

平面可压基频涡卷非线性演化行为数值研究¹⁾

王 强 傅德薰 马延文

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 采用高精度迎风 / 对称紧致混合差分算法, 对可压自由剪切层转捩区中的几种典型展向大尺度涡作用型态进行了直接数值模拟. 通过施加给定来流条件下的线性最不稳定黏性基频扰动及其亚谱扰动, 以被动守恒标量技术给出了基频涡卷的饱和、撕裂、融合以及三涡对并等细节结构. 分析显示, 亚谱扰动相差是催生基频涡卷不同非线性演化过程的重要因素之一, 可对扰动能量的发展变化, 以及剪切层厚度和混合效率产生直接影响. 计算结果同实验流动显示图像十分相似, 表明了主导线性扰动的非线性耦合效应与一些实际涡作用行为间的内在联系.

关键词 可压剪切层, 涡卷对并, 线性扰动, 紧致格式, Navier-Stokes 方程

引 言

借助纹影照片等多项流动显示实验技术, 人们已经知道, 展向大尺度拟序涡结构是平面自由剪切层转捩区内的固有特征之一. 在理论上, 涡卷和涡并被模化为展向大尺度拟序涡结构演化的两种主要形态. 由于多数流动显示实验很少提供认识和控制在这些现象所需的定量数据, 人们距其充分了解尚有一段距离. 按 Ho 和 Huang^[1] 的实验观点, 基频涡卷对并同基频和亚谱扰动的相互作用密切相关. 根据线性稳定性理论, 基频涡卷是剪切层内部线性主导不稳定扰动波增长放大的直接结果, 且扰动增长率是剪切层厚度早期增长率的一个量度. 但线性理论并不能对基频涡卷随后的复杂非线性演化行为给出预示. 以往关于剪切层中涡结构的数值模拟大多限于不可压范围^[2], 近些年, 可压剪切层的相关研究受到广泛重视.

以 Fu 和 Ma^[3] 发展的高精度迎风 / 对称紧致混合差分算法直接求解可压 Navier-Stokes 方程, 对可压自由剪切层转捩区中的几种典型展向大尺度涡结构的非线性作用型态进行了数值模拟. 与大多数研究采用不可压或无黏扰动不同^[4], 这里叠加的是给定计算条件下获得的黏性扰动, 同数值模拟控制方程相容. 为了准确直观地显示基频涡卷的饱和、撕裂、融合以及三涡对并等细节结构, 引入并求解了表征上下层流质混合过程的被动标量守恒方程. 重点对比分析了亚谱扰动相差在催生可压基频涡卷不同非线性演化过程中所起的作用. 特别地, 在基频涡撕裂情形, 亚谱扰动能量最终是衰减的, 对基频扰动能量和剪切层厚度几乎无影响. 部分结果同相关不可压实验流动显示图像十分相似, 表明了剪切层线性稳定性演化特征与一些实际涡作用行为间的内在联系, 对深入研究可压剪切层的转捩机理具有借鉴意义. 计算结果还验证了高精度紧致差分算法在复杂多尺度可压流数值模拟方面的有效性.

1999-05-11 收到第一稿, 1999-12-08 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (19972070) 和国家科学技术部“九·五”攀登 A 预选项目“流体及空气动力学关键基础问题研究”资助课题.

1 数值模型

1.1 Cartesian 坐标系中守恒控制方程

考虑二维时间发展模式, Cartesian 坐标系中, 两股气流以 $y = 0$ 直线分界, 沿 x 轴作异向平行剪切流动. 非定常可压全 Navier-Stokes 方程可用张量表作如下守恒形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j + p \delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho E + p) u_j]}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_k \tau_{kj} - q_j)}{\partial x_j} \quad (1c)$$

其中 x_j 是 Cartesian 坐标 (x, y) , u_j 是速度分量 (u, v) , ρ, p, E 分别是密度、压力和单位质量气体总能, 依次由 $\delta_\omega^*, u_1^*, \rho_1^*, \rho_1^* u_1^{*2}, u_1^{*2}$ 无量纲化. 涡量厚度 $\delta_\omega^* = (u_1^* - u_2^*) / |d\bar{u}^*/dy^*|_{\max}$, \bar{u}^* 是初始平均流向速度分布. 上标 * 表示有量纲值, 下标 1, 2 分别表示上下层自由流值. 黏性应力 τ_{ij} 和热流量 q_j 的无量纲表达式为

$$\tau_{ij} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

$$q_j = - \frac{\mu}{(\gamma - 1) M_1^2 Re Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

其中 M_1 是上层来流 Mach 数, Reynold 数 $Re = \rho_1^* u_1^* \delta_\omega^* / \mu_1^*$, 温度 T 和动力黏性系数 μ 分别以 T_1^*, μ_1^* 无量纲化, 且 μ 由 Sutherland 公式确定. 完全气体状态方程为 $p = \rho T / (\gamma M_1^2)$. 此外, 比热比 $\gamma = 1.4$, Prandtl 数 $Pr = 0.75$, $T_1^* = 273 \text{ K}$, $E = p / [(\gamma - 1)\rho] + u_k u_k / 2$.

