} \quad (2.5.3)$$

这里 \mathcal{J} 是系统的 Jacobi 行列式, k 是系统维数. 从系统的 Jacobi 矩阵的迹, 容易验证三维 Lorenz 系统和五维最优低维系统均是耗散系统.

首先对三维 Lorenz 系统进行分析, 结果如图 9 所示. 图中横坐标为时间, 纵坐标为 Lyapunov 指数值. 三个 Lyapunov 指数中一个为正, 一个为负, 一个为零. 故该系统是混沌的. 图 10 为对五维系统进行分析的结果. 五个 Lyapunov 指数中二个为正, 分别为 0.0064 和 0.0025; 二个为负, 分别为 -0.0024 和 -0.013; 一个为零. 与三维系统相比较, 图 10 更细致地描述了系统的定量特性.

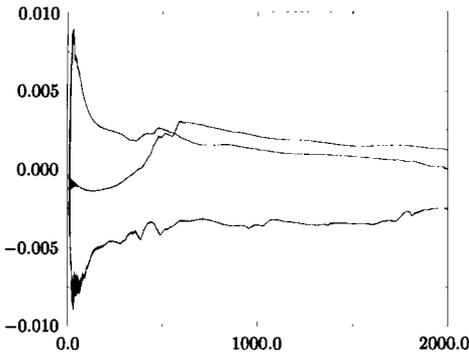


图 9 三维系统 Lyapunov 指数集演化情况
Fig.9 The evolution of Lyapunov index
of 3D system

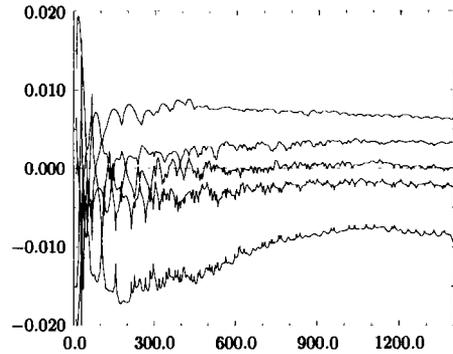


图 10 五维系统 Lyapunov 指数集演化情况
Fig.10 The evolution of Lyapunov index
of 5D system

2.5.5 不动点和流形分析

当 $Ra = 28.0$, $Pr = 10.0$, $a = 1.5$ 时, 三维 Lorenz 系统中三个不动点, 它们在相空间中的位置为 $(-8.485, -8.485, 27.0)$, $(8.485, 8.485, 27)$, $(0, 0, 0)$. 对应的特征值为 $(-13.85, 0.09 + 10.2i, 0.09 - 10.2i)$, $(-13.85, 0.09 + 10.2i, 0.09 - 10.2i)$, $(-20.8, 11.8, -2.6)$. 由特征值看出这三个不动点均为鞍点 (前两个为鞍 - 结点).

五维 Lorenz 最优低维系统在同样参数下也有三个不动点, 它们在相空间中的坐标为 $(0.02, -3.74, 0.03, 8.05, 19.23)$, $(-0.001, 4.869, 0.01, -3.95, 19.56)$, $(0, 0, 0, 0, 0)$. 对应的特征值为 $(-0.44 + 10.2i, -0.44 - 10.2i, -15.9, 0.34, -17.3)$, $(-15.3, -0.15, -17.95, 0.48 + 11.42i, 0.47 - 11.45i)$, $(-29.8, -28.7, 14.2, 13.63, -2.6)$. 由此可看出这三个不动点也为鞍点, 但它们的位置不再对称.

研究稳定流形和不稳定流形是分析动力系统的一种重要手段. 作为比较, 图 11 和图 13 给出经典三维 Lorenz 系统在相空间中的稳定流形与不稳定流形. 由图中看出此系统的稳定流形与不稳定流形上是对称的. 在分析相空间轨道时, 我们发现五维 Lorenz 最优低维动力系统与经典三维 Lorenz 系统存在对应关系. 图 12 和图 14 给出所对应的相空间中的稳定与不稳定流形. 经比较后不难发现虽然可以找到对应的相平面流形, 但在五维系统中对应流形不再对称, 且出现众多新的复杂结构.

