

损伤统计演化方程的性质和数值模拟¹⁾

白 洁 * 夏蒙焚 *** 柯孚久 **** 白以龙 *

*(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室, 北京 100080)

***(北京大学物理系, 北京大学非线性科学中心, 北京 100871)

****(北京航空航天大学应用数理系, 北京 100083)

摘要 通过对一种含成核尺寸效应的损伤统计演化方程性质的分析和数值模拟, 揭示了损伤率主要是由微损伤在二维相空间中的前沿的运动所决定的. 这也就是 Kachanov 提出的损伤率演化方程的物理基础. 数值结果进一步显示了含成核尺寸效应模型在损伤发展上与一维模型的区别. 而且, 由几种形式的细观动力学算出的损伤率与损伤的关系简单, 可近似拟合为宏观上封闭的形式.

关键词 微损伤, 统计演化, 演化率方程

引 言

固体材料的损伤累积和破坏作为一个具有重要工程实际意义的问题, 近年来一直是工程界和科学界关心的热点问题, 并相继提出了许多理论去解释和描述它. 例如, 连续体损伤力学^[1], 它在工程界已用于描述损伤. 但其主要困难是, 在使用中所假设的损伤演化规律, 无法和材料的损伤机理联系起来. 从材料设计和性能预测的目的而言, 这个方法几乎难以提供帮助. 统计细观损伤力学^[2~7] 提供了一条有可能沟通微损伤演化机理和宏观连续体损伤描述的途径. 根据对一些金属材料中损伤累积的实验观察, 微损伤的密度约为 $10^3 \sim 10^6/\text{mm}^3$, 特征尺度约为若干微米. 因此, 对于一个宏观微元, 例如 1mm^3 , 可以采用统计方法描写微损伤. 从统计力学的基本概念出发, 可以导出如下关于微损伤数密度演化的微分方程^[2]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^I \frac{\partial(nP_i)}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial(nQ_j)}{\partial q_j} = n_N - n_A \quad (0.1)$$

其中, $n(t, p_i, q_j, X; i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J)$ 为单位相空间中的微裂纹数; X 为环境和载荷参数; t 为广义时间; p_i, q_j 为描述微损伤状态的变量 (如微损伤的尺寸, 取向, 位置等); P_i 为 p_i 的变化率; Q_j 为 q_j 的变化率, 若 $Q_j = \dot{q}_j \cong 0$, 则 q_j 为微损伤演化中的隐变量; n_N 为微损伤的成核率; n_A 为微损伤的湮灭率.

迄今为止, 按统计演化方程处理微损伤群体的工作, 大体上可分两类, 一类是用一维微损伤统计演化方程描述微损伤群体的演化过程, 即只用一个状态变量, 微损伤的当前尺寸 c , 即可描述微损伤的状态, 从而描述微损伤的相空间是一维的. 如: 邢修三从 60 年代开始的工作^[3], 柯孚久等^[4], 黄筑平等^[6], 李强等^[7] 的工作. 另一类是利用逆问题的方法, 通过测量微损伤数密度来确定它的成核率^[8] 和扩展速率^[9]. 以及在具体问题的应用, 发现了疲劳短裂纹数密度

1997-01-30 收到第一稿, 1997-12-23 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (19572072, 19732060) 和航空科学基金资助项目.

演化的双峰现象^[10]. 文献 [9] 报导了在实验观测中, 发现微裂纹的扩展速率不仅与当前尺寸有关, 而且与其初始成核尺寸有关, 即 $V = V(c, c_0; \sigma)$, 其中 c 为当前裂纹尺寸, c_0 为裂纹初始成核尺寸^[9]. 尽管裂纹的初始成核尺寸在整个演化过程中是不变的, 从而成为隐变量. 但其大小分布仍对微损伤的演化有明显影响. 本文第一次将含有成核尺寸效应的扩展速率引入到统计演化方程中, 考察并试图揭示这种微损伤的二维相空间描述对宏观损伤演化的影响.

1 演化方程及其典型解

微损伤数密度演化的基本方程 (0.1), 对含隐变量 c_0 的理想微损伤系统, 可简化为

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial(n_0 V)}{\partial c} = n_{0N} \quad (1.1a)$$

$$n_0(c, c_0, 0) = 0 \quad (1.1b)$$

$$n_0(c, c_0, t) = 0, \quad c < c_0 \quad (1.1c)$$

这相当于在方程 (0.1) 中取 $p = c, q = c_0, n_A = 0$. $n_0 = n_0(t, c, c_0; \sigma)$ 是二维相空间中微损伤的数密度, $n_{0N} = n_N(c_0)\delta(c - c_0)$ 是二维相空间中微损伤的成核率. 由于初始微损伤长度 c_0 在方程中是一个隐变量, 所以方程 (1.1a) 的特征线方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= V \\ \frac{dn_0}{dt} &= n_{0N} - n_0 \frac{\partial V}{\partial c} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

