

四边固定载流矩形薄板的磁弹性稳定性分析

王知人^{1,2}, 王平^{1,3}, 白象忠^{1,3}

(1. 中国科学院力学研究所, 国家非线性连续介质力学重点实验室(LNM), 北京 100080;
2. 燕山大学理学院, 秦皇岛 066004; 3. 燕山大学建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004)

摘要: 本文针对四边固定载流矩形薄板, 利用 Mathieu 方程解的稳定性, 研究其在电磁场与机械荷载共同作用下的磁弹性稳定性问题。首先在载流薄板的磁弹性非线性运动方程、物理方程、几何方程、洛仑兹力表达式及电动力学方程的基础上, 导出了载流薄板在电磁场与机械荷载共同作用下的磁弹性动力稳定方程, 然后应用 Galerkin 方法将稳定方程整理为 Mathieu 方程的标准形式, 并将薄板的动力稳定性问题归结为对 Mathieu 方程的求解。利用 Mathieu 方程的稳定解区域与非稳定解区域的分界, 即方程系数 λ 和 η 的本征值关系, 得出了磁弹性问题失稳临界状态的判别方程。通过具体算例, 给出了四边固定载流矩形薄板的磁弹性动力失稳临界状态与相关参量之间的关系曲线, 并对计算结果及其变化规律进行了分析讨论。

关键词: 磁弹性; 洛伦兹力; 稳定性; Mathieu 方程

中图分类号: O441 **文献标识码:** A **文章编号:** 0254-0053(2006)01-137-6

Magnetic-Elasticity Stability Analysis of a Rectangular Thin Current Plate Clamped at Each Edge

WANG Zhi-ren^{1,2}, WANG Ping^{1,3}, BAI Xiang-zhong^{1,3}

(1. The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical(LNM), Beijing 100080, China;
2. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;
3. College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: The magnetic-elasticity stability problem of a current plate clamped at each edge, which is under the action of mechanical load in magnetic field, was studied by using the stability of Mathieu equation's solution in this paper. At first, based on nonlinear magnetic-elasticity kinetic equations, physical equations, geometric equations, the expressions of Lorentz forces and electrodynamics equations, the magnetic-elasticity kinetic steady equation of the problem were derived. Then, the equation was changed into the standard form of the Mathieu equation using Galerkin method. So, the stability problem is transformed to solve a Mathieu equation. By discussing the eigenvalue relation of the coefficient λ and η in Mathieu equation, means determining the boundary lines between the steady and unsteady solution areas of Mathieu equation, the criterion equation of the problem is presented here. As an example, a current plate clamped at each edge was solved. The curves of the relations among the parameters when the plate is in the critical situation of steady are shown in the paper. The calculated answers and the regularity of parameters variation are also discussed.

Key words: magnetic-elasticity; Lorentz force; stability; Mathieu equation

磁弹性理论是在上个世纪后期发展起来的一个理论分支。由于磁弹性理论所研究的问题具有非常显

收稿日期: 2005-10-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50275128), The National Natural Science Foundation of China (50275128)

作者简介: 王知人(1964-), 女, 湖北省黄石市人, 副教授, 博士研究生。研究方向: 载流薄板的磁弹性稳定性问题分析。

著的耦合效应,必将在能源、交通、国防等方面有着广泛的应用前景,因此对其相关理论的研究具有非常重要的意义^[1,2]。

电磁弹性系统在没有受到机械约束时,系统至少存在一个不稳定运动模态;而当约束存在时,通入电流的强度或周围磁场强度达到某一临界值时,系统亦将发生失稳现象。因此,磁弹性结构的稳定性问题分析是一个重要的理论和应用课题。目前为止,对磁弹性稳定性问题的理论研究,主要集中在铁磁性薄板屈曲理论模型的建立及分析方法的研究上^[2-6],对 Tokamak 核聚变反应堆环向磁场载流线圈及载流杆件的稳定性研究是颇具代表性的^[7,8]。而实际工程中存在许多非铁磁材料载流薄板在电磁场与机械荷载共同作用下的稳定性问题,因此,对磁弹性稳定问题的研究就成为力学工作者近年来十分关注的研究课题之一。本文将载流构件磁弹性稳定性问题,由线圈、杆件拓展到非铁磁材料载流薄板的动力稳定性问题的研究上,得到了一些全新的结论,具有一定的理论与应用价值。

