

# 同位网格摄动有限体积格式求解浮力驱动方腔流<sup>1)</sup>

代民果<sup>2)</sup> 高 智

(中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100080)

**摘要** 利用对流扩散方程的摄动有限体积格式, 在 Rayleigh 数从  $10^3$  到  $10^8$  的范围内对浮力驱动方腔流动问题作了数值模拟. 对流扩散方程的摄动有限体积格式具有一阶迎风格式的简洁形式, 使用相同的基点, 重构近似精度高, 特别是两相邻控制体中心到公共界面的距离相等或不相等, PFV 格式公式相同等优点. 在数值模拟中, 无论均匀网格还是非均匀网格均获得与 DSC 方法、自适应有限元法、多重网格法等 Benchmark 解相符较好的数值结果, 证明 UPFV 格式对高 Rayleigh 数对流传热问题的适用性和有效性.

**关键词** 同位网格, 结构网格, 摄动有限体积法, 自然对流, Date 修正 SIMPLE 算法

**中图分类号:** O351 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)06-0733-08

## 引 言

自然对流在自然界和工程技术领域中非常普遍, 例如海洋温盐环流以及工程绝热设备、冷却装置、晶体生长、核反应堆等工程问题中都可遇到. 自然对流是极其复杂的现象, 受多种因素影响. 为了定量研究和分析这些问题, 前人作了很多算法和格式方面的工作, 并已取得不少成果. 这些成果的取得与对从实际问题中抽象出来的经典自然对流模型的研究是分不开的.

Jones<sup>[1]</sup> 建议把浮力驱动方腔流作为一个 Benchmark 解, 测试有关对流传热问题计算机程序的有效性. 这个简化模型具有规则的几何形状和简单的边界条件, 可以研究在高 Rayleigh 数下层流向湍流转捩的物理机制, 因而吸引了大量学者利用各种数值方法(如谱方法、特征分裂法等)来求解. 由于随 Rayleigh 数增加, 边界层变薄, 刚性问题会变得很突出, 对格式是严峻的考验. 因此高 Rayleigh 数下的数值模拟及数值方法研究迄今仍然是一个热点领域.

在计算流体力学(CFD)或数值传热学(NHT)中, 有很多种数值方法. 但正如 Ferziger<sup>[2]</sup> 所指出, 最重要的是有限体积法(FVM), 有限差分法(FDM)和有限元法(FEM). 与有限差分法相比, 有限体积法的一个优点是可用于各种类型的网格, 包括结构、非

结构和结构-非结构混合网格, 很适于求解复杂几何形状的区域; 与有限元法相比, 有限体积法的一个突出优点是能够很好地满足物理量的守恒条件, 对流动计算是非常重要的. 因此有限体积法在工程计算中非常流行, 广泛应用于各种商用 CFD 软件中.

有限体积法与有限元和有限差分法相比, 缺点是精度较低. 有限体积法是二级近似, 即积分近似和重构近似. 如果积分近似有  $n_1$  阶精度, 重构近似有  $n_2$  阶精度, 那么有限体积法具有  $\min(n_1, n_2)$  阶精度. 国内外学者作了大量工作构造各种实用的有限体积格式. 例如一阶迎风和二阶中心格式, Jameson<sup>[3,4]</sup> 的中心型有限体积格式, Liou 和 Steffen<sup>[5,6]</sup> 的对流迎风分裂算法 AUSM 格式. 但是这些格式的精度都小于或等于二阶. 一般来说, 高于二阶精度的有限体积格式都是多基点格式(如 Quick 和二阶迎风格式). 因为多基点格式涉及更多的控制体, 所以离散后的代数方程组有更加复杂的系数矩阵, 特别是向三维推广比较困难.

近年来, 高智<sup>[7]</sup> 提出对流扩散方程的摄动有限体积(PFV)格式. 与传统提高格式精度的方法不同, PFV 格式把对流项和扩散项作为一个整体综合考虑, 利用它们之间的内在联系来提高格式精度. 基本原理是把通过控制体界面的质量通量摄动展开成为网格间距的幂级数, 幂级数系数可凭借积分形

2005-02-21 收到第 1 稿, 2006-04-11 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目(10032050, 10272106).

2) E-mail: 20108009@sohu.com

式的守恒方程本身获得. 最后导出的迎风型摄动有限体积格式保留了原一阶迎风格式的优点, 但其重构近似具有任意阶精度.

本文把高智提出的对流扩散方程有限体积格式具体应用到对流传热控制方程中, 求解浮力驱动方腔流这一 Benchmark 问题, 并与其它有限元法, DSC 法, 特征分裂 CBS 法等得出的 Benchmark 解作了对比分析.