对于在时刻 t , 长度为 c 的所有微裂纹, 其初始成核尺寸可以是不同的, 如果这些微裂纹遵守同一个扩展规律 $V = V(c, c_0, \sigma)$, 那么反过来, 这些微损伤中在同一时刻 $\tau, 0 \leq \tau \leq t$, 成核的微损伤, 将具有相同的初始成核尺寸 c_0 . 因此, 对给定时刻 t 和给定当时长度 c 的微损伤可用成核时刻 τ 代替 c_0 为一个自变量, 这样就可以用 (1.2') 这样的初始条件来计入隐变量 c_0 的作用

$$\left. \begin{aligned} c &= c_0, \quad \text{当 } t = \tau \\ n_0 &= 0, \quad \text{当 } t = \tau \end{aligned} \right\} \quad (1.2')$$

有关铝合金的冲击实验表明^[9], 裂纹的扩展速率不依赖于时间 t , 仅是应力 σ , 微裂纹当前尺寸 c 和初始尺寸 c_0 的函数. 所以, 若假设应力 σ 在整个演化过程中保持不变; 而且成核率也不依赖于时间, 仅是应力 σ 和初始尺寸 c_0 的函数, 方程 (1.1) 的特征线方程组可表示为

$$\frac{dt}{dc} = \frac{1}{V} \quad (1.3a)$$

$$\frac{d(n_0 V)}{dc} = n_{0N} \quad (1.3b)$$

考虑到 n_{0N} 的定义中所含的 δ 函数, 对方程 (1.3b) 两边从 c_0 到 c 进行积分, 得到

$$n_0(c, c_0, t)V(c, c_0) = n_N(c_0) \quad (1.4)$$

所以当 $V \neq 0$ 时, n_0 可表示为

$$n_0(c, c_0, t) = \frac{n_N(c_0)}{V(c, c_0)}, \quad c_0 \leq c \leq c_f \quad (1.5)$$

(1.5) 式中的上限 c_f 表示在初始时间 ($t = 0$) 成核尺寸为 c_0 的微损伤, 发展到当前时刻 t 的微损伤尺寸大小. 因此 c_f 是所有成核尺寸为 c_0 的微损伤中, 最先成核从而也是这些微损伤中最大的当时尺寸, 所以称 c_f 为微损伤前沿. 它由下面的积分关系式确定

$$t = \int_{c_0}^{c_f} \frac{dc'}{V(c', c_0; \sigma)} \quad (1.6)$$

当应力恒定时, 方程的这个解 (1.5) 在解域内是一个定常解, 它表明微损伤的数密度 n_0 在 $c_0 < c \leq c_f$ 范围内是稳定不变的, 仅有前沿 c_f 随时间往前推移. 这一性质非常重要, 我们将在下节阐明其意义.

2 损伤演化率的物理直观解释

在损伤力学中, 损伤 D 的定义及其演化规律一直是研究的中心内容. 自从 Kachanov^[1] 引进了先验性的演化规律后, 人们一直尝试着从更深的物理层次上给出损伤演化规律.

在统计细观损伤力学中, 宏观损伤可按以下方式定义:

一维情况:

$$D = \alpha \int_0^\infty n c^3 dc \quad (2.1)$$

含成核尺寸 c_0 的情况:

$$D = \alpha \int_0^\infty dc_0 \int_{c_0}^{c_f} n_0 c^3 dc \quad (2.2)$$

(其中 α 为形状因子). 这相当于微损伤的全部失效体积, 基于 (1.1) 可推得含成核尺寸 c_0 情况下的损伤演化率的一个显式表达式. 微分 (2.2) 式

$$\dot{D} = \alpha \int_0^\infty dc_0 \left[\int_{c_0}^{c_f} \frac{\partial n_0}{\partial t} c^3 dc + \frac{\partial c_f}{\partial t} n_0(c_f, c_0, t) c_f^3 \right] \quad (2.3)$$

将方程 (1.1) 和 (1.6) 式的微分形式代入上式可得

$$\dot{D} = \alpha \int_0^\infty dc_0 \left[\int_{c_0}^{c_f} \left(n_{0N} - \frac{\partial(n_0 V)}{\partial c} \right) c^3 dc + V(c_f, t) n_0(c_f, c_0, t) c_f^3 \right] \quad (2.4)$$

分部积分可得

$$\begin{aligned} \dot{D} = \alpha \int_0^\infty dc_0 \left[\int_{c_0}^{c_f} n_{0N} c^3 dc - V(c_f, t) n_0(c_f, c_0, t) c_f^3 + \int_{c_0}^{c_f} 3n_0 V c^2 dc + \right. \\ \left. V(c_f, t) n_0(c_f, c_0, t) c_f^3 \right] \quad (2.5) \end{aligned}$$

根据 n_{0N} 的定义 ($n_{0N} = n_N \delta(c - c_0)$), 可得

$$\dot{D} = \alpha \int_0^\infty n_N(c_0) c_0^3 dc_0 + 3\alpha \int_0^\infty dc_0 \int_{c_0}^{c_f} n_0 V c^2 dc \quad (2.6)$$