1 基本方程

1.1 载流薄板的磁弹性动力稳定性方程式的建立

对于载流弹性薄板,将沿厚度分布的洛仑兹力作为载荷简化到薄板的中面内,其分量分别记为 ρf_x 、 ρf_y 、 ρf_z ,将其加入到板运动方程中^[1],即可得到板的磁弹性运动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + P_x + \rho f_x &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y + \rho f_y &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_z + \rho f_z &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= \frac{\rho h}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}, & \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= \frac{\rho h}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

式中 h 为板厚, ρ 为质量密度, P_x, P_y, P_z 为机械载荷分量, N_x, N_{xy}, N_{yx} ; Q_x, Q_y ; M_x, M_{xy}, M_y 为内力分量, θ_x, θ_y 为角位移分量。

1.2 薄板的磁弹性动力稳定方程

由于 $u \ll w, v \ll w$,在薄板的动力屈曲问题中一般仅考虑挠度引起的惯性力,忽略位移 u, v 、及转角引起的惯性力,忽略薄板的自重。根据薄板的小挠度理论,磁弹性运动方程可进一步简化为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_z + \rho f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

弯矩与曲率改变量和挠度的关系为

$$\begin{aligned} M_x &= D_M (\chi_x + \nu \chi_y) = -D_M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= D_M (\chi_y + \nu \chi_x) = -D_M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = D_M (1 - \nu) \chi_{xy} = -D_M (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ 为曲率改变量与挠度的关系。将(3)式代入(2)式中整理得

$$-D_M \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_z + \rho f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

设屈曲挠度解为 $w(x, y, t) = W(x, y) \Theta(t)$ (5)

式中 $\Theta(t)$ 表示时间 t 的函数, $W(x, y)$ 为屈曲挠度函数。

将屈曲挠度代入方程式(4)中,得载流薄板的磁弹性动力稳定性方程

$$-\frac{\nabla^4 W}{W} + \frac{1}{D_M W} \left[N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{P_x + \rho f_x}{\Theta(t)} \right] = \frac{\rho h}{D_M \Theta(t)} \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} \quad (6)$$

2 载流薄板磁弹性动力失稳临界状态的判别

动力屈曲是指板壳结构对动力荷载相应的屈曲破坏。在参数空间的某些区域中,参数的改变所引起的运动的变化很小,然而在另外一些区域中,参数的改变将引起振幅迅速增大趋于发散而发生屈曲破坏。因此动力稳定性的研究就是要找出参数空间中这种收敛域与发散域的边界,即系统的动力稳定性边界。现给出四边固定载流矩形薄板磁弹性动力失稳临界状态的计算及判别方程。

如图 1 所示,四边固定矩形薄板,长 a ,宽 b ,通侧向电流 $(0, J_{cl2}, 0)$,处于外加横向磁场 $(0, 0, B_{03})$ 中。

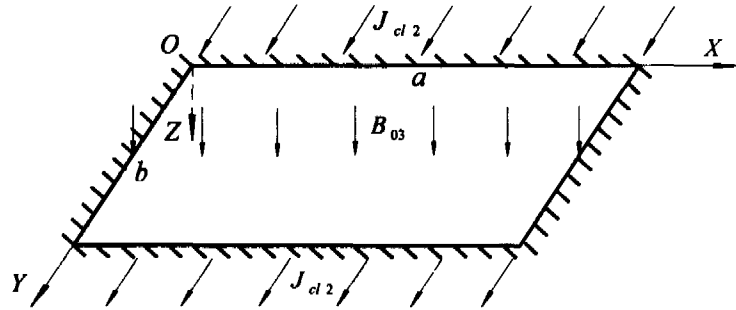


图 1 四边固定矩形薄板上电流磁场分布图

Fig. 1 The distribution diagram of the current density and the strength of the applied magnetic field the thin fixed supported plate

