

QIN Yafei ZHANG Weixing

(Qingdao Architectural and Engineering Institute, Qingdao 266033, China)

Abstract The element-free method for the vibration of simply supported and fixed end thin plates is presented in this paper. The shape function of the element-free method is introduced. The mass and stiff matrices for the free vi-

bration of plates are derived by using the variational principle. Numerical examples are given and compared with other methods. It shows that this method has a number of advantages.

Key words element-free method, thin plates, free vibration, shape function, variational principle

### Johnson-Cook 材料模型参数的实验测定

范亚夫 \*† 段祝平 \*

\* (中国科学院力学研究所 LNM 实验室, 北京 100080)

† (中国兵器工业 52 研究所, 包头 014034)

摘要 介绍一种通过 Hopkinson 拉伸实验、圆筒爆炸试验和计算机仿真来确定 Johnson-Cook 材料模型中相关常数的方法。

关键词 Hopkinson 拉伸实验, 圆筒爆炸试验, 计算机仿真

#### 1 引言

Johnson-Cook 材料模型是一个能反映应变率强化效应和温升软化效应的理想刚塑性强化模型 [1]。由于此模型参量太多, 在实际使用中受到不同程度的限制。特别是从事计算的工程技术人员多半都是参考国外的现有工作来给出相关的材料常数的, 这势必给计算结果的可信度带来质疑。本文介绍的方法主要由三部分组成: 1) 由 Hopkinson 拉伸实验确定材料的力学性能; 2) 由圆筒爆炸试验获取高速摄影胶片, 进而获得圆筒膨胀半径与时间的关系曲线  $R(t)-t^{[2,3]}$ ; 3) 通过计算机仿真再现圆筒爆炸试验的全过程, 并调节相关材料参数使其与高速摄影胶片完全吻合, 进而确定 Johnson-Cook 模型中的相关材料常数。

Johnson-Cook 材料模型实际上由两部分内容组成:

第一部分只涉及应力

$$\sigma_e = [A + B(\epsilon_e^n)^m][1 + C \ln \dot{\epsilon}^*][1 - T^{*m}] \quad (1)$$

其中:  $\sigma_e$  为 von Mises 流动应力;  $\epsilon_e^n$  为等效塑性应变。  $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}_e/\dot{\epsilon}_0$  为相对等效塑性应变率, 取  $\dot{\epsilon}_0 = 1.0 s^{-1}$ ;  $T^* = (T - T_r)/(T_m - T_r)$  为无量纲温度, 其中,  $T_m$  与  $T_r$  为材料的熔点与室温。

上式中第一个因子给出的是当  $\dot{\epsilon}^* = 1.0$  和  $T^* = 0$  时流动应力与等效塑性应变的函数关系。第二个和第三个因子表示了应变率效应和温度效应。

第二部分则是涉及断裂时的应变

$$\epsilon^f = [D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)][1 + D_4 \ln \dot{\epsilon}^*][1 + D_5 T^*] \quad (2)$$

其中:  $\sigma^* = p/\sigma_{eff}$ , 即压力与 von Mises 等效应力的比值。

损伤参数:  $D = \sum \Delta \epsilon / \epsilon^f = 1$  时, 断裂发生。式中,  $\Delta \epsilon$  为积分循环期间的等效塑性应变增量。

前者可由 Hopkinson 拉伸实验确定材料常数, 而后者则由圆筒爆炸试验来完成相关系数的确定。

#### 2 Hopkinson 拉伸实验

三段分离式 Hopkinson Bar 装置是测定材料应力 - 应变关系曲线的基本设备。根据一维弹性波理论, 这个实验可获得材料在应变率达  $10^3 \sim 10^4 s^{-1}$  动载下的  $\sigma-\epsilon$  曲线, 进而确定式 (1) 中的  $A, B, n, C, m$ 。作为一个算例, 图 1 给出的是两种不同热处理工艺条件下 TC4 材料的  $\sigma-\epsilon$  曲线, 表 1 列出了相关的测试数据。材料的硬化指数、应变率敏感指数和温度软化指数可通过下面的式 (4), 式 (5), 式 (7) 获得。