对于应力为恒定的情况, 将解 (1.4) 代入 (2.6), 可得

$$\dot{D} = \alpha \int_0^\infty n_N(c_0) c_0^3 dc_0 + 3\alpha \int_0^\infty dc_0 \int_{c_0}^{c_f} n_N(c_0) c^2 dc =$$

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^{\infty} n_N(c_0) c_0^3 dc_0 + 3\alpha \int_0^{\infty} n_N(c_0) \left[\frac{c_f^3}{3} - \frac{c_0^3}{3} \right] dc_0 = \\ & \alpha \int_0^{\infty} c_f^3 n_N(c_0) dc_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

从上述表达式中可以看出, 损伤演化率一般在宏观层次上是不封闭的而是依赖于细观层次上的物理规律, 如成核率和扩展率. 当微裂纹扩展速率为线性 ($V \propto (c - c_0)$) 时, 可证明损伤演化率在宏观上是封闭的^[2]. 这类宏观封闭形式, 正是连续体损伤力学中所假设的损伤演化规律. 所以不同的细观物理规律对演化率的影响有多大, 就成为一个应该阐明的问题. 式 (2.7) 所表示的损伤演化率表明, 由于 n_N 与时间无关, 因此损伤率 \dot{D} 的变化完全是由微损伤演化的前沿 c_f 随时间的推移所引起的. 这正是前一节有随时间往前推移的前沿 c_f 的微损伤演化在宏观损伤上的反映. 这表明微损伤前沿 c_f 的运动是宏观损伤演化的主要控制因素^[11].

3 数值计算

在前几节中, 对于方程 (1.1) 的研究, 主要限于特殊的物理条件, 即假设应力为恒定, 推导出方程的简单的解析解. 事实上, 应力状态是与损伤耦合发展的, 从而影响到损伤的细观动力学规律. 下面就方程 (1.1) 进行数值求解, 以便澄清其影响. 采用两种方法进行计算以便校核.

3.1 方程的无量纲化

理想微损伤系统情况下, 联系了细 - 宏观损伤演化的整个方程组为

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial(Vn_0)}{\partial c} = n_N(c_0)\delta(c - c_0) \quad (3.1a)$$

$$n_0(c, c_0, 0) = 0 \quad (3.1b)$$

$$n_0(c, c_0, t) = 0, \quad c < c_0 \quad (3.1c)$$

$$D = \alpha \int_0^{\infty} dc_0 \int_{c_0}^{c_f} n_0 c^3 dc \quad (3.1d)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - D} \quad (3.1e)$$

$$V = V^* f\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}, \frac{c}{c^*}, \frac{c_0}{c^*}\right) \quad (3.1f)$$

$$n_N = n_N^* g\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}, \frac{c_0}{c^*}\right) \quad (3.1g)$$

其中, 应力 σ 采用 (3.1e) 式, 这是一种平均场近似, 即只考虑损伤对有效应力的平均影响. 实际上, 应力场是有涨落的, 不用裂纹处的实际应力会对平均场有偏离. 但在本文所讨论的条件 (即损伤不太严重的情形), 应力涨落尚不太明显. 文献 [12] 表明, 这种情况下, 裂纹所处条件的差异对损伤的统计演化尚无影响. 只当接近灾变性破坏时, 系统内出现强烈的应力涨落, 导致损伤的相关发展, 使平均场近似失效. 这已超出本文所讨论的范围 (表 1 列出了所用变量和其相应的量纲).

表 1
Table 1

| Variable | t | c | c_0 | n_0 | Parameter | σ_0 | $V(c, c_0, \sigma)$ | $n_N(c_0, \sigma)$ |
|-----------|-----|-----|-------|-----------------|-----------|----------------------------------|---------------------|---------------------------------|
| Dimension | T | L | L | L ⁻⁵ | | ML ⁻¹ T ⁻² | LT ⁻¹ | L ⁻⁴ T ⁻¹ |

L, M, T 分别是长度, 质量, 时间的量纲 (L, M, T are the dimensions of length, mass and time, respectively).

选取特征量 c^* , V^* , n_N^* , 无量纲化过程如下

$$\frac{\partial(\bar{n}_0 n_{0k})}{\partial(\bar{t} t_k)} + \frac{\partial(\bar{V} V^* \bar{n}_0 n_{0k})}{\partial(\bar{c} c^*)} = \bar{n}_N n_N^* \frac{\delta(\bar{c} - \bar{c}_0)}{c^*}$$

或写为

$$\frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{t}} \frac{n_{0k} c^*}{t_k n_N^*} + \frac{\partial(\bar{V} \bar{n}_0)}{\partial \bar{c}} \frac{n_{0k} V^*}{n_N^*} = \bar{n}_N \delta(\bar{c} - \bar{c}_0) \quad (3.2)$$