在数值模拟过程中, 下面关于被动标量 g 的输运守恒方程被同时求解

$$\frac{\partial \rho g}{\partial t} + \frac{\partial (\rho g u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) \quad (2)$$

其中 Schmidt 数 $Sc = 1$. 变量 ρg 在这里可看作冻结流场中某示踪组元的质量浓度, g 是该组元的质量分数, 反映的是剪切层的混合特征.

1.2 迎风 / 对称紧致混合差分算法及定解条件

守恒控制方程 (1), (2) 的对流项经矢量通量特征分裂后采用 5 阶迎风紧致差分格式离散. 不失一般性, 记向量 f 为控制方程 x 方向对流量, 其 Jacobian 矩阵的互异特征值分别为 $\lambda_1 = u$, $\lambda_{2,3} = u \pm c$, c 是声速, 则它的 Steger-Warming 正负分裂形式为

$$f^\pm = \frac{\rho}{2\gamma} \left\{ \begin{array}{l} 2(\gamma - 1)\lambda_1^\pm + (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm) \\ 2(\gamma - 1)u_i \lambda_1^\pm + u_i(\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm) + c(\lambda_2^\pm - \lambda_3^\pm) \\ 2(\gamma - 1)(u_k u_k / 2)\lambda_1^\pm + [c^2 / (\gamma - 1) + u_k u_k / 2](\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm) + cu(\lambda_2^\pm - \lambda_3^\pm) \\ g[2(\gamma - 1)\lambda_1^\pm + (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm)] \end{array} \right\}$$

这里 $f = f^+ + f^-$, 且 $\lambda_l^\pm = [\lambda_l \pm (\lambda_l^2 + \varepsilon^2)^{1/2}]/2$, $l = 1, 2, 3$, 参数 ε 是为了避免流场中特征值 0 点处 (如声速点) 分裂通量的导数不连续而引入的小正数. 于是 f^\pm 的一阶导数变量 $\partial f^\pm / \partial x$ 的 5 阶迎风紧致差分离散形式为 [3]

$$f^\pm : \frac{3}{2} \left(\frac{\partial f^\pm}{\partial x} \right)_i + \left(\frac{\partial f^\pm}{\partial x} \right)_{i \mp 1} = \frac{1}{24\Delta x} (\mp f_{i \pm 2}^\pm \pm 12f_{i \pm 1}^\pm \pm 36f_i^\pm \mp 44f_{i \mp 1}^\pm \mp 3f_{i \mp 2}^\pm) \quad (3)$$

在非周期边界, 次点和边界点分别选用 3 阶迎风紧致格式 [3] 和 2 阶普通偏心格式. 式 (3) 连同边界离散格式构成关于未知变量 $\partial f^\pm / \partial x$ 的带状线性方程组, 易于求解. 其它方向类似.

守恒控制方程的输运项采用 6 阶对称紧致差分格式离散. 同样, 若记向量 f 为 x 方向输运通量, 则 f 的一阶导数变量 $\partial f / \partial x$ 的 6 阶对称紧致 Collatz 格式差分离散形式为 [5]

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i-1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i+1} = \frac{1}{36\Delta x} (f_{i+2} + 28f_{i+1} - 28f_{i-1} - f_{i-2}) \quad (4)$$

在非周期边界, 次点和边界点分别选用 4 阶对称紧致 Padé 格式 [5] 和 3 阶迎风紧致格式 [3]. 于是, 式 (4) 连同边界离散格式也构成关于一阶导数变量的易于求解的带状线性方程组. 输运通量 f 所包含的一阶导数变量要经形如式 (4) 的差分格式离散后预先求出.

空间半离散控制方程由 3 步 3 阶紧致存储 Runge-Kutta 算法时间推进求解.

流动初始平均场的设定同文献 [6], 即平均流向速度呈双曲正切分布, 平均温度满足修正 Crocco-Busemann 能量积分关系式, 平均压力等于自由流值. 初始扰动场由给定对流 Mach 数 Mc 和 Re 下的最不稳定线性扰动波及其亚谐波模态组成, 叠加于平均场上, 形如

$$f' = a_1 \cdot Re \{ \hat{f}_1 \exp(i\alpha_1 x) \} + a_{1/n} \cdot Re \{ \hat{f}_{1/n} \exp[i(\alpha_{1/n} x + \varphi_{1/n})] \}$$

下标 1, $1/n$ 分别表示基频模态及其 $1/n$ 亚谐波, 特征函数 $\hat{f} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{T}, \hat{p})$, 由数值线性稳定性分析得到 [6]. y 方向取齐次 Neumann 边界条件, 网格非均匀分布, 于 $y = 0$ 附近加密; x 方向取周期边界条件, 网格均匀分布. 无量纲来流条件 $u_2 = -1$, $T_2 = 1$, $p_1 = p_2$, 则 $Mc = M_1 = M_2$.