### 1 自然对流控制方程的 PFV 离散

采用如下的无量纲参数

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{L_{\text{ref}}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L_{\text{ref}}}, \quad u = \frac{\bar{u}L_{\text{ref}}}{\alpha} \\ v &= \frac{\bar{v}L_{\text{ref}}}{\alpha}, \quad t = \frac{\bar{t}\alpha}{L_{\text{ref}}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\bar{p}L_{\text{ref}}^2}{\rho\alpha^2}, \quad \theta = \frac{\bar{\theta} - \theta_C}{\theta_H - \theta_C} \\ Ra &= \frac{g\beta\Delta\theta L_{\text{ref}}^3}{\nu\alpha}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

流体假定是黏性、不可压、Boussinesq 流体. 流体的物性参数如动力学黏性系数, 温度扩散率, 比热等为常量, 即可导出以下自然对流的无量纲方程

连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + Pr\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + RaPr\theta \quad (5)$$

能量方程

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6)$$

显然, 动量方程 (4), (5) 和能量方程 (6) 都具有如下形式 (不失一般性, 引入密度  $\rho$ , 对这个问题, 时间项和对流项中  $\rho = 1$ ;  $\mu$  是无量纲黏性系数)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\phi) = \mu\nabla^2\phi + \tilde{q} \quad (7)$$

$\phi$  是通用标量变量,  $q$  是源项. 式 (7) 在控制体积  $\Omega$  上积分,  $V_p$  是控制体  $\Omega$  的体积,  $d_j$  是从控制

体  $P$  中心指向控制体  $P_j$  中心的矢量,  $S_j$  是控制体  $P$  与控制体  $P_j$  公共界面的面积矢量. 应用摄动有限体积方法可导出如下摄动有限体积离散格式 (具体推导过程请参考文献 [7])

$$V_P \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \sum_{j=1}^{n_P} \left\{ \left[ \mu \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} - \min(\dot{m}_{jf} G_j, 0) \right] \phi_{jP} - \left[ \mu \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} + \max(\dot{m}_{jf} G_j, 0) \right] \phi_P \right\} + q_P V_P + \sum_{j=1}^{n_P} \frac{1}{G_j} \left[ (\mu \nabla \phi \cdot S)_j - \mu \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} (\phi_{P_j} - \phi_P) \right]^{\text{old}} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} G_j &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)!} R_{jf}^n (\text{sign } \dot{m}_{jf})^n \\ R_{jf} &= \dot{m}_{jf} |d_j| / \mu S_{jf} \\ \text{sign } \dot{m}_{jf} &= \begin{cases} 1, & \dot{m}_{jf} > 0 \\ -1, & \dot{m}_{jf} < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$R_{jf}$  可看作网格雷诺数. 注意到在推导过程中, 法向扩散通量离散只取了式 (10) (局部坐标系见图 1) 中的第 1 项, 即沿两控制体中心连线的拉伸部分; 当两相邻控制体中心连线与公共界面不正交时, 法向扩散通量还存在沿控制体界面的剪切部分, 即式 (10) 第 2 项, 考虑到网格质量比较差时

$$\left. \begin{aligned} \nabla \phi \cdot S &= \frac{1}{J} \left( S_x \frac{\partial y}{\partial \eta} - S_y \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \left( S_y \frac{\partial x}{\partial \xi} - S_x \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ J &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

不应该忽略掉这部分的贡献, 所以推导完成后在式 (8) 右端引入 old 项. 将式 (8) 改写为向量形式,

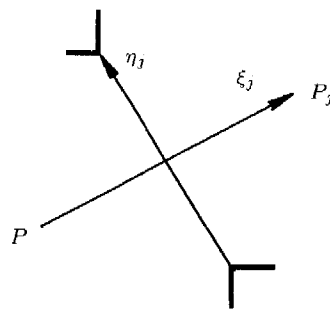


图 1 控制体  $P$  界面  $-jf$  上的局部坐标系

Fig.1 Local coordinate system

并注意到界面质量通量迎风关系和无散条件，即有

$$\begin{aligned}
 V_P \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho \theta \end{bmatrix}_P &= \\
 \sum_{j=1}^{n_P} \frac{1}{G_{j\phi}} \left[ \mu_\phi \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} + \max(\dot{m}_{jf} G_j, 0) \right] &\cdot \\
 \left( \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_{P_j} - \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_P \right) - \sum_{j=1}^{n_P} \dot{m}_{jf} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_{P_j} - \\
 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_P} p_{jf} \mathbf{S}_{jf} \cdot \mathbf{i} \\ \sum_{j=1}^{n_P} p_{jf} \mathbf{S}_{jf} \cdot \mathbf{j} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Pr Ra \theta_P V_P \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\mu_\phi}{G_{j\phi}} \begin{bmatrix} \nabla u \cdot \mathbf{S} \\ \nabla v \cdot \mathbf{S} \\ \nabla \theta \cdot \mathbf{S} \end{bmatrix}_{jf} - \\
 \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_{jf}}{|\mathbf{d}_j|^2} \begin{bmatrix} u_{P_j} - u_P \\ v_{P_j} - v_P \\ \theta_{P_j} - \theta_P \end{bmatrix}^{\text{old}} &= 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