假设演化方程 (3.1a) 中的三项均为同一量级来确定两个未定的特征量, t_k 和 n_{0k} , 即取

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_{0k} V^*}{n_N^*} &= 1 \\ \frac{n_{0k} c^*}{t_k n_N^*} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

从而得到

$$\left. \begin{aligned} n_{0k} &= \frac{n_N^*}{V^*} \\ t_k &= \frac{c^*}{V^*} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

所以, 方程 (3.1a, d, e) 的无量纲化形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{V} \bar{n}_0)}{\partial \bar{c}} &= \bar{n}_N \delta(\bar{c} - \bar{c}_0) \\ D &= \alpha \int_0^\infty c^* d\bar{c}_0 \int_{\bar{c}_0}^{\bar{c}_f} \bar{n}_0 n_{0k} \bar{c}^3 c^{*4} d\bar{c} = \alpha n_{0k} c^{*5} \int_0^\infty d\bar{c}_0 \int_{\bar{c}_0}^{\bar{c}_f} \bar{n}_0 \bar{c}^3 d\bar{c} = \\ &\alpha \frac{n_N^* c^{*5}}{V^*} \int_0^\infty d\bar{c}_0 \int_{\bar{c}_0}^{\bar{c}_f} \bar{n}_0 \bar{c}^3 d\bar{c} \\ \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma^*} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

经过整理可得计算所需方程组及其相关参数的无量纲形式如下

$$\frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{V} \bar{n}_0)}{\partial \bar{c}} = \bar{n}_N \delta(\bar{c} - \bar{c}_0) \quad (3.6a)$$

$$\bar{n}_0(\bar{c}, \bar{c}_0, \bar{t}) = 0, \quad \bar{c} < \bar{c}_0 \quad (3.6b)$$

$$\bar{n}_0(\bar{c}, \bar{c}_0, 0) = 0 \quad (3.6c)$$

$$D = D^* \int_0^\infty d\bar{c}_0 \int_{\bar{c}_0}^{\bar{c}_f} \bar{n}_0 \bar{c}^3 d\bar{c} \quad (3.6d)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_0}{1 - D} \quad (3.6e)$$

$$\bar{V} = f(\bar{\sigma}, \bar{c}, \bar{c}_0) \quad (3.6f)$$

$$\bar{n}_N = g(\bar{\sigma}, \bar{c}_0) \quad (3.6g)$$

式中 $D^* = \alpha \frac{n_N^* c^{*5}}{V^*}$, $\bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma^*}$ 整个问题包括两个无量纲参量 D^* 和 $\bar{\sigma}_0$. 其中 D^* 是特征损伤量. 特征线方程的无量纲形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{c}}{d\bar{t}} &= \bar{V} \\ \frac{d\bar{n}_0}{d\bar{t}} &= \bar{n}_N \delta(\bar{c} - \bar{c}_0) - \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{c}} \right) \bar{n}_c \\ \bar{c} &= \bar{c}_0, \quad \text{当 } \bar{t} = \bar{\tau} \\ \bar{n}_0 &= 0, \quad \text{当 } \bar{t} = \bar{\tau} \\ D &= D^* \int_0^\infty d\bar{c}_0 \int_{\bar{c}_0}^{\bar{c}_f} \bar{n}_0 \bar{c}^3 d\bar{c} \\ \bar{\sigma} &= \frac{\bar{\sigma}_0}{1 - D} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

为方便起见, 以后如无特别说明, 无量纲变量均用不带横的变量表示.

3.2 差分格式和误差分析

对方程 (3.6a) 采用一阶显式差分格式, 其中第一项采取前插, 第二项进行后插.

$$n_{0,j,k}^{i+1} = n_{0,j,k}^i + (n_N \delta(c - c_0))_{j,k}^i \Delta t - \left(\frac{(V n_0)_{j,k}^i - (V n_0)_{j,k-1}^i}{\Delta c} \right) \Delta t \quad (3.8)$$

其中, i 为对时间 t 进行离散化的上标; j 为对初始微损伤 c_0 进行离散化的下标; k 为对当前微损伤 c 进行离散化的下标.

在计算过程中有两点值得注意: (1) 对于 $\delta(c - c_0)$ 的处理为, 乘以 Δc 再除以 Δc , 当 $c = c_0$ 时 $\delta(c - c_0) \Delta c = 1$, 从中可以看出 Δc 的选取具有任意性. 我们对不同的 Δc 进行了计算, 并用解析解进行校核. 由图 1 可以看出为了精确计算源项的影响, 对网格的大小要求较高. (2) 在计算中所选取的速度形式为 $V = (\sigma - 1)(c - c_0)^\mu$, 当变量或参量在某个范围时, 微损伤扩展速率较小, 这就出现了计算传播速度与物理传播速度相矛盾的问题. 因此, 在计算之前要先对微损伤的扩展量级有个估计. 例如, 当假设应力恒定时: 取 $\mu = 0.5$, $\Delta c = 2.5 \times 10^{-5}$, $\Delta t = 1.25 \times 10^{-5}$, $\sigma = 1.25$, 由方程 (1.6)

$$t = \int_{c_0}^{c_f} \frac{dc'}{V(c', c_0; \sigma)} = \int_{c_0}^{c_f} \frac{dc'}{(\sigma - 1)(c' - c_0)^{0.5}}$$