2 计算结果及讨论

为同已有不可压平面剪切层实验进行定性比较, 并计及压缩性, 取 $Mc = 0.2$. 计算 Reynolds 数 $Re = 700$. 由线性理论, 最不稳定波数 $\alpha_1 = 0.86$, 波长 $\lambda_1 = 7.306$. 此外, 扰动振幅 $a_1 = a_{1/n} = 0.05$, 网格数 257×221 . 共考虑了如表 1 所示的 4 种情形.

表 1
Table 1

case	L_x / λ_1	$1/n$	$\alpha_{1/n}$	$\varphi_{1/n}$	Characteristic
A	2	—	—	—	primary vortex saturating
B	2	1/2	0.430	$3\pi/4$	primary vortex tearing
C	2	1/2	0.430	0	primary vortex pairing
D	3	1/3	0.287	$\pi/3$	three-vortex pairing

2.1 涡结构分析

图 1 是仅施加基频扰动促生的基频涡结构的时间演化序列 (case A), 给出的是被动守恒标

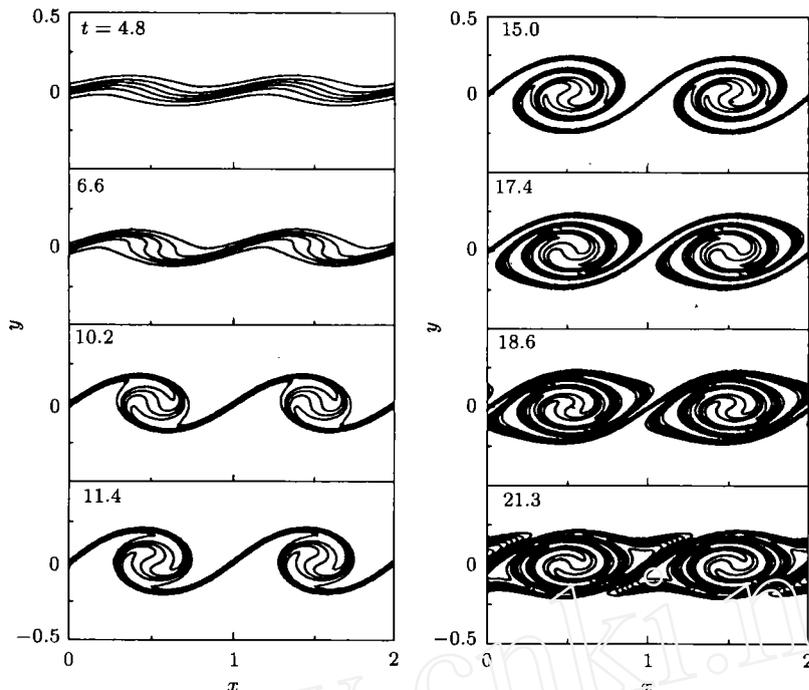


图 1 基频涡饱和和演化序列

Fig.1 Evolution of the primary vortex saturating

量 g 等值线. 图中的横纵坐标 (x, y) 是以波长 λ_1 规整化的 (以后图中的坐标与此相同). 两个基频涡卷的尺度和形态完全一样, 最后处于伴随周期性流向变形的并列自旋运动状态, 由来自涡辨的缠起的流质相连. 环绕涡核的涡辨与自由流中无旋流体之间的相互作用实现了饱和基频涡卷的卷吸过程, 加大了上下流质的接触面积.

施加基频扰动及其 $1/2$ 第一亚谐波, 并令相差 $\varphi_{1/2} = 3\pi/4$ (case B), 图 2 所得两基频涡卷同图 1 基本一一对应. 因亚谐波扰动的初始分布相对于基频扰动不均衡, 使得涡辨区涡量在两涡卷间非等分配, 左侧涡卷沿流向被撕裂, 涡强度和涡尺度变小. 亚谐波扰动未改变基频涡卷在 x 轴上的涡心位置, 无涡并出现, 即亚谐波扰动的存在不是涡并的充分条件. $t = 21.3$ 之后, 左右涡卷经由涡辨两端相互输运涡量, 形成稳定的平行周期运动, 尽管两涡尺度不同, 进而拥有的环量也不同, 但因亚谐波扰动强度偏弱, 即使有黏性作用, 左涡卷也并不被较大的右涡卷吞没, 这点与 Moore 和 Staffman^[7] 的猜想以及 Riley 和 Metcalfe^[4] 的计算相反.