其中 J_{cl2} 为从 y 方向通入的侧向电流, B_{03} 为垂直于薄板中面的磁感应强度。四边简支薄板边界条件为

$$\begin{aligned} x=0, \quad a: w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ y=0, \quad b: w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

将电流条件 $(0, J_{cl2}, 0)$, 磁场条件 $(0, 0, B_{03})$ 代入洛伦兹力的表达式^[1]中可得到: $\rho f_y = 0, \rho f_z = 0, \rho f_x = J_{cl2} h B_{03}$, 且 ρf_x 可视为简化到中面上的均布随从力^[1]。设 P_1, P_2, P_{12} 分别为矩形板承受的中面压力, 有: $N_x = \int_x^a \rho f_x dx + P_1 = \rho f_x (a - x) + P_1, N_y = P_2, N_{xy} = P_{12}$ 。将其代入动力稳定性方程式(6)中, 因无外加横向荷载 ($P_x = 0$), 可得

$$\rho h \frac{\partial^2 \Theta(t)}{\partial t^2} W + \left\{ D_M \nabla^4 W - [\rho f_x (a - x) + P_1] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2P_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - P_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} \Theta(t) = 0 \quad (8)$$

由 Galerkin 原理有

$$\iint_S \left\{ \rho h \frac{\partial^2 \Theta(t)}{\partial t^2} W + \left[D_M \nabla^4 W - (\rho f_x (a - x) + P_1) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2P_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - P_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \Theta(t) \right\} \delta W ds = 0 \quad (9)$$

设屈曲挠度函数为
$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \quad (10)$$

显然满足所有边界条件, 式中的 m, n 分别为 X, Y 方向板屈曲波形的半波数。将其代入式(9), 得

$$\begin{aligned} \iint_S \left\{ \rho h \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \right) + \right. \\ \left. \left[D_M \nabla^4 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\rho f_x(a-x) - P_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) \right) - \\
 & 2P_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) - \\
 & P_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) \Big] \Theta(t) \Big\} \times \\
 & \left(\delta \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) \right) ds = 0
 \end{aligned}$$

对式中各项先求偏导,再进行积分得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left\{ \frac{9\rho hab}{4} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \left[4D_M \pi^4 \left(\frac{3bm^4}{a^3} + \frac{2m^2 n^2}{ab} + \frac{3an^4}{b^3} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\frac{1}{2} \rho f_x a - P_1 \right) \frac{3bm^2 \pi^2}{a} + P_2 \frac{3an^2 \pi^2}{b} \right] \Theta(t) \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

上式中 A_{mn} 不能全部为零,所以有

$$\begin{aligned}
 & \frac{9\rho hab}{4} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \left[4D_M \pi^4 \left(\frac{3bm^4}{a^3} + \frac{2m^2 n^2}{ab} + \frac{3an^4}{b^3} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{1}{2} \rho f_x a - P_1 \right) \frac{3bm^2 \pi^2}{a} + P_2 \frac{3an^2 \pi^2}{b} \right] \Theta(t) = 0
 \end{aligned} \quad (12)$$

将 $\rho f_x = J_{c12} h B_{03}$ 代入上述方程,令 $\Theta(t) = T$, $J_{c12} = J \cos \bar{\omega} t$ ($\bar{\omega}$ 为电流的变化频率),并设 $P_1 = P_{01} + P \cos \bar{\omega} t$, $P_2 = P_{02} + \alpha P \cos \bar{\omega} t$,式中: P_{01} 、 P_{02} 分别为 P_1 、 P_2 静载部分; P 为脉动中面荷载的振幅; α 是中面荷载之间的比例系数。式(12)可整理得

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + (\lambda - \eta \cos 2r) T = 0 \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{16\pi^2}{9\rho h \bar{\omega}^2} \left[4D_M \pi^4 \left(\frac{3m^4}{a^4} + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{3n^4}{b^4} \right) - P_{01} \frac{3m^2}{a^2} - P_{02} \frac{3n^2}{b^2} \right] \\
 \eta &= \frac{16\pi^2}{9\rho h \bar{\omega}^2} \left[\left(-\frac{JhB_{03}a}{2} + P \right) \frac{3m^2}{a^2} + \alpha P \frac{3n^2}{b^2} \right]; \quad r = \frac{1}{2} \bar{\omega} t
 \end{aligned}$$