图 15 给出五维最优系统其它几个相平面上的稳定与不稳定流形的一个例子, 从图中可看

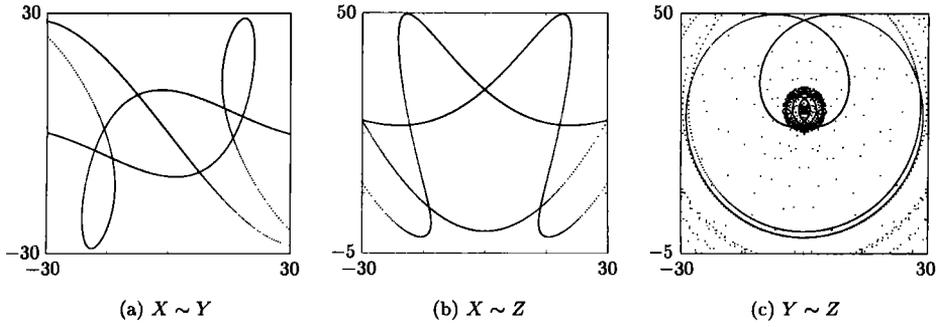


图 11 三维 Lorenz 系统的稳定流形

Fig.11 The stable manifolds of 3D Lorenz system

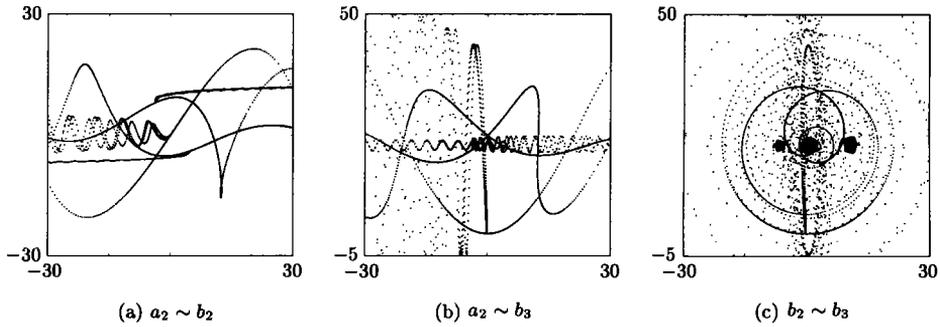


图 12 五维 Lorenz 最优低维系统稳定流形

Fig.12 The stable manifolds of 5D optimal low dimensional Lorenz system

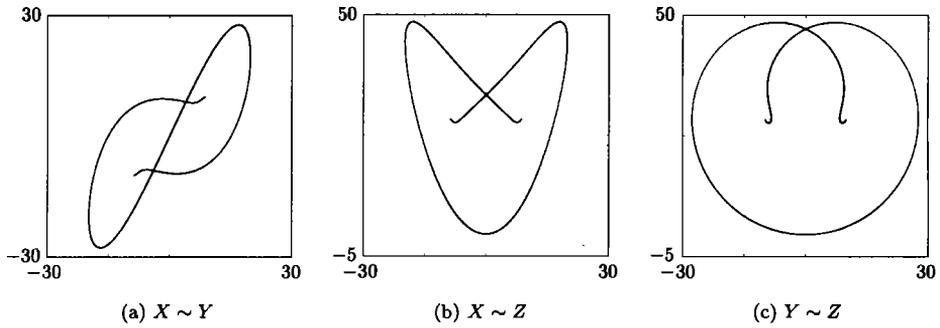


图 13 三维 Lorenz 系统不稳定流形

Fig.13 The unstable manifolds of 3D Lorenz system

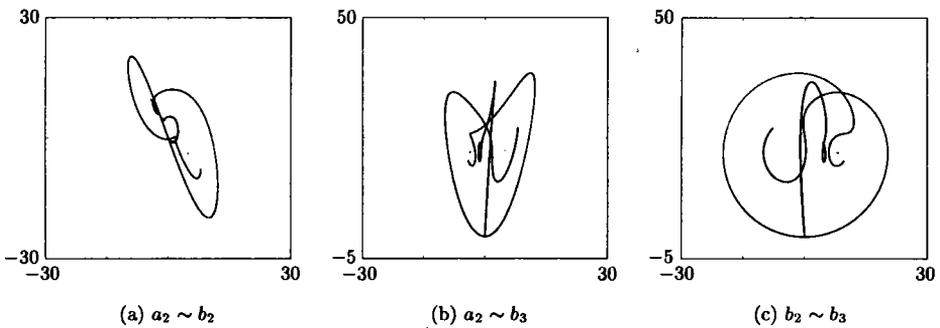


图 14 五维 Lorenz 最优低维系统不稳定流形

Fig.14 The unstable manifolds of 5D optimal low dimensional Lorenz system

到流形的结构有的对称而有的则不对称. 将稳定流形与不稳定流形图叠加在一起, 则可看到在同宿或异宿轨道上出现了横截, 从而可以断定在所给参数下, 五维最优动力系统中出现了混沌.