$G_{j\phi}$  的计算与  $\mu_\phi$  对应。对动量方程  $\mu_\phi = Pr$ ，对能量方程  $\mu_\phi = 1$ 。

## 2 浮力驱动方腔流问题

虽然 PFV 格式可方便地直接推广到三维情况，但本文还是先用经典的二维浮力驱动方腔流模型验证格式的有效性。如图 2 所示，封闭方腔上下壁面

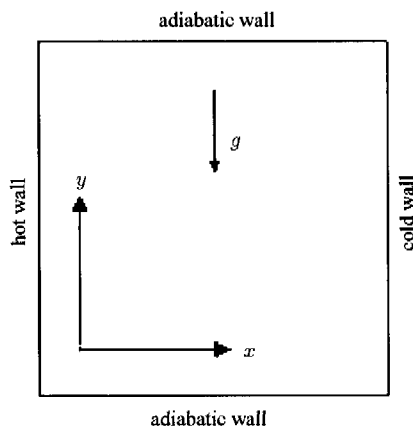


图 2 浮力驱动方腔流

Fig.2 Buoyancy-driven cavity flow

绝热，左右壁面存在温差。封闭方腔的四周壁面对速度均为无滑移边界条件。左右垂向壁面对温度为狄氏边界条件， $\theta_H = 1.0, \theta_C = 1.0$ ；上下水平壁面对温度为齐次黎曼边界条件， $\partial\theta/\partial n = 0.0$ ；压力均为齐次黎曼边界条件  $\partial P/\partial n = 0.0$ 。

### 2.1 层流 Rayleigh 数的确定

Incropera 和 Dewitt<sup>[8]</sup> 指出垂向壁的局部 Rayleigh 数大于  $10^9$ ，能促发层流自然对流向湍流的转换。封闭方腔中的自然对流的物理性质还与方腔的长宽比有关。Paolucci 等<sup>[9]</sup> 认为对于内波和壁面边界层分别有一个临界 Rayleigh 数，对于  $1/2 < A < 3$  ( $A$  是方腔高度和宽度比) 和  $Pr = 0.71$ ，内波会先于边界层失稳，并给出内波的临界 Rayleigh 数  $Ra_i = 1.93 \times 10^8 A^{-3.15}$ 。本文模拟高度和宽度比  $A = 1$  的封闭方腔的层流自然对流，与 Wan<sup>[10]</sup> 的研究一样，把最大 Rayleigh 数限制为  $10^8$ 。

### 2.2 代数方程组及其求解

将导出的式 (11)，时间项采用前差离散，可写为如下适合迭代计算的形式

$$a_P \phi_P = \sum a_{jP} \phi_{jP} + \text{source}$$

其中

$$a_P = \sum_{j=1}^n \frac{1}{G_j} \left[ \frac{\Gamma \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|} + \max(\dot{m}_{jf} G_j, 0) \right] + \frac{\rho}{\Delta t} V_P$$

$$a_{jP} = \frac{1}{G_j} \left[ \frac{\Gamma \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|} + \max(\dot{m}_{jf} G_j, 0) \right] - \dot{m}_{jf}$$

经亚松弛后可写为

$$a'_P \phi_P = \sum a_{jP} \phi_{jP} + a'_P (1 - \alpha) \phi_P^0 + \text{source}$$

$$a'_P = \frac{a_P}{\alpha}$$

$\alpha$  是亚松弛因子。本文对速度温度均取  $\alpha = 0.5$ ，对压力取  $\alpha = 0.45$ 。计算中使用了  $G$ - $S$  逐点迭代，内迭代次数均为 4 次。对压力、速度的耦合本文采用了 Date<sup>[11]</sup> 修正的 SIMPLE 算法，这个算法以预估 - 校正的形式考虑了对流项，扩散项和源项的影响。因为使用了同位网格，在求压力泊松方程的质量源项时，界面速度插值使用了动量插值，以避免出现压力，速度的棋盘式分布<sup>[12]</sup>。