case C 与 case B 仅相差不同, 但亚谐波扰动引起了基频涡卷的配对和融合 (图 3). $t = 20.8$ 时, 作为涡融合过程的显著特征之一, 与涡辨相连的两端有明显的变形基频涡臂伸出, 并且随着涡旋, 环绕涡心的涡辨不断相互汇合成一线, 该细节变化从等涡量线中难以得到. 亚谐波的影响依赖于相差, 更一般地, 对于本文相差介于 $(\pi/4, 3\pi/4)$ 之间的任何亚谐波扰动, 其作用都包括对并和撕裂两部分, 对并从改变基频涡心位置开始, 亚谐波扰动增强后, 方伴有基频涡卷的明显变形. 对并作用强于撕裂作用, 故在随机场计算中, 对并出现的概率最大.

Ho 和 Huang^[1] 实验分析亚谐波扰动与涡并之间的关系时认为, 当亚谐波扰动频率是基频扰动频率的整分数时, 多涡对并就可能发生. 图 4 再现的是三涡对并现象 (case D). 亚谐波扰动最初仅

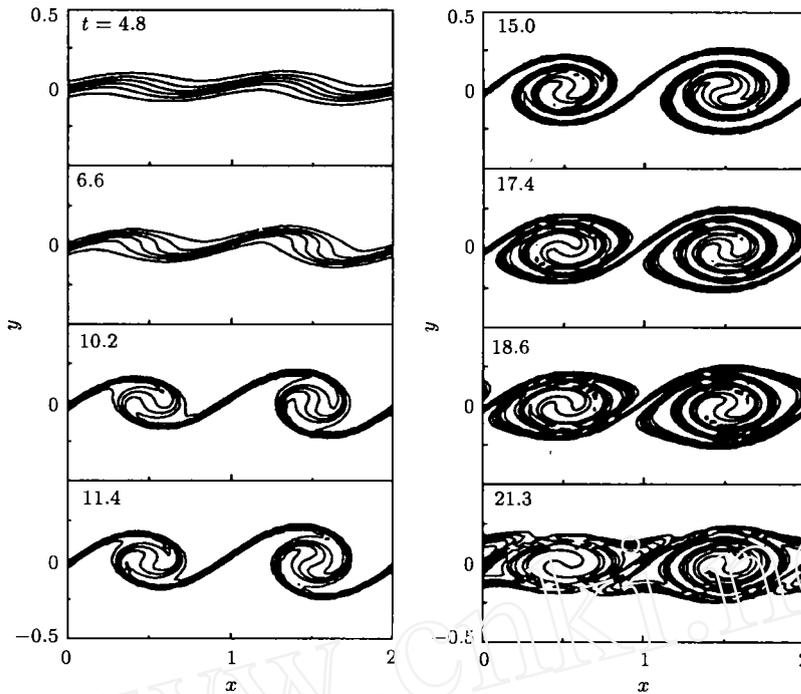