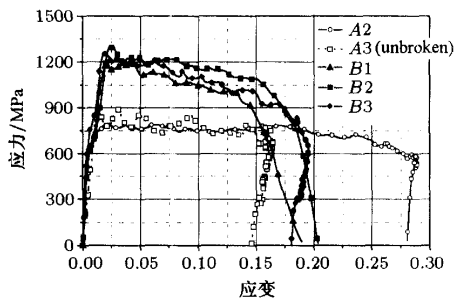


图 1 TC4 经 A, B 不同热处理的动态拉伸性能

表 1 TC4 材料动态拉伸性能

工艺	强度 $\sigma$ /MPa	延伸率 $\delta$ /%
A	800	28
B	1200	18

为确定相关常数, 式 (1) 右端的各个因子应分别考虑:

(1) 当  $\sigma_e = A + B(\epsilon_e^n)^n$  时

注意到在式 (1) 中,  $A = \sigma_s$ , 就是材料的屈服强度, 可直接从  $\sigma-\epsilon$  曲线上读取.  $B(\epsilon_e^n)^n$  才是对  $\sigma-\epsilon$  曲线强化段的描写. 所以, 只要将强化段的采集点绘制在双对数坐标纸上, 便可通过下面的式 (3) 和式 (4) 定出  $B$  和  $n$

$$\ln \sigma_e = \ln B + n \ln \epsilon_e^n \quad (3)$$

上式在双对数坐标纸上截距为  $\ln B$ , 斜率为  $n$  的直线. 于是:

材料的硬化指数

$$n = \frac{d(\ln \sigma_e)}{d(\ln \epsilon_e^n)} = \frac{\Delta \ln \sigma}{\Delta \ln \epsilon_e^n} \quad (4)$$

(2) 当  $\sigma_e = 1 + C \ln \frac{\epsilon_e^p}{\epsilon_0}$  时

可直接将此方程作图于半对数坐标纸上. 表示截距为 1, 斜率为  $C$  的一条直线. 所以:

应变率敏感指数

$$C = \Delta \sigma_e / \Delta \ln \frac{\epsilon_e^p}{\epsilon_0} \quad (5)$$

(3) 对  $\sigma_e = 1 - T^{*m}$ , 当  $T^* \gg 1$  时, 取  $\sigma_e = T^{*m}$ , 于是有

$$\ln \sigma_e = m \ln T^* \quad (6)$$

它表示的是一条在双对数坐标纸上的直线, 所以有:

温度软化指数

$$m = \frac{\Delta \ln \sigma_e}{\Delta \ln T^*} \quad (7)$$

从图 1 中可以看到, 经两种不同热处理工艺的 TC4 材料均可以简化为理想弹-塑性材料, 即在塑性段应力的增量  $\Delta \sigma = 0$ , 于是  $n = 0, B = 0$ .  $A$  可取作材料的屈服应力  $\sigma_s$ .  $C$  根据式 (5) 可初步算得一个值, 最后还需通过数值分析调节相关参数确定.  $m$  则可根据不同温度下的 Hopkinson 拉伸实验给出一个数值范围, 一般取  $m \leq 1.0$ . 由于热传导的时间远远大于爆轰持续的时间<sup>[4]</sup>, 所以温度软化指数  $m$  并不重要. 各参数的值将在表 2 中给出. 实际上, Hopkinson 拉伸实验主要确定的是材料常数  $A, B$  和  $n$ , 并构成了数值计算的基本数据.

### 3 圆筒爆炸试验及数值仿真

圆筒尺寸为  $\phi 25.4 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ , 厚度  $\delta = 2.5 \text{ mm}$ . 内装长度为 120 mm 的 T/R(35/65) 炸药, 在装药的一端由雷管加传爆药柱引爆. 通过  $45^\circ$  反光镜, FJZ-250 高速分幅照相机可等时间间隔连续记录 40 幅照片.