## 3 数值计算结果及讨论

计算一方面采用与文献 [10] 相同的均匀网格，

$Ra$  为  $10^3, 10^4, 10^5$  和  $10^6$  的网格点数为  $101 \times 101$ ;  $Ra$  为  $10^7, 2 \times 10^7, 4 \times 10^7$  和  $10^8$  的网格点数为  $301 \times 301$ ; 另一方面为了捕捉高 Rayleigh 数带来的高梯度、薄边界层效应, 对  $Ra = 10^7, Ra = 10^8$  也采用了如图 3 所示的边界局部加密的非均匀网格, 网格点数为  $161 \times 161$ . 由于 UPFV 格式中无论两相

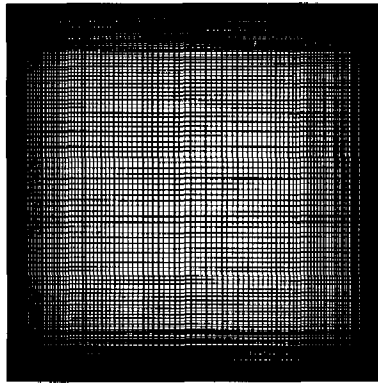


图 3 边界加密网格 ( $161 \times 161$ )

Fig.3 Refined locally grid on boundary

邻控制体中心到公共界面的距离相等或不相等, PFV 格式公式 (11) 相同, 所以该公式可直接用于非均匀网格. 本文计算结果与诸文献计算结果的比较见表 1~ 表 4.

表 1~ 表 3 中同时给出了流函数 - 涡量法、空间二阶中心差分离散<sup>[13]</sup>、基于特征分裂 (CBS) 半隐格式<sup>[14]</sup>、人工压缩修正连续性方程方法<sup>[15]</sup>、两次显式, 一次半隐的投影法<sup>[16]</sup>、 $h$  自适应有限元方法<sup>[17]</sup> 以及 DSC 和有限元方法<sup>[10]</sup> 的数值结果.

壁面局部  $Nu$  数定义为  $Nu_{local} = \pm \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{wall}$ , 壁面平均  $Nu$  数定义为  $\bar{Nu} = \int_0^1 Nu_{local} dy$ .

从表 1~ 表 3 可知, 在已有的几种 Benchmark 解的数据之间存在一定差别, 应当认为自适应有限元法计算结果精度最高. 相对于自适应有限元法结果, 当  $10^3 \leq Ra \leq 10^7$ , 诸文献垂直中线  $u_{max}$  最大偏差分别为 4.4%, 1.3%, 4%, 1.33%, 3.83%, PFV 格式  $u_{max}$  偏差分别为 0.005%, 0.03%, 0.008%, 0.6%, 2.78%; 同样可知诸文献中水平中线  $v_{max}$  最大偏差

表 1 垂直中线  $x = 0.5$  上速度水平分量最大值  $u_{max}$  比较

Table 1 Comparison of maximum vertical ( $u$ ) at the mid-width ( $x = 0.5$ )

$Ra$	Ref.[13]	Ref.[15]	Ref.[17]	Ref.[10](FEM)	Ref.[10](DSC)	Present work by PFV
$10^3$	3.634(0.813)	3.68(0.817)	3.649 3(0.8125)	3.489(0.813)	3.643 4(0.8167)	3.649 1(0.8149)
$10^4$	16.2(0.823)	16.1(0.817)	16.179 8(0.8235)	16.122(0.815)	15.967(0.8167)	16.175 0(0.8249)
$10^5$	34.81(0.855)	34.0(0.857)	34.774 1(0.8535)	33.39(0.835)	33.51(0.85)	34.777 1(0.8549)
$10^6$	65.33(0.851)	65.4(0.875)	64.691 2(0.8460)	65.40(0.86)	65.55(0.86)	65.059 8(0.8549)
$10^7$	—	139.7(0.919)	145.266 6(0.8845)	143.56(0.922)	145.06(0.92)	149.311 6(0.8783)
$2 \times 10^7$	—	—	—	175.28(0.93)	175.22(0.93)	194.475 9(0.9050)
$4 \times 10^7$	—	—	—	216.85(0.93)	216.67(0.94)	260.344 9(0.9316)
$10^8$	—	—	283.689(0.9455)	296.71(0.93)	295.67(0.94)	306.118(0.9316)

表 2 水平中线  $y = 0.5$  上速度垂向分量最大值  $v_{max}$  比较

Table 2 Comparison of maximum vertical ( $v$ ) at the mid-height ( $y = 0.5$ )