得到

$$c_f - c_0 = \frac{t^2}{64} \quad (3.9)$$

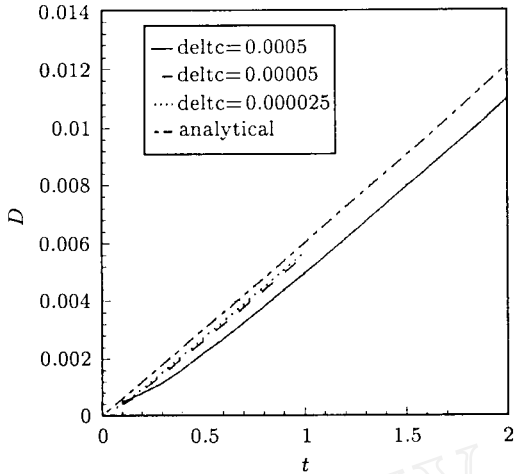


图 1 用不同的网格大小处理 δ 函数以及
与解析解的比较 ($\mu = 0.5, \sigma_0 = 1.25$)

Fig.1 Dealing with δ function with different mesh
sizes and comparison with analytical solution

因为微损伤前沿 c_f 跨过第一层网格点
所需时间, 需满足不等式 (3.10)

$$\frac{c_f - c_0}{\Delta c} \geq 1 \quad (3.10)$$

将 (3.9) 代入 (3.10) 得

$$t \geq 4 \times 10^{-2} \quad (3.11)$$

于是有

$$i \geq 3.2 \times 10^3 \quad (3.12)$$

上式说明计算损伤时需经过至少 3200 步,
第二层网格点上的数据才有意义.

特征线方程的差分格式为

$$c_{j,k}^{i+1} = c_{j,k}^i + V_{j,k}^i \Delta t \quad (3.13a)$$

$$n_{0j,k}^{i+1} = n_{0j,k}^i + (n_N \delta(c - c_0))_{j,k}^{i+1} \Delta t - \left(\left(\frac{\partial V}{\partial c} \right) n_0 \right)_{j,k}^{i+1} \Delta t \quad (3.13b)$$

$$c_{j,k}^i = c_0, \quad \text{当 } i \times \Delta t = j \times \Delta \tau \quad (3.13c)$$

$$n_{0j,k}^i = 0, \quad \text{当 } i \times \Delta t = j \times \Delta \tau \quad (3.13d)$$

其中, i 为对扩展时间 t 进行离散化的上标, j 为对成核时间 τ 进行离散化的下标, k 为对初始成核尺寸 c_0 进行离散化的下标.

在计算过程中由于选取的速度形式为

$$V = (\sigma - 1)(c - c_0)^\mu \quad (3.14)$$

而且两个时间步长相等, 即 $\Delta \tau = \Delta t$, 所以当 $i = 1$ 时, 代入 (3.13a) 可得

$$c_{1,k}^2 = c_{1,k}^1 + (\sigma - 1)(c_{1,k}^1 - c_{0k})^\mu \Delta t = c_{1,k}^1 \quad (3.15)$$

可见利用显式格式起步, 无法计算微损伤的扩展长度. 为此针对 c 的计算改用隐式格式

$$c_{j,k}^{i+1} = c_{j,k}^i + (\sigma^1 - 1)(c_{j,k}^{i+1} - c_{0k})^\mu \Delta t \quad (3.16)$$

首先给 $c_{1,k}^2$ 一个不为 0 的初值, 然后进行迭代求解. 关于 $\delta(c - c_0)$ 的处理采用 $\delta(c - c_0) \frac{V \Delta t}{V}$, 当 $i \times \Delta t = j \times \Delta \tau$ 时, $\delta(c - c_0) V \Delta t = 1$, 其它时间 $\delta(c - c_0) V \Delta t = 0$.