采用 LS-DYNA 有限元结构分析程序进行数值计算, 所有实体均剖分为六面体单元, 按材料属性生成三个部分, 划分的单元数和节点数分别为 41 800 和 46 445. 采用 Lagrangian 算法, 炸药和壳体间为仅滑移接触. 考虑到问题的轴对称性, 取壳体的一半进行几何建模, 并施加对称面边界约束条件. 如第 1 节所述, 计算中选用了能反映材料应变率强化和温度软化效应的理想刚塑性强化的 Johnson-Cook 模型, 状态方程取 Grüneisen 状态方程. 炸药选用 JWL 状态方程来描述. 具体参数在表 2 中列出.

表 2 材料常数

模型	Johnson-Cook						Grüneisen			
	A/MPa	B/MPa	n	C	m	$D_1$	$D_4$	$C_g/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$S_1$	$\gamma_0$
TC4 材料	800	0.0	0.0	0.011	1.0	1.23	0.010	5 130	1.028	1.23
备注	密度: $\rho_0 = 4.51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 剪切模量: $G = 42.0 \text{ GPa}$ , 泊松比: $\nu = 0.33$ , 弹性模量: $E = 113 \text{ GPa}$ .									
模型	JWL									
T/R	$A_J/100 \text{ GPa}$	$B_J/100 \text{ GPa}$	$R_1$	$R_2$	$\omega$	$E_0/\text{GPa}$	$\rho_e/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$D/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$p_{CJ}/\text{GPa}$	
(35/65)	6.021	0.1225	4.554	1.207	0.322	10.70	1 714	7 967	28.6	
Tetryl	5.868	0.1067	4.40	1.20	0.28	8.20	1 730	7 910	28.5	

结合我们的算例, 首先由 Hopkinson 拉伸实验定出  $D_2 = D_3 = 0$ , 然后给出一组  $D_1, D_4$  值并联合应变率敏感指数  $C$  进行反复的试算调试, 直到计算结果和试验结果一致为止. 这里  $C$  和  $D_4$  都有一个使单元不再消融的临界值,

这无疑是在确定这些参数的有利条件, 要学会使用.  $D_5$  是个反映材料升温的参数, 可取程序的默认值, 不必参与调试.

图 2 给出了高速摄影照片与计算机仿真图的对比. 为清楚地看到壳体在整个爆轰过程中的变形和破碎, 仿真图中只

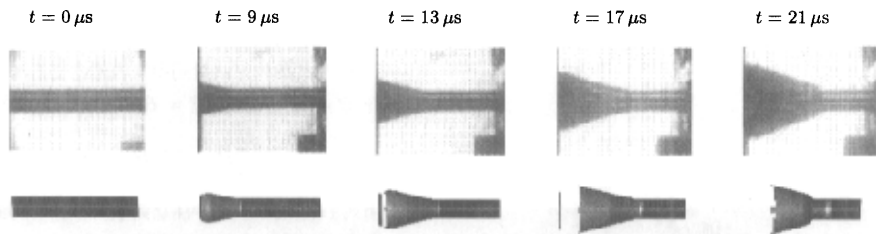


图 2 仿真图与高速摄影照片的比较

取壳体的瞬态变形图。两者间的时间标注个别的有偏差,但不大于  $0.1\mu\text{s}$ 。

图3给出了沿壳体轴线不同截面处实验和计算的径向位移随时间的变化曲线,从中可以看到二者间有着很好的一致性。随着时间的增大,各截面的位移响应曲线将成为直线,而且恰恰是从壳体破碎爆轰产物溢出时开始的。这意味着材料的力学性能直接影响爆轰驱动的喷射速度。图4和图5分别给出了实验和计算得到的径向速度时间历程曲线,各截面均有一个趋于水平直线的极限速度,对应于位移响应曲线的直线部分。从图5中可以看到由于端部的卸压效应,在壳体两端的极限速度偏低,而在中部则趋于稳定值。爆轰瞬间沿柱壳长度方向速度梯度的急剧变化是柱壳破碎的主要原因。极限速度沿柱壳轴线的分布规律在图6中给出。不同截面处径向极限速度的计算值和实验值列于表3。