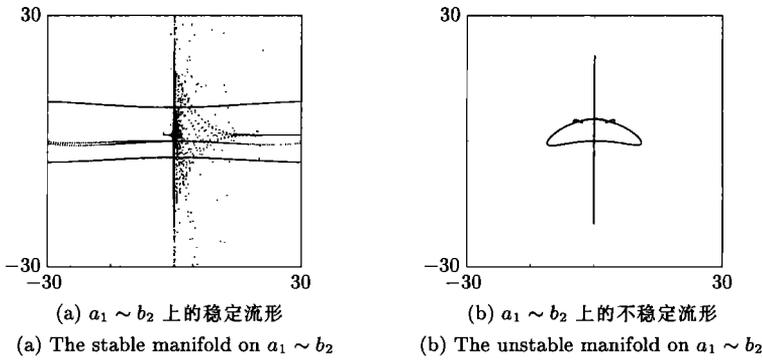


图 15 五维 Lorenz 最优低维系统其它流形

Fig.15 The other manifolds of 5D optimal low dimensional Lorenz system

2.5.6 分岔特性

在对动力系统动力学特性进行分析时, 通过分岔图可以全面了解系统在不同参数下的动力学特性. 下面, 研究五维 Lorenz 最优低维动力系统分别随 Rayleigh 数 Ra 和 Prandtl 数 Pr 变化的分岔图. 图中横坐标为参数轴, 纵坐标为 b_2 . 图中所示的点为系统轨道与 $a_1 = 0$ 平面相交的 Poincaré 截面上的映象. 这里映象点取在无量纲时间 300 ~ 400 之间, 时间步长取为 0.005. 图 16 给出当 $Ra = 28.0, a = 1.5$ 时, 在 $Pr = 0.1 \sim 50.0$ 之间系统动力学特性的演化规律, Pr 的步长取 0.01. 由图中可见, 在 3.98 附近出现的分岔和 39.8 附近的倒分岔, 其分岔类型均为 Crisis 型. 图 17 给出 $Pr = 10.0, a = 1.5, Ra$ 从 0.1 ~ 100 的分岔图. Ra 的步长为 0.01. 从 16.5 开始, 系统突然开始进入混沌区域.

