

文章编号: 1000-4874(2005)03-0293-07

# 对流扩散方程的变步长摄动 有限差分格式\*

李桂波<sup>1,2</sup>, 李明军<sup>3</sup>, 高智<sup>1</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 高温气体动力学开放研究实验室, 北京 100080;

2. 中国海洋大学海洋环境学院, 青岛 266003;

3. 湘潭大学数学与计算科学学院, 长沙 411105)

**摘要:** 摄动有限差分(PFD)方法是构造高精度差分格式的一种新方法。变步长摄动有限差分方法是等步长摄动有限差分方法的发展和推广。对需要局部加密网格的计算问题, 变步长 PFD 格式不需要对自变量进行数学变换, 且和等步长 PFD 格式一样, 具有如下的共同特点: 从变步长一阶迎风格式出发, 通过把非微商项(对流系数和源项)作变步长摄动展开, 展开幂级数系数通过消去摄动格式修正微分方程的截断误差项求出, 由此获得高精度变步长 PFD 格式。该格式在一、二和三维情况下分别仅使用三、五和七个基点, 且具有迎风性。文中利用变步长 PFD 格式对对流扩散反应模型方程, 变系数方程及 Burgers 方程等进行了数值模拟, 并与一阶迎风和二阶中心格式及其问题的精确解作了比较。数值试验表明, 与一阶迎风和二阶中心格式相比, 变步长 PFD 格式具有精度高, 稳定性与收敛性好的特点。变步长 PFD 格式与等步长 PFD 格式相比, 变步长 PFD 解在薄边界层型区域的分辨率得到了明显的提高。

**关键词:** 高精度差分格式; 对流扩散方程; 变步长摄动有限差分方法

**中图分类号:** O353.2      **文献标识码:** A

## The perturbational finite difference(PFD) scheme of variational step of convection-diffusion equation

LI Gui-bo<sup>1,2</sup>, LI Ming-jun<sup>3</sup>, GAO Zhi<sup>1</sup>

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

2. College of Physical and Environmental Oceanography, Ocean University of China,  
Qingdao 266003, China;3. School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University,  
Changsha 411105, China)

**Abstract:** The perturbational finite difference method (PFD) is a new method of constructing high accurate difference scheme. The PFD of variational step is a development and extension of PFD of uniform step. The PFD of variational step does not require any mathematical transformation of independent variables when dealing with problems that require local refinement

\* 收稿日期: 2004-06-15(2005-02-28 修改稿)

基金项目: NASF(10376031)

作者简介: 李桂波(1982~), 男, 山东安丘人, 硕士研究生。

of computing grids, moreover, it shares the same characteristics with PFD of uniform step as follows: Consider the first order upwind scheme of variational step as the starting point, the non-differential terms (convection coefficient and source term) were expanded into power series of grid spacing and the coefficients of the power series were determined by means of eliminating the truncation error of the corresponding modified differential equation, and thus we obtain the high accurate PFD scheme of variational step. This scheme uses three, five and seven nodes under the circumstances of one, two and three dimensional problems, and also the scheme is an upwind scheme. This article employed the PFD scheme of variational step to calculate the convection-diffusion equation, the equation of variational coefficient and Burgers equation and so on, and a comparison with the normal first order upwind and second order central scheme was made. The results of the numerical experiments show that the PFD scheme of variational step has higher accuracy and better stability and convergence than that of the first order upwind and second order central scheme. The resolution of the PFD scheme of variational step has been clearly improved when it deals with problems which have thin boundary layers compared with the PFD scheme of uniform step.

**Key words:** high accurate difference scheme; convection-diffusion equation; perturbational finite difference method of variational step.

## 1 引言

对微分方程的差分求解, 上世纪 90 年代, 高智提出数值摄动思想和摄动有限差分(PFD)方法<sup>[3,6]</sup>。摄动有限差分(PFD)方法在微分方程的差分近似中, 离散微商项的同时, 也离散非微商项(对流系数和源项); 把非微商项摄动展开成网格步长  $\Delta x$  的幂级数, 并通过提高差分格式相应修正方程误差阶的方法求出摄动幂级数系数, 从而获得高精度差分格式。它与增加基点数目的方法和引入高阶导数的紧致方法不同, 是微分方程差分近似高精度化的一条新思路。利用 PFD 方法给出对流扩散方程, 对流扩散反应模型方程、二阶双曲型方程、KdV 方程等在离散单元内局部线性化方程的摄动精确数值解(PENS)格式和摄动有限差分格式, 这些格式具有一阶迎风格式的简洁结构形式, 在一、二和三维情况下分别使用 3、5 和 7 个基点。数值实验表明: 对解的间断、物理振荡等复杂现象 PENS 格式和 PFD 格式精度高、分辨率高<sup>[1-9]</sup>。