方程(13)是标准的 Mathieu 方程。它是系数为周期函数的方程,此方程最重要的性质就是当它的系数间存在某种关系时,方程式就具有无限增长的解。式中系数 λ 与 η 之间的本征值关系,是稳定解区域与非稳定解区域的分界。应用 Mathieu 方程的这种性质,可确定载流薄板的失稳临界状态。其本征值关系的表达式参见文献[10],由本征值关系式,可得到动力稳定区与非稳定区的分界线,而最低阶动力屈曲临界状态的求解更具有实际意义。

3 算例分析

现以由中碳钢制成的四边固定矩形薄板为例,讨论其在电磁场作用下的稳定性问题。计算采用的相关参数为:板长 $a = 0.6\text{m}$ 、板宽 $b = 0.2\text{m}$,质量密度 $\rho = 7.80 \times 10^3 \text{kg/m}^3$,电导率 $\sigma = 0.63 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$,弹性模量 $E = 210\text{GPa}$,泊松比 $\nu = 0.25$,圆频率 $\bar{\omega} = 314.16\text{s}^{-1}$,磁导率 $\mu = 7.5 \times 10^{-3} \text{H/m}$ 的非铁磁性钢板。依据前面所得的判别方法,令 $n = 0$,得最低阶的四组本征值基本公式^[10]: $\lambda = a_0(\eta)$, $\lambda = b_2(\eta)$, $\lambda = a_1(\eta)$, $\lambda = b_1(\eta)$,用 MATLAB 语言编制计算程序,计算结果如图 2、3、4、5 所示。