图 2 基频涡撕裂演化序列
Fig.2 Evolution of the primary vortex tearing

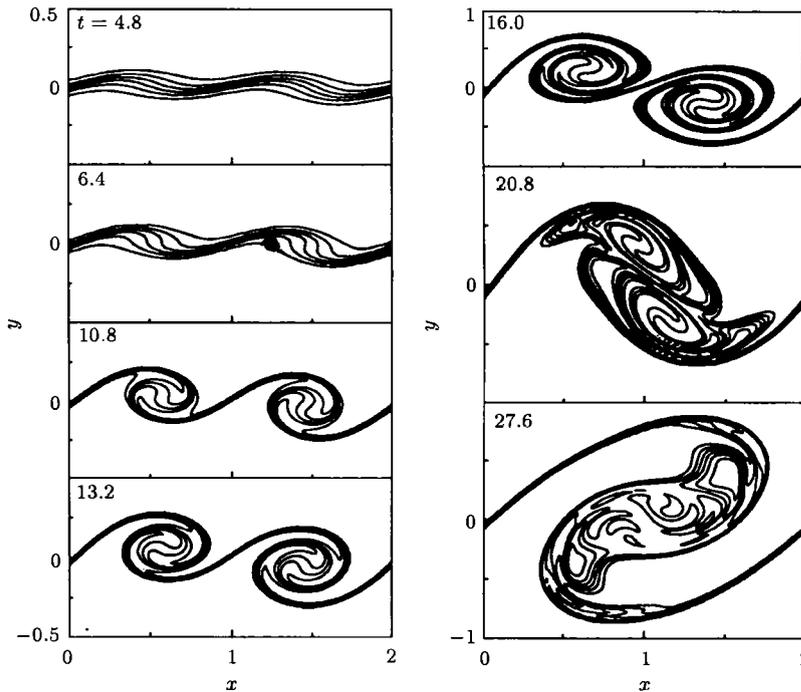


图 3 基频涡对并演化序列
Fig.3 Evolution of the primary vortex pairing

改变基频涡心位置，使基频涡卷连成一线对称环绕旋转，而后中心涡被拉长和撕裂。同双涡对并类似，图中亚谱涡卷内部的复杂多尺度结构清晰可辨，涡两端也有基频涡臂伸出。涡的对并是小尺度结构形成的路径之一，而小尺度结构的出现是混合转捩的必要条件。改变相差试算表明，三涡对并未出现，代之以双涡对并后将第三涡撕裂和吞并。

图 5 是数值模拟结果与不可压平面剪切层实验流动显示图像的定性对比。对应于 case A,

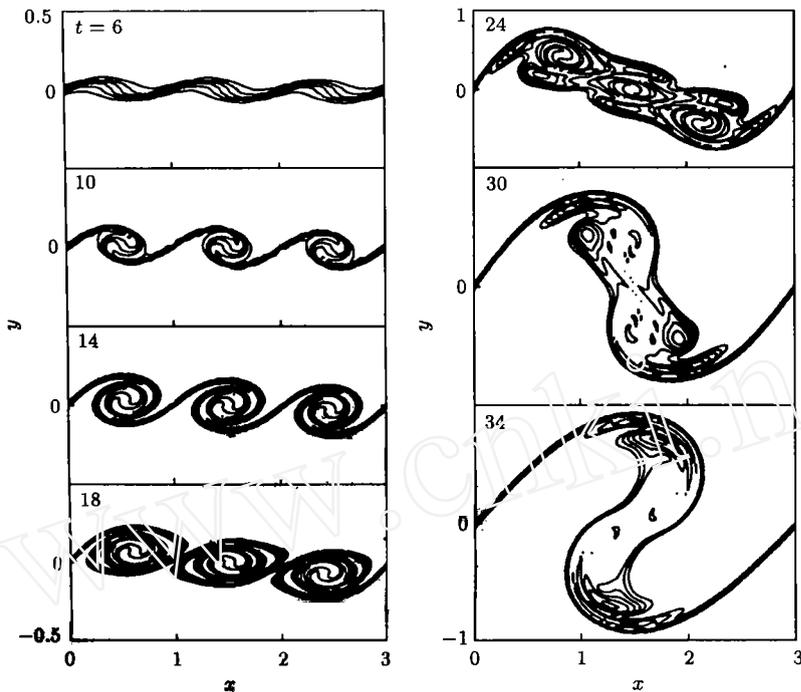
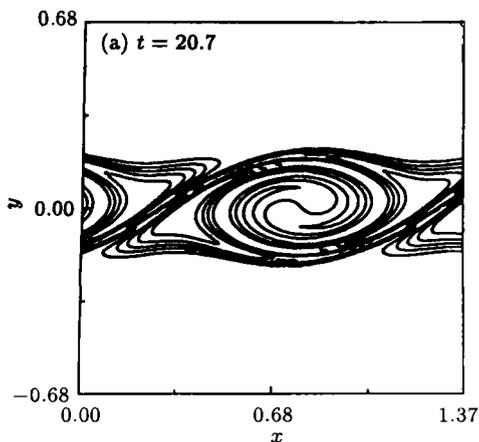