$Ra$	Ref.[13]	Ref.[16]	Ref.[14]	Ref.[15]	Ref.[17]	Ref.[10](FEM)	Ref.[10](DSC)	PFV
$10^3$	3.679(0.179)	—	3.692	3.73(0.1827)	3.696 2(0.1790)	3.686(0.188)	3.686(0.183)	3.696 3(0.175)
$10^4$	19.51(0.12)	19.62	19.63	19.9(0.1246)	19.6177(0.1195)	19.79(0.12)	19.98(0.117)	19.610 2(0.115)
$10^5$	68.22(0.066)	68.2	68.85	70.0(0.068)	68.6920(0.0665)	70.63(0.072)	70.81(0.070)	68.66(0.065)
$10^6$	216.75(0.0387)	232.97	221.6	228(0.039)	220.833 1(0.0380)	227.11(0.040)	227.24(0.040)	220.775(0.0349)
$10^7$	—	717.04	702.3	698(0.0235)	703.253 6(0.0215)	714.48(0.022)	714.47(0.021)	700.288(0.0216)
$2 \times 10^7$	—	—	—	—	—	995.33(0.0156)	1017.84(0.02)	991.6415(0.0183)
$4 \times 10^7$	—	—	1417	—	—	1435.5(0.0156)	1419.84(0.0133)	1409.63(0.015)
$10^8$	—	—	—	—	2223.442 4(0.013)	2259.08(0.012)	2290.13(0.013)	2228.508(0.0116)

表 3 壁面最大、最小和平均努赛尔特数 ( $Nu_{max}$ ,  $Nu_{min}$ ,  $Nu_{ave}$ ) 及其坐标位置比较

Table 3 Comparison of  $Nu$  number and the corresponding ordinate (max., min., ave.)

$Ra$	$Nu$	Ref.[13]	Ref.[16]	Ref.[14]	Ref.[15]	Ref.[17]	Ref.[10](FEM)	Ref.[10](DSC)	PFV
$10^3$	max.	1.50(0.092)	—	—	1.47(0.109)	1.506 2(0.089 56)	1.501(0.08)	1.444(0.091 7)	1.506 8(0.085)
	min.	0.692(1.0)	—	—	0.623(1.0)	0.6913(1.0)	0.691(1.0)0.815)	0.665(1.0)	0.691 1(0.995)
	ave.	1.12	—	1.117	1.074	—	1.117	1.073	1.117 8
$10^4$	max.	3.53(0.143)	3.5	—	3.47(0.125)	3.530 5(0.142 6)	3.579(0.13)	3.441(0.133 3)	3.538 7(0.145)
	min.	0.586(1.0)	—	—	0.497(1.0)	0.585 0(1.0)	0.577(1.0)	0.528(1.0)	0.585 2(0.995)
	ave.	2.243	—	2.243	2.084	—	2.254	2.155	2.247
$10^5$	max.	7.71(0.08)	7.71	—	7.71(0.08)	7.7084(0.083 53)	7.945(0.08)	7.662(0.085)	7.797 1(0.750)
	min.	0.729(1.0)	—	—	0.614(1.0)	0.7282(1.0)	0.698(1.0)	0.678(1.0)	0.730(0.995)
	ave.	4.52	—	4.521	4.3	—	4.598	4.352	4.537
$10^6$	max.	19.72(0.038)	17.0	—	17.46(0.039)	17.530 8(0.037 68)	17.86(0.03)	17.39(0.04)	18.451(0.035)
	min.	0.989(1.0)	—	—	0.716(1.0)	0.984 5(1.0)	0.913 2(1.0)	0.903(1.0)	0.998 3(0.995)
	ave.	8.8	—	8.806	8.743	—	8.976	8.632	8.951
$10^7$	max.	—	30.0	—	30.46(0.024)	41.024 7(0.038 99)	38.6(0.015)	31.02(0.02)	40.3234(0.015)
	min.	—	—	—	0.787(1.0)	1.3799(1.0)	1.298(1.0)	0.997(1.0)	1.389 3(0.998)
	ave.	—	—	16.40	13.99	—	16.656	13.86	16.589
$2 \times 10^7$	max.	—	—	—	—	—	48.84(0.015)	39.343(0.015)	51.919(0.011 6)
	min.	—	—	—	—	—	1.437(1.0)	1.106(1.0)	1.570 5(0.998)
	ave.	—	—	—	—	—	19.97	15.46	19.939 0
$4 \times 10^7$	max.	—	—	—	—	—	61.69(0.015)	49.908(0.015)	68.190(0.008 3)
	min.	—	—	—	—	—	1.59(1.0)	1.245(1.0)	1.760 0(0.998 0)
	ave.	—	—	—	23.64	—	23.96	18.597	24.109 2
$10^8$	max.	—	—	—	—	91.2095(0.067)	91.16(0.010)	68.73(0.010)	99.824(0.008 3)
	min.	—	—	—	—	2.044(1.0)	1.766(1.0)	1.428(1.0)	1.890 0(0.998 3)
	ave.	—	—	—	—	—	31.486	23.67	31.058 9