3.3 无量纲参数及细观动力学规律

在数值计算之前需要根据以前的试验结果, 给出细观动力学规律及无量纲参数. 微损伤的成核率根据文 [8] 给出其无量纲形式为

$$n_N = (\sigma - 1)c \exp(-c) \quad (3.17)$$

裂纹的扩展率根据文 [9] 给出其无量纲形式为

$$V = (\sigma - 1)(c - c_0)^\mu \quad (3.18)$$

关于无量纲参数 $D^* = \alpha \frac{n_N^* c^{*5}}{V^*}$ 可做如下估计. 对于球形损伤域几何形状因子 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, c^{*3} 表明特征损伤的体积, $\frac{n_N^* c^*}{V^*}$ 是在一个特征时间内的微损伤数密度. 再乘以 c^* 然后进行积分, 得到 D^* , 所以 $D^* = \alpha \frac{n_N^* c^{*5}}{V^*}$ 代表特征损伤. 从以前的试验中得到典型的微损伤尺寸和扩展速率分别为 $c^* \approx 4 \times 10^{-6} \text{m}$ 和 $V^* \approx 10 \text{ms}^{-1}$ [9]. 在横截面上的成核率约为 $10^9 \text{m}^{-2} \mu\text{m}^{-1} \mu\text{s}^{-1}$, 利用面体转换公式 [12] 可得体积中的成核率约为 $10^{13.5} \text{m}^{-3} \mu\text{m}^{-1} \mu\text{s}^{-1} = 10^{25.5} \text{m}^{-3} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$. 因此, $D^* \sim 10^{25.5} \cdot (4 \cdot 10^{-6})^5 / 10^1 \approx 10^{-2.5}$. 计算中取 $D^* = 0.001$. 另外两个无量纲参数是 σ_0 和 μ , 我们将在后面的数值计算中考察其对损伤演化的影响.

3.4 数值结果和分析

由于方程的非线性, 通常的稳定性分析方法不能适用, 这里采用多种方法同时计算以便相互校核. 图 2 给出解析法, 特征线法和差分法的结果. 由于各种方法的独立性, 可知计算是可靠的. 所以以后的计算主要利用特征线法进行.

图 3 是利用不同的速度模型所计算的 $D-t$ 曲线, 其中一维的速度形式取为

$$V = (\sigma - 1)c^\lambda \quad (3.19)$$

从图中看出采用一维的速度模型损伤演化明显比采用含隐变量的模型快, 这是因为在所考察的时间范围内, 例如取一个特征时间, 微损伤长度为一个特征尺度, 一维扩展速度 $V_1 = (1.25 - 1) \times 1^{0.5} = 0.25$, 远大于二维扩展速度 $V_2 = (1.25 - 1) \times \left(\frac{1}{64}\right)^{0.5} = 0.03$.

在上面的求解分析中, 我们曾设 σ 为常量, 推导出了方程的解析解以及损伤率在宏观层次上封闭的条件. 但考虑应力与损伤有耦合效应的真实情况一直是大家最关心的. 通过计算发现, 在 $D-t$ 曲线图中引入耦合效应的影响并不明显, 见图 4. 在一个特征时间内几乎没有

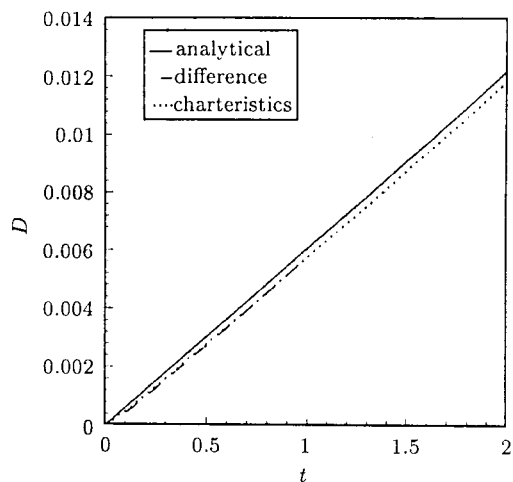


图 2 用不同计算方法所得的损伤 - 时间演化曲线 ($\mu = 0.5$, $\sigma_0 = 1.25$)

Fig.2 Damage-time evolution curve with different computational methods

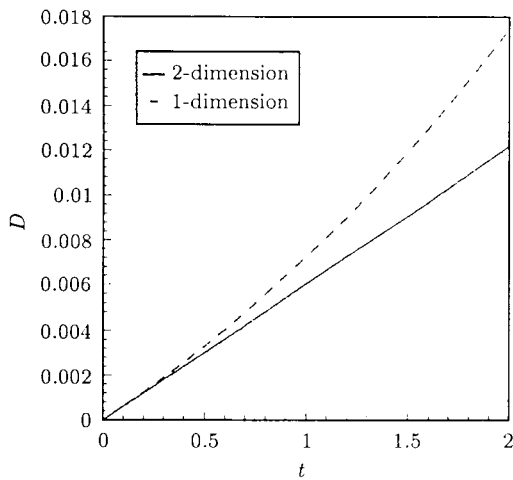


图 3 用一维和二维两种模型计算所得的损伤 - 时间演化曲线 ($\lambda = 0.5, \mu = 0.5, \sigma_0 = 1.25$)

Fig.3 Damage-time evolution curve resulted from one-dimension and two-dimension models