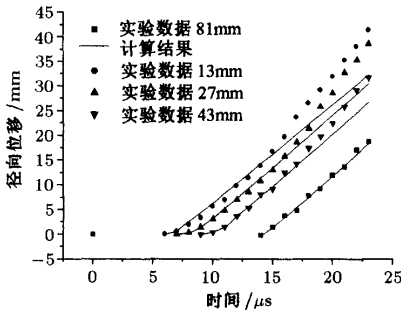


图3 实验和计算的径向位移-时间历程曲线

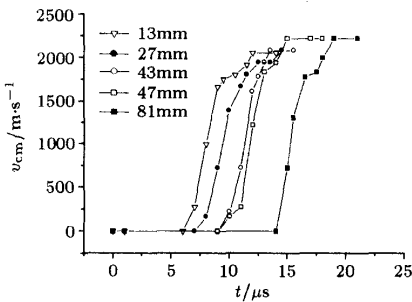


图4 径向速度随时间变化的实验曲线

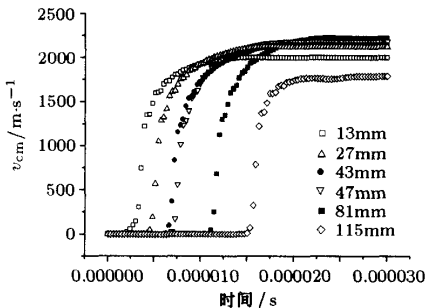


图5 计算的径向速度-时间历程曲线

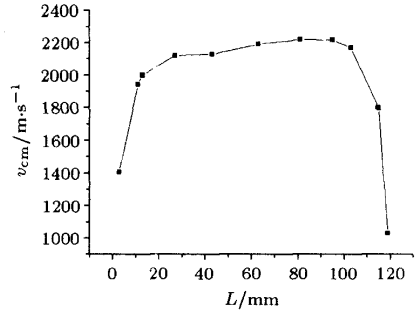


图6 极限速度沿轴线的变化

表3 不同截面处径向极限速度的计算值和实验值的比较

$L/\text{mm}$	13	27	43	81
$v_{\text{cm}}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 计算值	2002	2120	2128	2216
$v_{\text{cm}}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 实验值	2053	2081	2081	2219

#### 4 Johnson-Cook 材料模型满足客观性原理的证明

上述实验和计算结果的一致性说明 Johnson-Cook 材料模型用于处理爆轰驱动这样的高温、高速、高压的大变形、高应变速率的力学问题是行之有效的。那么,采用上述方法所确定的材料常数是否是惟一的?下面我们从客观性原理出发给出证明。

Johnson-Cook 材料模型实际上给出的是 von-Mises 流动应力  $\sigma_e$  与等效塑性应变  $\epsilon_e^p$ 、相对等效塑性应变速率  $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}_e^p/\dot{\epsilon}_0$  和无量纲温度  $T^*$  之间的函数关系。同时,给出了断裂应变的表达式,如式(1)和式(2)所示。不失一般性,可将 Johnson-Cook 材料模型表示成如下形式

$$T = T(E, \dot{E}, \theta) \tag{8}$$

式中,  $T$  是 Cauchy 应力张量;  $E, \dot{E}$  分别是应变和应变速率张量;  $\theta$  是温度,它是标量。

考虑到应变张量可由变形梯度张量  $F$  表出,所以式(8)又可以写成下面的形式

$$T = T(F, \dot{F}, \theta) \tag{9}$$

若记另一个坐标标架为  $(\tilde{x}, \tilde{t})$ , 则在  $(x, t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t})$  的变换中,利用材料的对称性可对上式进行化简

$$T = T(F, \dot{F}, \theta) = \tilde{T}(FP, \dot{F}P, \theta) \tag{10}$$

式中,  $P$  为初始构形映射到中间构形的变形梯度张量。

令  $P = R^T$ , 因为  $F = RU$ , 所以

$$FP = RUR^T = V \tag{11}$$

由式(9)和式(10)并注意到  $\dot{p} = 0$ , 可得到

$$\dot{F} = (FP)^* = \dot{F}P + F\dot{P} = \dot{F}P \tag{12}$$

将以上两式代入式 (10)