表 4  $301 \times 301$  均匀网格与  $161 \times 161$  均匀网格计算结果比较

Table 4 Comparison of results by uniform grid ( $301 \times 301$ ) and non-uniform grid ( $161 \times 161$ )

$Ra$	$u_{max}$	$v_{max}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$	$Nu_{ave}$	
$10^7$	144.877 4(0.877 8)	700.880(0.021 19)	38.821 0(0.017 85)	1.420 1(0.999 7)	16.4423	non-uniform
$10^7$	149.311 6(0.878 3)	700.288(0.021 6)	40.323 4(0.015)	1.389 3(0.998)	16.589	uniform
$10^8$	295.834 1(0.935 0)	2 226.698 0(0.012 2)	87.342 8(0.008 64)	2.058 2(0.999 7)	30.156 9	non-uniform
$10^8$	306.118(0.931 6)	2 228.508(0.011 6)	99.824(0.008 3)	1.890 0(0.998 3)	31.058 9	uniform

分别为 0.46%, 1.85%, 3.08%, 5.5%, 1.96%, PFV 格式  $v_{max}$  偏差分别为 0.003%, 0.038%, 0.046%, 0.026%, 0.42%; 诸文献中热壁  $Nu_{max}$  的最大偏差分别为 4.13%, 2.53%, 3.06%, 12.48%, 26.8%,  $Nu_{min}$  的最大偏差分别为 9.87%, 8.8%, 15.68%, 27%, 42.96%, PFV 格式  $Nu_{max}$  偏差分别为 0.04%, 0.23%, 1.15%, 5.24%, 1.71%, PFV 格式  $Nu_{min}$  偏差分别为 0.03%, 0.034%, 0.18%, 1.4%, 1.7%。可见, 当  $10^3 \leq Ra \leq 10^7$  ( $Ra$  为  $10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ ), PFV 格式给出的水平中线  $v_{max}$ , 垂直中线  $u_{max}$ , 热壁上的  $Nu_{max}, Nu_{min}$  确实

与参考文献自适应有限元法计算结果符合较好。

当  $2 \times 10^7 \leq Ra \leq 4 \times 10^7$  时, 自适应有限元法没有给出结果, 仅文献 [10] 给出结果。但文献 [10] 本身给出的有限元和 DSC 两种方法计算结果之间也存在较大差别, 以其有限元计算结果为准, 其 DSC 法给出的  $u_{max}$  偏差分别为 0.03%, 0.08%,  $v_{max}$  偏差分别为 2.26%, 1.1%, 热壁  $Nu_{max}$  偏差分别为 19.45%, 19.1%, 热壁  $Nu_{min}$  偏差分别为 23.03%, 21.7%。可见文献 [10] 的 DSC 法与其有限元法之间在热计算上存在较大差别。PFV 格式与文献 [10] 有限元法  $u_{max}$