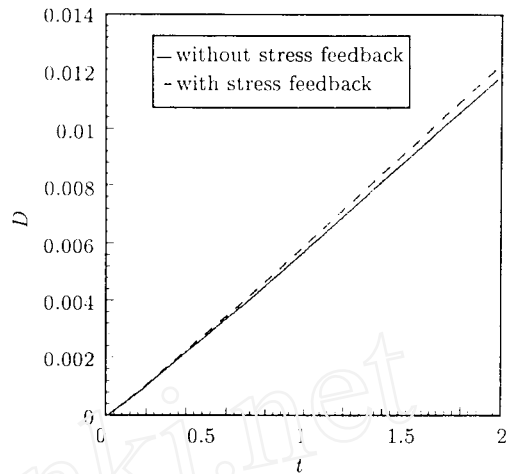


图 4 用二维模型计算的有应力反馈和无应力反馈情况的损伤 - 时间演化曲线 ($\mu = 0.5, \sigma_0 = 1.25$)

Fig.4 Damage-time evolution curve calculated from two-dimension model with and without stress feedback

什么区别. 这说明利用无耦合效应的方法计算的 $D-t$ 曲线可以在一定时间内成立. 此外损伤率在宏观层次上一般是不封闭的, 依赖于细观动力学规律, 但其影响到底有多大? 通过设 $\mu = 0.5, \mu = 0.2$ 得到两个不同的扩展速率. 计算表明 (图 5), 细观扩展动力学规律对损伤速率的影响是十分明显的. 这进一步说明了损伤演化律的精确研究是要涉及到细观层次的. 我们还计算了不同的外载 σ_0 对损伤演化的影响, 图 6 表明 σ_0 越大损伤演化越快, 这和试验是相符的.

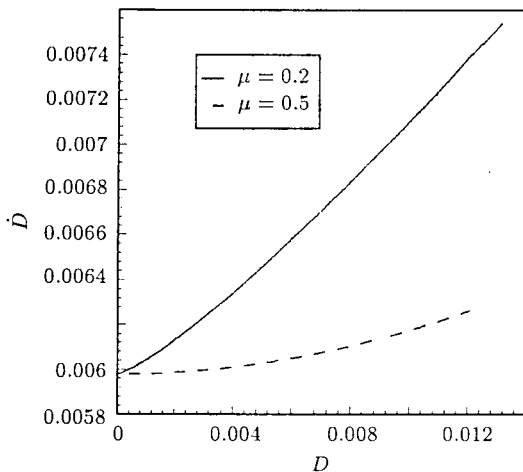


图 5 用不同的细观动力学规律所计算的损伤率 - 损伤曲线 ($\sigma_0 = 1.25$)

Fig.5 Damage rate-damage curve under different mesoscopic dynamic rules

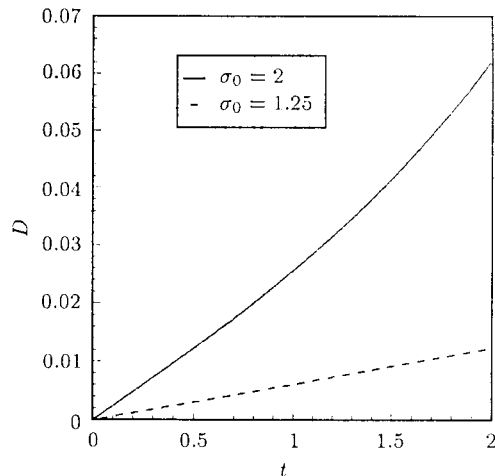


图 6 在不同的外载情况下的损伤 - 时间演化曲线 ($\mu = 0.5$)

Fig.6 Damage-time evolution curve under different loads

4 讨 论

本文从统计细观损伤力学中针对理想微损伤系统的含成核尺寸的统计演化方程出发, 研究

了损伤统计演化的规律及宏观损伤量 D 的变化特征.

1) 采用由微损伤成核尺寸及当前尺寸构成的二维相空间对微损伤系统进行统计描述, 损伤演化由成核过程与扩展过程决定. (2.6) 式表明, 损伤累积的最初阶段, 主要是成核过程的贡献, 随着时间的增大, 扩展过程的贡献逐渐增大. 从实验测定的扩展模型 (3.18) 式可以看出, 在微损伤当前尺寸与成核的尺寸相差不大时, 扩展率接近为零而一维扩展模型 (3.19) 扩展率是有限值. 这使得二维模型给出的损伤累积率明显低于一维模型. 近过来看, 采用一维的微损伤扩展模型 (3.19), 会明显导致对宏观损伤演化的过快的估计, 因此, 对微损伤扩展规律及其主要控制因素的研究, 是准确运用损伤力学评估寿命的重要一环.

2) 采用 (3.1e) 式的模型反映损伤发展对有效应力的影响 (损伤与应力之间的耦合效应). 由 (3.1e), (3.17) 及 (3.18) 式, 损伤导致的应力耦合效应正比于损伤量 D , 因此, 在低损伤的条件下, 这种效应只给出微小的修正, 如图 4 所示. 应该指出的是, 在统计细观损伤力学中, 只反映平均耦合效应. 所以并不能解释损伤随机积累向灾变性破坏的转变.