图 2 描述了四边固定载流矩形薄板在板中面内施加 X 向静荷载 $P_1 = P_{01}$ 时,板厚 $h = 0.7\text{mm}$,

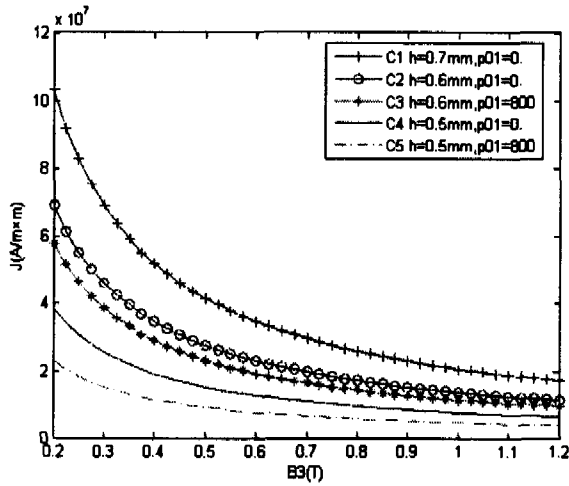


图 2 磁感应强度与临界电流密度的关系图

Fig.2 The relation between magnetic induction density and the current density

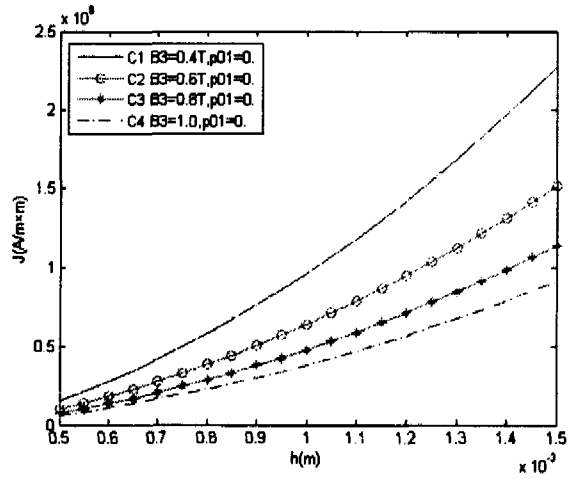


图 3 板厚与临界电流密度的关系图

Fig.3 The diagram of the current density the thickness of the plate

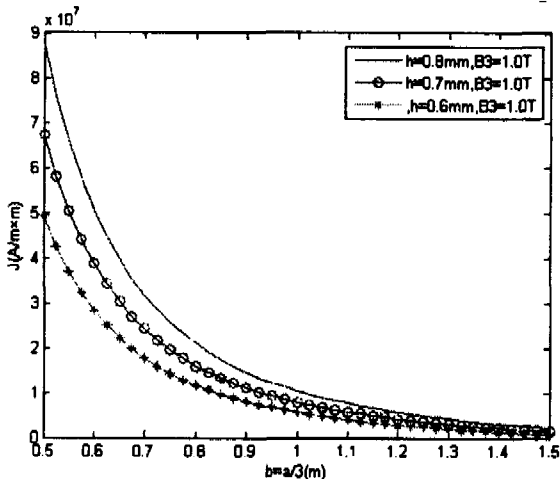


图 4 板长与电流密度关系图(不同板厚)

Fig.4 The diagram of the current density-length of the plate in different condition of thickness

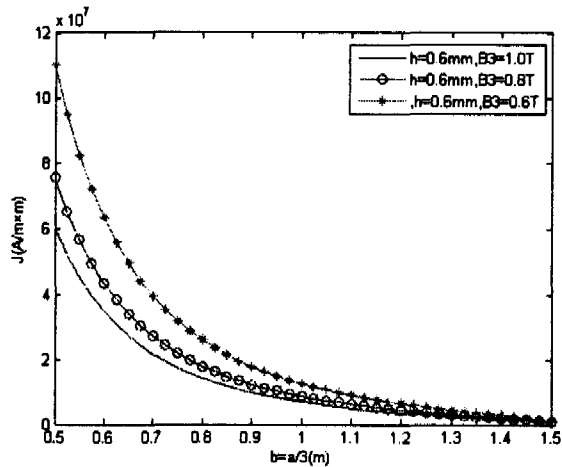


图 5 板长与电流密度关系图(不同磁场)

Fig.5 The diagram of the current density-length of the plate in different condition of magnetic strength

0.6mm, 0.5mm 情况下, 外加磁感应强度与失稳临界电流密度 J 之间的关系。从曲线 C1、C2、C3、C4、C5 可看到, 当外加磁场强度和 P_{01} 一定时, 板厚的增加将使失稳临界状态的电流密度有所增加, 这也说明增加板厚, 板的抗失稳能力将增强。另外, 当板的厚度和外加磁感应强度一定时, 在板中面内施加 X 向静荷载 P_{01} 越大, 板的失稳临界状态的电流密度越低。从曲线 C1、C2、C4 也可看到, 外加磁感应强度对失稳临界电流密度影响较大, 当磁感应强度在 0.2T~1.2T 之间变化时, 随着磁感应强度的增加, 失稳临界电流密度将显著降低: 以曲线 C4 ($h = 0.5\text{mm}$) 为例, 当 $B = 0.2\text{T}$ 时, 失稳临界状态的电流密度 $J = 3.839 \times 10^7 \text{A/m}^2$, 当 $B = 0.6\text{T}$ 时, 失稳临界状态的电流密度 $J = 1.28 \times 10^7 \text{A/m}^2$, 而当 $B = 1.0\text{T}$ 时, 失稳临界状态的电流密度 $J = 7.677 \times 10^6 \text{A/m}^2$, 后者只是前者的 20%。由于通过 Mathieu 方程求解的失稳临界电流密度与磁场强度的关系较为复杂, 在图 2 所讨论的条件下, 随着磁感应强度的增加, 失稳临界电流密度逐渐降低。这表明: 导电薄板在电磁场的作用下, 通过改变通入电流的强度, 可以控制薄板工作状态下的稳定性。

图 3 显示了在不同的磁场强度下, 失稳临界电流密度随薄板厚度的变化关系曲线。从图中的四条曲线可看到, 随着薄板厚度从 0.5mm 增加到 1.5mm 时, 失稳临界电流密度也随之呈抛物线型增加, 另外也可看到, 磁场强度对薄板失稳临界电流密度的数值影响较大。例如, 厚度为 0.5mm 的钢板, 当 $B = 0.4\text{T}$