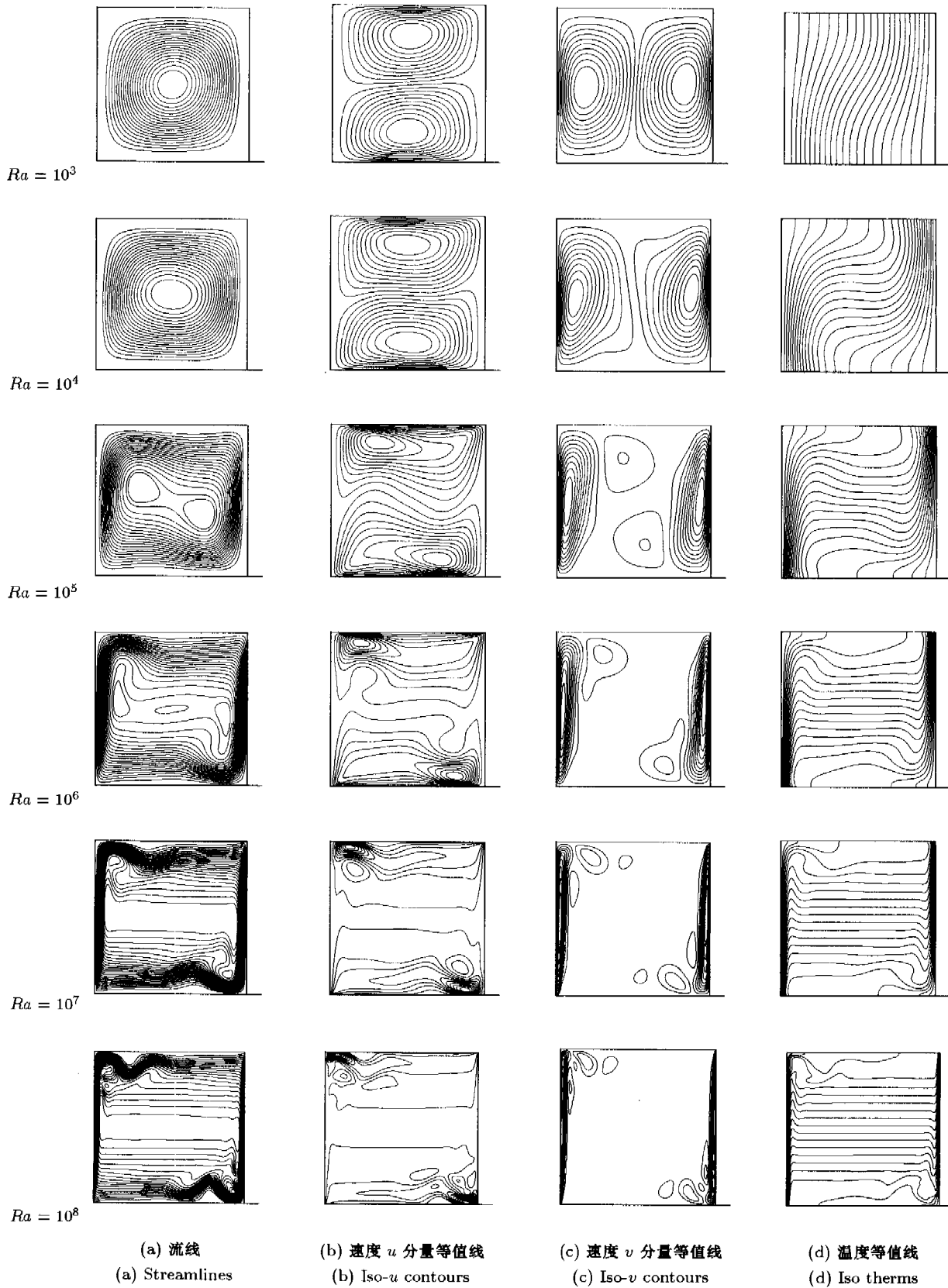


图 4  
Fig.4

偏差分别为 10.95%, 20.05%,  $v_{\max}$  偏差分别为 0.37%, 1.80%, 热壁  $Nu_{\max}$  偏差分别为 6.3%, 10.53%, 热壁  $Nu_{\min}$  偏差分别为 9.2%, 10.69%。从对比可知, PFV 的热计算结果比 DSC 结果更接近有限元; 而 DSC 的  $u_{\max}$  比 PFV 格式计算结果接近有限元。但由于关于这一 Rayleigh 数范围内的研究文献缺乏, 所以比较难对这一差异分析。

当  $Ra = 10^8$ , 自适应有限元法给出了结果。文献 [10] 相对自适应有限元法的  $u_{\max}$  最大偏差为 4.58%,  $v_{\max}$  最大偏差为 3.0%,  $Nu_{\max}$  最大偏差为 24.64%,  $Nu_{\min}$  最大偏差为 30.1%; PFV 相对自适应有限元法的  $u_{\max}$  偏差 7.9%,  $v_{\max}$  偏差 0.22%,  $Nu_{\max}$  偏差 9.4%,  $Nu_{\min}$  偏差 7.5%。可以看出, 除了  $u_{\max}$ , PFV 格式比文献 [10] 的 DSC 格式的结果更接近自适应有限元结果。虽然 PFV 格式对自适应有限元法结果的相对误差比低  $Ra$  数时有所增大, 但实际上,  $Ra = 10^8$  已经接近层流向湍流的转换, 层流模型是否仍实用, 尚有不同看法。

从表 4 可知, 在高 Rayleigh 数, 使用边界加密网格, 只用了相当于均匀网格一半的单元就能获得与均匀网格几乎相同的结果, 表明 PFV 格式具有对非均匀网格的良好适应性。

从图 4 可以看出, UPFV 格式捕捉到了速度、温度的剧烈变化, 内波的跳跃。从图 4(a) 可以看出, 随 Rayleigh 数增加, 中心涡开始分裂, 分别向左右壁面靠近; 随 Rayleigh 数进一步增大, 靠近热壁的涡沿壁面上升, 靠近冷壁的涡沿壁面下降, 驻留在角点附近。在高 Rayleigh 数的情况下 ( $Ra \geq 10^7$ ), 垂向壁面温度边界层变得很薄, 表明热交换非常强烈, 速度水平壁面边界层开始分离, 出现回流区, Rayleigh 数再继续增大, 将发展成为湍流, 这验证了 Incropera 等 [8] 的结论。