3) 统计细观损伤力学中的损伤数密度统计演化方程, 适用于描写损伤发展过程为统计独立, 随机累积的演化模式, 其物理背景是细观无序性与平均场近似.

参 考 文 献

- 1 Kachanov LM. Introduction to Continuum Damage Mechanics. The Netherlands: Dordrecht Martinus Nijhoff Publisher, 1986
- 2 Bai Yilong, Ke Fujiu, Xia Mengfen. Formulation of statistical evolution of microcracks in solids. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 7(1): 59~66
- 3 邢修三. 脆性断裂的统计理论. 物理学报, 1966, 22: 487~497 (Xing XS. Statistical theory of brittle fracture. *Acta Physica Sinica*, 1966, 22: 487~497 (in Chinese))
- 4 Ke Fujiu, Bai Yilong, Xia Mengfen. Evolution of ideal microcrack system. *Science in China (A)*, 1990, 33: 1447~1459
- 5 夏蒙莽, 韩闻生, 柯孚久, 白以龙. 统计细观损伤力学和损伤演化诱致突变. 力学进展, 1995, 25(1): 1~40 (Xia MF, Han WS, Ke FJ, Bai YL. Statistical meso-scope damage mechanics and damage evolution induced catastrophe. *Advances in Mechanics*, 1995, 25(1): 1~40 (in Chinese))
- 6 黄筑平, 杨黎明, 潘客麟. 材料的动态损伤与失效. 力学进展, 1993, 23(4): 433~467 (Huang ZP, Yang LM, Pan KL. Dynamic damage and failure of materials. *Advances in Mechanics*, 1993, 23(4): 433~467 (in Chinese))
- 7 李强, 贺子如, 宋名实, 唐敖庆. 玻璃态高聚物细观损伤断裂统计力学. 力学进展, 1995, 25(4): 451~470 (Li Q, He ZR, Song MS, Tang AQ. Review on the statistical mechanics of meso-damage and fracture for glassy polymers. *Advances in Mechanics*, 1995, 25(4): 451~470 (in Chinese))
- 8 Bai YL, Ling Z, Luo LM, Ke FJ. Initial development of micro-damage under impact loading. *J Appl Mech*, 1992, 59: 622~627
- 9 Han WS, Xia MF, Shen LT, Bai YL. Statistical formulation and experimental determination of growth rate of micrometer cracks under impact loading. *Int J Solids and Structures*, 1997, 34: 2905~2925
- 10 Fang B, Hong YS, Bai YL. Experimental and theoretical study on number density evolution of short fatigue cracks. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 11(2): 144~152
- 11 Bai YL, Han WS, Bai J. A statistical evolution equation of microdamage and its application. Application of Continuum Damage Mechanics to Fatigue and Fracture. ASTM, STP 1315, 1996. 150~162
- 12 夏蒙莽, 柯孚久, 吕永华, 白以龙. 理想微裂纹系统中的随机扩展效应. 中国科学 A, 1993, (3): 276~284 (Xia MF, Ke FJ, Lu YH, Bai YL. Stochastic extension effect in ideal microcrack system. *Science in China (A)*, 1993, (3): 276~284 (in Chinese))
- 13 白以龙, 夏蒙莽, 柯孚久, 郭文海, 凌中. 无序细观结构在体积中与截面上尺度分布函数之间的关系统计诠释. 物理学报, 1993, 42: 351~359 (Bai YL, Xia MF, Ke FJ, Guo WH, Ling Z. Statistical interpretation on the relationship

between the volumetric and sectional size distributions of disordered meso-structures. *Acta Physica Sinica*, 1993, 42: 351~359 (in Chinese))

PROPERTIES OF THE STATISTICAL DAMAGE EVOLUTION EQUATION AND ITS NUMERICAL SIMULATION ¹⁾

Bai Jie* Xia Mengfen*,** Ke Fujiu*,*** Bai Yilong*

* (LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

** (Department of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

*** (Beijing Univ. of Aero. and Astr., Beijing 100083, China)

Abstract Damage mechanics has become a very helpful tool for engineers to deal with failure problems. Actually the physical essence of damage is the population of distributed microdamage in a continuum element. When one intends to correlate the damage evolution to the mesoscopic dynamics of microstructure of a particular material, it becomes necessary to investigate the statistical evolution of distributed microdamage. Based on the analysis and numerical simulation of one kind of statistical damage evolution equation, we find that the rate of continuum damage is determined mainly by the movement of microdamage front c_f in two-dimension phase space. This concisely links continuum damage evolution to its underlying mesoscopic dynamics. Numerical simulations reveals the distinction between two models: model with nucleation effect and model without nucleation effect. Furthermore, it is demonstrated that the evolution law of damage, \dot{D} can approximately be fitted into a closed expression on macroscopic level deduced from several mesoscopic dynamics.

Key words microdamage, statistical evolution, damage rate equation

Received 30 January 1997, revised 23 December 1997.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China and the Science Foundation Aeronautics.