图 4 三涡对并演化序列

Fig.4 Evolution of the three-vortex pairing



(a) case A



图 5 数值模拟结果与实验流动显示图像对比

Fig.5 Comparison of the calculations with the experimnt images

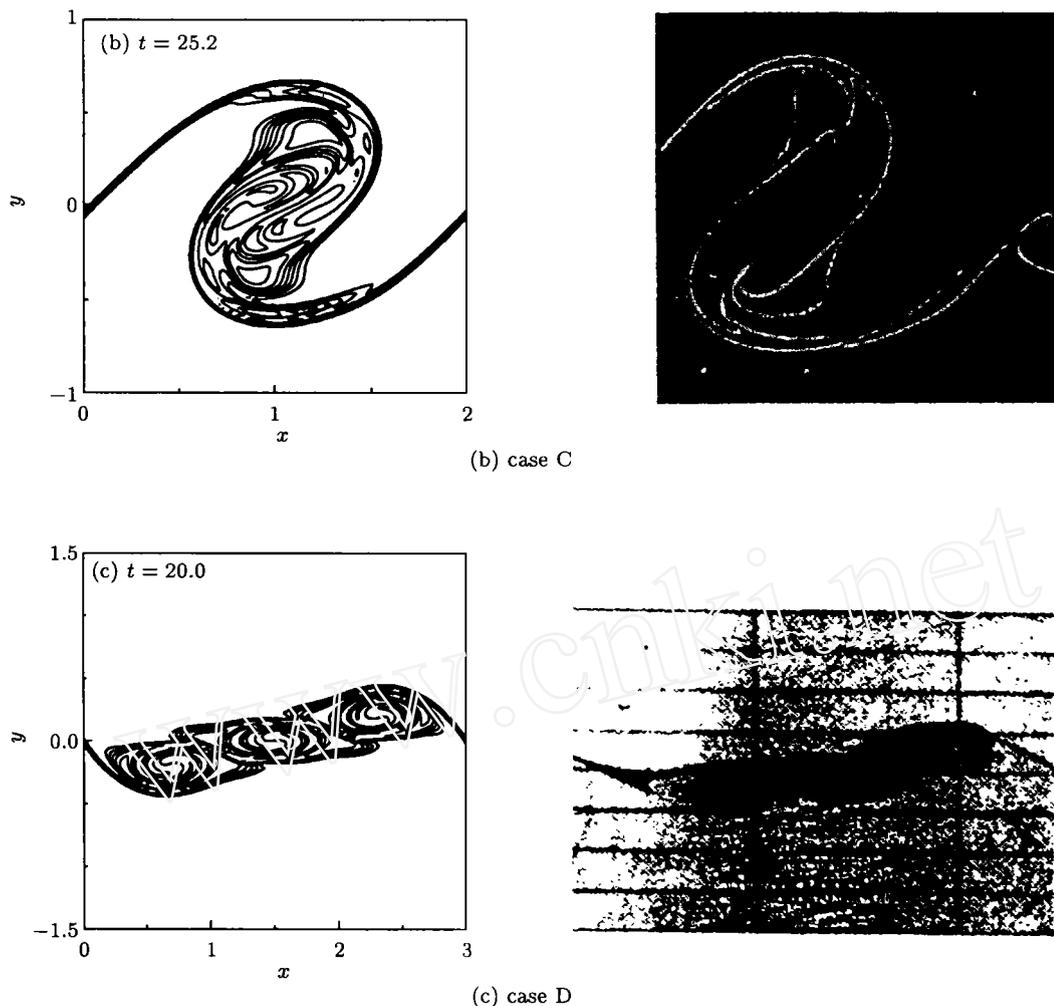


图 5 数值模拟结果与实验流动显示图像对比 (续)
 Fig.5 Comparison of the calculations with the experiment images (continued)

case C 的是 Koochesfahani 和 Dimotakis^[8] 得到的流动混合转捩前的激光诱导荧光照片, 本文计算与之非常近似. 特别地, case C 中的亚谐波涡卷在上下两端的涡瓣入口内侧各有一个源于变形基频涡卷一端的明显的突起, 与实验照片一致, 许多低精度类似计算将其抹平^[2], 表明在剪切层数值研究中采用高精度算法是必要的. 对应于 case D 的是 Winant 和 Browand^[9] 给出的三涡对并实验照片, 虽然实验照片不很清晰, 仍可看出两个涡结构在形态上相当吻合.