## 4 结 论

对流扩散方程的摄动有限体积格式模拟自然对流结果表明: 该格式使用基点数最少, 形式简单, 重构近似精度和分辨率高; Rayleigh( $Ra$ ) 数适用范围广, 对  $Ra$  数从  $10^3$  到  $10^8$  的计算, 亚松弛系数可以保持不变; 该格式能适用于结构、非结构以及结构-非结构混合网格, 适用于均匀和非均匀网格, 且可方便地直接应用到三维情况; 与 SIMPLE 系列算法紧密结合, 使得 PFV 格式适宜作对流传热问题大型工程计算。

## 参 考 文 献

- 1 Jones IP. A Comparison Problem for Numerical Methods in fluid Dynamics: The Double Glazing Problem. In: Lewis RW, Morgan K, eds. Numerical Methods in Fluids, Numerical Methods in Fluids in Thermal Problems. Swansea: Pineridge Press, UK, 1979. 338~348
- 2 Ferziger JH, Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics (2nd edit). New York: Springer Verlag, 1999. 25~26
- 3 Jameson A, Baker TJ. Multigrid solution of the Euler equations for aircraft configurations. AIAA-84-0093, 1984
- 4 Jameson A, Yoon S. Lower-upper implicit schemes with multiplegrid for the Euler equations. *AIAA J*, 1987, 25(7): 929~935
- 5 Liou M, Steffen CJ. A new flux splitting scheme. *J Comp Phys*, 1993, 107(1): 23~39
- 6 Liou M. A sequel to AUSM: AUSM<sup>+</sup>. *J Comp Phys*, 1996, 129(2): 364~382
- 7 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积方法及讨论. 力学学报, 2004, 36(1): 88~93 (Gao Zhi. Discussions about the perturbational finite volume methods for diffusive & convective equation. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(1): 88~93 (in Chinese))
- 8 Incropera FP, DeWitt DP. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 4th ed. New York: Wiley, 1996
- 9 Paolucci S, Chenoweth DR. Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity. *J Fluid Mech*, 1989, 201: 379~410
- 10 Wan DC, Patnaik BSV, Wei GW. A new bench mark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 2001, 40: 199~228
- 11 Date AW, Numerical prediction of natural convection heat transfer in horizontal annulus. *Int J Heat Mass Transfer*, 1986, 29(10): 1457~1464
- 12 Rhie CM, Chow WL. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. *AIAA J*, 1983, 21(11): 1525~1532
- 13 de Vahl Davis D. Natural convection of air in a square cavity: A bench mark solution. *Int J Numer Meth Fluids*, 1983, 3(3): 249~264
- 14 Massarotti N, Nithiarasu P, Zienkiewicz OC. Characteristic-based-split (CBS) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer. *Int J Numer Meth Heat Fluid Flow*, 1998, 8(8): 969~990
- 15 Manzari MT. An explicit finite element algorithm for convective heat transfer problems. *Int J Numer Meth Heat Fluid Flow*, 1999, 9(8): 860~877
- 16 Ramaswamy B, Jue TC, Akin JE. Semi-implicit and explicit finite element schemes for coupled fluid/thermal problems. *Int J Numer Meth Eng*, 1992, 34(2): 675~696
- 17 Mayne DA, Usmani AS, Crapper M. h-adaptive finite element solution of high rayleigh number thermally driven cavity problem. *Int J Numer Meth Heat Fluid Flow*, 2000, 10(6): 598~615

## SOLVING 2-D BUOYANCY-DRIVEN CAVITY FLOW ON COLLOCATED MESHES BY PERTURBATIONAL FINITE VOLUME SCHEME<sup>1)</sup>

Dai Minguo<sup>2)</sup> Gao Zhi

(*Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

**Abstract** The buoyancy-driven cavity flow in the case of  $Ra = 10^3$  to  $Ra = 10^8$  is numerically simulated with the upwind type of perturbation finite volume (UPFV) scheme for the convective and diffusive equations initiated by the second author. The UPFV scheme for diffusive and convective equations takes the same concise expressions and uses the same nodes as the upwind scheme of the first order and high approximate accuracy of reconstruction can be achieved. Especially, the UPFV scheme is identical for uniform grid and non-uniform grid regardless of the distance from the CV center to the common face. The results of numerical simulations to buoyancy-driven cavity flows by UPFV are consistent with these by spectral method and finite element method and DSC in the range from  $Ra = 10^3$  to  $Ra = 10^8$  with uniform or non-uniform structured grid. It shows that the PFV scheme is valid and can be applied for the heat convection and transfer problems.

**Key words** collocated grid, structured grid, perturbation finite volume scheme, natural convection, SIMPLE algorithm revised by Date

Received 1 February 2005, revised 11 April 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10032050, 10272106).

2) E-mail: 20108009@sohu.com