$$T = T(F, \dot{F}, \theta) = \tilde{T}(V, \dot{V}, \theta) \quad (13)$$

利用客观性公理得到

$$QTQ^T = \tilde{T}(QVQ^T, (QF)^*, \theta) \quad (14)$$

而  $(QF)^* = \dot{Q}F + Q\dot{F}$ , 令  $Q = R^T$ , 并注意到:  $F = RU$ , 便可得到

$$(QF)^* = (\dot{R}^T R + R^T \dot{R})U + R^T R\dot{U} = \dot{U} \quad (15)$$

将上述结果代入式 (14)

$$QTQ^T = \tilde{T}(QVQ^T, \dot{U}, \theta) \quad (16)$$

因为

$$L = \dot{F}F^{-1} = \dot{R}R^T + R\dot{U}U^{-1}R^T = \Omega^R + R\dot{U}U^{-1}R^T = W + D \quad (17)$$

类比可得到

$$D = R\dot{U}U^{-1}R^T \quad (18)$$

利用材料的各向同性条件, 并以现实构形为参考构形:  $F \rightarrow I, R \rightarrow I, U \rightarrow I$ , 可得到

$$D = \dot{U} \quad (19)$$

将上式代入式 (16), 并注意到  $D$  是客观张量, 所以有

$$QTQ^T = \tilde{T}(QVQ^T, QDQ^T, \theta) \quad (20)$$

同理, 将式 (2) 作同上化简, 可得到类似式 (20) 的形式

$$QE^f Q^T = \tilde{E}^f(QTQ^T, QDQ^T, \theta) \quad (21)$$

至此, 证明了 Johnson-Cook 材料模型 (1) 和 (2) 满足客观性公理。因为有限元计算中的控制方程: 质量守恒、能量守恒均满足客观性公理, 而且, 在线动量守恒中, 只要将惯性力放到体力中同样也可视其为是客观的。而我们的材料模型只要满足对称性和各向同性也是客观的。所以, 在实验中把握住以下三点, 就可惟一地确定 Johnson-Cook 材料模型中的常数:

(1) 热处理工艺要使材料具有均匀的组织, 使其获得良好的力学性能, 从而保证各向同性。

(2) 无论对 Hopkinson 拉伸实验, 还是对圆筒爆炸试验, 都必须保证试样精密的机械加工, 以便满足对称性的要求。

(3) 严格地对称装药和高速摄影视场呈像的对称性是获得可靠实验数据的保证。

因为客观必在现时构形中, 而且数值实验中描写物理现象的方程包括本构方程都是客观的, 所以只要遵循上述原则, 在数值仿真中真实地再现圆筒爆炸的全过程并作为与高速摄影胶片一一对应, 如同在图 2 中所表示的那样, 那么, 所得到的 Johnson-Cook 材料模型中的常数应该是惟一的。

## 5 结 论

建立在客观性公理基础上的 Johnson-Cook 材料模型, 经本文所建议的通过 Hopkinson 拉伸实验、圆筒爆炸试验和数值仿真确定其材料常数的方法具有普适性。

## 参 考 文 献

- 1 Johnson GR, Cook WH. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strains rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, 21(1): 31~48
- 2 Martineau RL, Anderson CA, Smith FW. Expansion of cylindrical shells subjected to internal explosive detonations. *Experimental Mechanics*, 2000, 40(2): 219~225
- 3 于川, 刘文翰, 李良忠等. 钝感炸药圆筒试验与爆轰产物 JWL 状态方程研究. *高压物理学报*, 1997, 11(3): 227~233
- 4 高举贤, 乐茂康, 吕德业等. 穿甲过程模型律. *兵工学报*, 1985 (1): 33~39

## CYLINDER EXPLOSIVE TEST AND MATERIAL MODEL OF JOHNSON-COOK

FAN Yafu\*,† DUAN Zhuping\*

\* (LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

† (No.52 Institute of Ordnance Industry of China, Baotou 014034, China)

**Abstract** This paper introduces a method where the material constants of Johnson-Cook model are determined by the Hopkinson tension experiment, cylinder explosive test and numerical simulation.

**Key words** Hopkinson tension experiment, cylinder explosive test, numerical simulation