2.2 扰动能量分析

记扰动波的特征速度为 (\hat{u}, \hat{v}) , 扰动能量定义为

$$E = \int_{L_y} (\hat{u}\hat{u}^* + \hat{v}\hat{v}^*) dy$$

上标 * 为复共轭. 图 6 是基频扰动 (粗线) 及其亚谐波扰动 (细线) 的扰动能量变化曲线. 在剪切

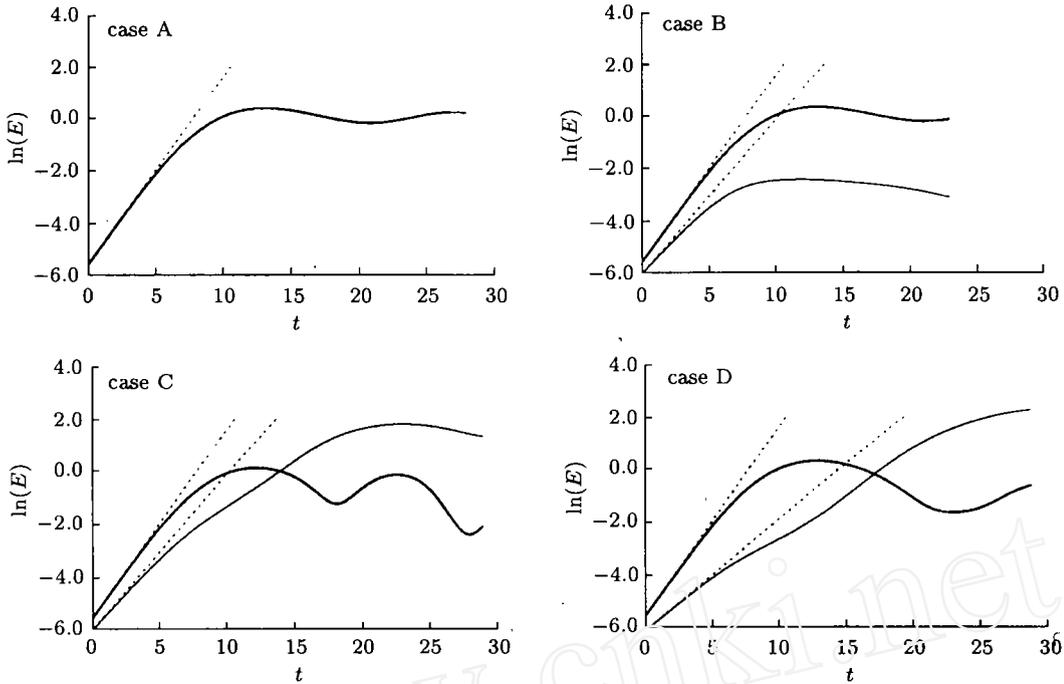


图 6 扰动能量时间变化曲线

Fig.6 Variation of disturbance energy with time

表 2

Table 2

case	A	B	C	D
growth rate of primary disturbance	0.353173	0.351341	0.352705	0.350430
growth rate of subharmonic disturbance	-	0.276540	0.274629	0.207389

层演化初期, 基频和亚谐扰动近似呈线性增长. 考虑 $t < 1$, 计算所得扰动线性增长率如表 2.

由数值线性稳定性分析得到的基频扰动、 $1/2$ 第一亚谐扰动和 $1/3$ 第二亚谐扰动的增长率依次为 0.352635, 0.274653, 0.208697^[6], 数值模拟结果与之符合良好. 图中线性理论结果被以虚线绘出. 在基频扰动能量饱和之前, 亚谐扰动强度较弱, 故 4 条基频曲线在初始段彼此相像, 饱和位置和饱和值较接近. 如前所示, 此时基频涡卷的形态变化在 4 个算例间无显著差别, 亚谐波对 case B 的影响以使涡量在基频涡卷间非等分为主, 对 case C, case D 则是使基频涡卷的涡心位置改变. case B 的流场一直由基频扰动主导, 不可能出现对并或吞并现象. case C, case D 的亚谐扰动能量最终超过了基频扰动而促成涡并. 涡并是剪切层改由亚谐扰动主导的标志.

图 7 和图 8 是涡量厚度和动量厚度曲线. 涡并使剪切层厚度显著提高, 从而质量卷吸能力增强, 混合效率提高. 三涡对并的增混效果最好, 但达到饱和值的过程偏长. 与前述一致, 所有曲线在基频涡饱和前 ($t \approx 12$) 彼此差异不大. 因 case A, case B 始终受同一基频扰动波主控, 故两者厚度曲线重合, 显然, 以 case B 方式施加亚谐扰动的增混效果不会好. case C, case D 的涡量厚度曲线在涡并阶段有锯齿型波动, 反映了亚谐涡卷同基频涡卷在涡动力行为上的不同, 可能