时,失稳临界电流密度 $J = 1.567 \times 10^7 \text{ A/m}^2$ (见曲线 C1); 当 $B = 1.0 \text{ T}$ 时,失稳临界电流密度降低为 $J = 6.269 \times 10^6 \text{ A/m}^2$,降低了 60% (见曲线 C4)。也就是说磁场强度的增加将引起失稳临界电流密度显著降低。

图 4 是当磁感应强度 $B = 1.0 \text{ T}$ 时,以矩形薄板的长度 a 为横坐标,失稳临界电流密度 B 为纵坐标,变化薄板的厚度来讨论他们之间的相互关系。从图中三条曲线可见,随着薄板的长度的增加,失稳临界电流密度呈下降趋势。另外,对比几条曲线,当电磁场单独作用时薄板厚度的变化对失稳临界电流密度的影响较为均匀。

图 5 显示了当薄板厚度一定,在不同的磁场强度下,板长与失稳临界电流密度之间的关系,可见失稳临界电流密度随板长的增加而减小的关系不变。同时本图从另一个方面验证了图 2 和图 3 所反映的问题:磁场强度对薄板失稳临界电流密度的数值影响较大。因此,降低磁场强度可以提高载流薄板在电磁场作用下的抗失稳能力。

4 结论

(1) 通过理论推导,给出了载电流薄板的磁弹性动力稳定性方程。应用 Galerkin 原理将动力稳定性方程整理为 Mathieu 方程的标准形式,并利用 Mathieu 方程的稳定解区域与非稳定解区域的分界,得出了磁弹性屈曲临界状态的判别方程,由此可计算载流薄板的磁弹性屈曲问题。

(2) 载流薄板失稳临界电流密度值与板的材料、外加磁场强度、板的厚度及几何尺寸有关。对于非铁磁性质中碳钢薄板,增加板的厚度,减小外加磁场的强度,缩小几何尺寸均可以提高失稳的临界电流密度的数值。

(3) 外加磁场强度的变化对载电流薄板失稳临界电流密度影响较大,减小外加磁场强度可以有效地提高临界电流密。从外加电磁场与通电电流之间的关系以及两者对薄板稳定性的影响来看,洛仑兹力是控制薄板屈曲问题的主要因素。由此,可以通过变化电磁场方向、强度和变化通电电流方向、密度,改变电磁力的状态,从而达到控制载流薄板的变形、应力应变状态及其稳定性的目的。

(4) 本文的研究结果,可供载流电磁结构的安全性、可靠性设计参考。

参考文献:

- [1] 白象忠. 板壳磁弹性理论基础[M]. 北京:机械工业出版社,1996,156-158.
- [2] 周又和,郑晓静. 电磁固体结构力学[M]. 北京:科学出版社,1999.
- [3] Moon F C, Pao Y H. Magnetoelastic buckling of a thin plate[J]. ASME J Appl Mech, 1968, 35(1):53-58.
- [4] Popelar C H. Postbuckling analysis of a magnetoelastic beam[J]. J Appl Mech, 1972,39:207-211.
- [5] Pao Y H, Yeh C S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids[J]. Int J Engng Sci, 1973,11(4):89-114.
- [6] Erigin A C. Theory of electromagnetic elastic plates[J]. Int J Engng Sci, 1989, 27(4):363-375.
- [7] 王省哲,郑晓静,周又和. 非圆 Tokamak 载流线圈的磁弹性分析[J]. 兰州大学学报(自然科学版),1999,35(1):34-43.
- [8] 王海滨,周又和,郑晓静. 超导磁体感应电流及其对电磁弹性动力稳定性的影响[J]. 核聚变与等离子体物理,2003,23(1):1-6.
- [9] 莫宵伊,计伊周,王忠民. 矩形薄板在非保守力作用下的动力稳定性[J]. 西安理工大学学报,2000,16(4):370-375.
- [10] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京:北京大学出版社,2000,601-628.
- [11] 吴连元. 板壳稳定性理论[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1996,36-37,246-249.