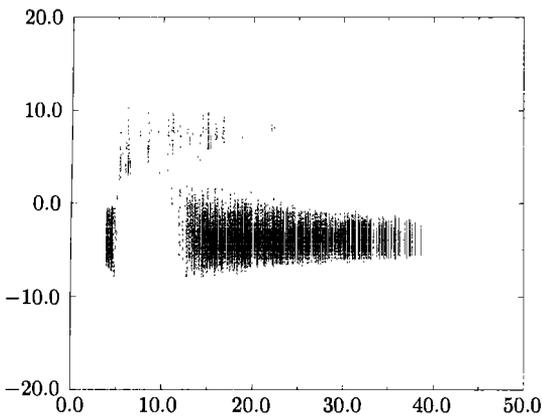


图 16 随 Pr 数变化的分岔图

Fig.16 The bifurcation diagram of Pr

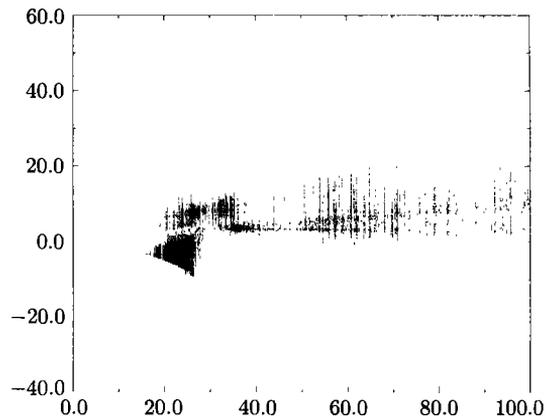


图 17 随 Ra 数变化的分岔图

Fig.17 The bifurcation diagram of Ra

3 结论

1) 无数据库最优低维动力系统建模方法无需依赖于数据库, 直接从控制方程和初始、边界条件出发, 提取真实反映复杂流动动力学特征的最优基; 它能够最大限度地反映复杂问题的动

力学特性, 得到更接近实际问题的最优低维动力系统模型, 是研究非线性动力学现象的有力工具。

2) 通过分析基于最优基的动力系统的动力学特性可见, 它更充分地描述了问题的复杂动力学行为, 揭示了一些新的动力学特征。本文结果说明 Lorenz 问题的本质是混沌的, 以往一些基于 Fourier 基的动力系统(五~十三维)中之所以不出现混沌行为是由于不适当截断造成的。

3) 最优低维动力系统建模理论能够根据实际关心的重点和特殊要求建立目标泛函, 求得满足要求的最优基, 并且可用于相当广泛的数理方程最优逼近问题。

综上所述, 最优低维动力系统建模理论是对实际问题建立低维动力系统模型的有效方法。

参 考 文 献

- 1 Wu CJ, Shi HS. An optimal theory for an expansion of flow quantities to capture the flow structures. *Fluid Dyn Res*, 1995, 17: 1~19
- 2 Wu CJ, Shi H S. The optimal truncated low-dimensional dynamical systems based on flow databases. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 12(2): 104~116
- 3 Wu CJ. Optimal truncated low-dimensional dynamical systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 1996, 2(4): 559~583
- 4 Shirer HN. *Nonlinear Hydrodynamic Modeling: A mathematical introduction*. Springer-Verlag, 1987
- 5 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *J Atmos Sci*, 1963, 20: 130

A NEW DATABASE-FREE METHOD OF CONSTRUCTING OPTIMAL LOW-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS AND ITS APPLICATION¹⁾

Wu Chuijie*[†] Zhao Hongliang[†]

* (LNM, Inst. Mech., CAS, Beijing 100080, China)

[†] (Res. Center for Fluid Dyn., PLA Univ. Sci. Tec., Nanjing 211101, China)

Abstract Based on the theory of constructing optimal Low-Dimensional Dynamical Systems (LDDS), either based on known databases or directly from partial differential equations, (Wu CJ, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 1996, 2(4): 559~583), a new method of building optimal LDDS models directly from partial differential equations is proposed in this paper. A 5 dimensional optimal LDDS of Lorenz system is obtained with the new method, and its dynamical characters are studied. Results show that the new method does not depend on flow database and has the ability to capture the typical characters of complicated fluid problems. There are some new complicated dynamical properties in the 5 dimensional optimal LDDS, which are not exist in the classical Lorenz model.

Key words optimization, partial differential equations, dynamical system, Lorenz system

Received 21 October 1999, revised 16 November 2000.

- 1) The project supported by National Natural Science Foundation of China (19472077), LNM in Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences and State Key Lab. Turbulence Res., Peking University.