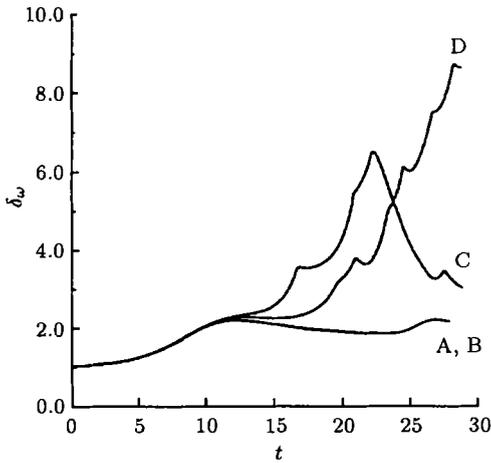


图 7 涡量厚度曲线

Fig.7 Variation in vorticity thickness

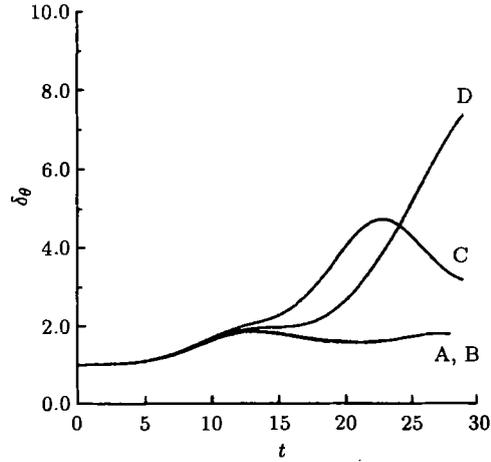


图 8 动量厚度曲线

Fig.8 Variation in momentum thickness

是亚谐波涡卷内部有小尺度涡生成的一个标志。动量厚度曲线一直平缓变化，意味着在可压剪切层大尺度涡的早期非线性相互作用过程中，流场总动能的变化率是连续的。

3 结 论

选取高精度紧致差分算法对可压剪切层中基频涡卷的饱和、撕裂、融合和多涡对并等典型非线性演化型态进行了直接数值模拟，以被动守恒标量等值线给出了涡作用时间序列的细节结构，再现了部分实验图像。研究表明，亚谐波扰动非基频涡并的充分条件，其作用方式随相差的的不同而分别以对并和撕裂为主，对并的几率最大，撕裂可无基频涡吞并出现。相差也是多涡对并的决定因素之一。基频涡卷的质量卷吸过程主要通过外部环绕涡瓣完成。可压剪切层内在的主导线性稳定性特征与一些实际涡作用形态间存在关联。

参 考 文 献

- 1 Ho CM, Huang LS. Subharmonics and vortex merging in mixing layers. *J Fluid Mech*, 1982, 119: 443~473
- 2 Jacobs PA, Pullin DI. Multiple-contour-dynamic simulation of eddy scales in the plane shear layer. *J Fluid Mech*, 1989, 199: 89~124
- 3 Fu DX, Ma YW. A high order accurate difference scheme. *J Comput Phys*, 1997, 134(1): 1~15
- 4 Riley JJ, Metcalfe RW. Direct numerical simulation of a perturbed turbulent mixing layer. AIAA-80-0274, 1980
- 5 Lele SK. Direct numerical simulation of compressible free shear flows. AIAA-89-0374, 1989
- 6 王强, 傅德薰, 马延文. 可压缩平面混合层稳定性数值计算. 计算物理, 1997, 14(4-5): 413~416 (Wang Qiang, Fu Dexun, Ma Yanwen. A numerical investigation of the stability of compressible plane mixing layers. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1997, 14(4-5): 413~416 (in Chinese))
- 7 Moore DW, Staffman PG. The density of organized vortices in a turbulent mixing layer. *J Fluid Mech*, 1975, 69: 465~473
- 8 Koochesfahani MM, Dimotakis PE. Mixing and chemical reactions in a turbulent liquid mixing layer. *J Fluid Mech*, 1986, 170: 83~112
- 9 Winant CD, Browand FK. Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing layer growth at moderate Reynolds numbers. *J Fluid Mech*, 1974, 63(2): 237~255

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE NONLINEAR EVOLUTION OF THE PLANE COMPRESSIBLE PRIMARY VORTEX ¹⁾

Wang Qiang Fu Dexun Ma Yanwen

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract Several prototype flows typical of the spanwise large-scale rollup interactions are investigated through using the direct numerical simulation method. These phenomena have been captured experimentally in the transition region of the free shear layer for a long time. A high-accuracy upwind/symmetric compact difference hybrid method is developed and is used to solve the two-dimensional compressible Navier-Stokes equations. A fifth-order upwind compact scheme is employed to discretize the convective flux terms with the help of the Steger-Warming flux-splitting technique, while a sixth-order symmetric compact scheme obtained by Coliatz is selected to discretize the transport flux terms. The three-stage third-order explicit Runge-Kutta algorithm found by Wray is introduced for time-marching. The temporally-developing compressible shear layer is disturbed by the most-unstable viscous wave and its subharmonic modes obtained numerically by linear stability analysis. The fine-scale structures of primary vortex saturating, tearing, merging, and three-vortex pairing are shown through employing a passive conserved scalar method. The simulations lead to that the relative phase of subharmonic mode is one of the important factors related to the different nonlinear evolutions of the primary vortices, and that it can directly impact the disturbance energy, shear layer thickness, and mixing efficiency. Especially, in the vortex-tearing case, the energy of subharmonic mode is reduced eventually, so it influences weakly the energy of primary wave and the shear layer thickness. Calculation results are similar to the existed experiment images, which indicate that there is an inherent relation between the unstable linear waves and the real vortex interaction types in compressible shear layers. Furthermore, the numerical method used here is good for study of the multi-scale complicated flows.

Key words compressible shear layer, vortex pairing, linear disturbance, compact difference scheme, Navier-Stokes equations

Received 13 May 1999, revised 18 October 1999.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19972070) and the National Climbing A Pre-selected Projects of China.