在物理量变化梯度大的局部区域, 需要局部加密网格, 局部加密网格的通常处理办法是对自变量进行数学变换。然而, 对自变量进行数学变换容易引起误差积累和非物理数值振荡。本文利用等步长 PFD 方法的基本思想, 构造变步长 PFD 格式。变步长 PFD 格式形式上比等步长 PFD 格式复杂, 但在处理局部加密网格的计算问题中, 变步长 PFD 格式不需要对自变量进行数学变换, 可以较好地解决数值计算中的误差积累和非物理数值振荡问题。数值试验表明, 与一阶迎风格式, 二阶中心差分格式和等步长 PFD 格式比较, 变步长 PFD 格式具有精度高, 稳定性与收敛性好的特点。

## 2 对流扩散反应方程的变步长 PFD 格式

一维对流扩散方程为:

$$A \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S \quad (1)$$

对流扩散方程(1)的变步长一阶迎风差分格式为:

$$\frac{1-\alpha}{2} \frac{A_i}{\Delta x_+} (u_{i+1} - u_i) + \frac{1+\alpha}{2} \frac{A_i}{\Delta x_-} (u_i - u_{i-1}) = \frac{2[(u_{i-1} - u_i)\Delta x_+ + (u_{i+1} - u_i)\Delta x_-]}{\Delta x_-^2 \Delta x_+ + \Delta x_+^2 \Delta x_-} + S, \quad (2)$$

其中  $\alpha = \text{sign}(A)$ ,  $\Delta x_-$  为  $(i-1)$  和  $i$  节点间的网格步长,  $\Delta x_+$  为  $i$  和  $(i+1)$  节点间的网格步长。

差分格式(2)的修正微分方程为:

$$A \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S + E_{r-} \Delta x_- + E_{r+} \Delta x_+ + O(\Delta x_+^2, \Delta x_-^2) \quad (3)$$

其中

$$E_{r-} = \frac{1+\alpha}{4} A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad E_{r+} = -\frac{1-\alpha}{4} A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

设想对格式(2)中的对流项系数  $A_i$  和源项  $S_i$  进行摄动展开并取一阶项。

$$\frac{1-\alpha}{2} \frac{A_{p+}}{\Delta x_+} (u_{i+1} - u_i) + \frac{1+\alpha}{2} \frac{A_{p-}}{\Delta x_-} (u_i - u_{i-1}) =$$

$$\frac{2[(u_{i-1} - u_i)\Delta x_+ + (u_{i+1} - u_i)\Delta x_-]}{\Delta x_-^2 \Delta x_+ + \Delta x_+^2 \Delta x_-} + S_{p+} \quad (4)$$

其中

$$A_p = A + \frac{1-\alpha}{2} A_+ \Delta x_+ + \frac{1+\alpha}{2} A_- \Delta x_- \quad (5a)$$

$$S_p = S + \frac{1-\alpha}{2} S_+ \Delta x_+ + \frac{1+\alpha}{2} S_- \Delta x_- \quad (5b)$$

摄动差分格式(4)的修正微分方程为:

$$A_p \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_p + E_{p,-} \Delta x_- + E_{p,+} \Delta x_+ +$$

$$O(\Delta x_+^2, \Delta x_-^2) \quad (6)$$

其中

$$E_{p,-} = \frac{1+\alpha}{4} A_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$A_p = A + \frac{1+\alpha}{2} A_- \Delta x_- \quad (7a)$$

$$E_{p,+} = -\frac{1-\alpha}{4} A_{p_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$A_{p_i} = A + \frac{1-\alpha}{2} A_+ \Delta x_+ \quad (7b)$$

那么若如下关系成立

$$A_+ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_+ + O(\Delta x_-) \quad (8a)$$

$$A_- \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_- + O(\Delta x_+) \quad (8b)$$

则摄动差分格式(4)的精度可达到二阶。

由修正方程(3)知

$$A \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S + O(\Delta x_+, \Delta x_-) \quad (9)$$

式(8a), (8b)和(9)联立可得:

$$A_+ = -\frac{1}{2} A^2 + O(\Delta x_+, \Delta x_-) \quad (10a)$$

$$S_+ = -\frac{1}{2} AS + O(\Delta x_+, \Delta x_-) \quad (10b)$$

$$A_- = \frac{1}{2} A^2 + O(\Delta x_+, \Delta x_-) \quad (10c)$$

$$S_- = \frac{1}{2} AS + O(\Delta x_+, \Delta x_-) \quad (10d)$$

将(10a)至(10d)诸式分别代入式(5a)和(5b)得:

$$A_p = A - \frac{1-\alpha}{4} A^2 \Delta x_+ + \frac{1+\alpha}{4} A^2 \Delta x_- =$$

$$A \left( 1 - \frac{1-\alpha}{4} A \Delta x_+ + \frac{1+\alpha}{4} A \Delta x_- \right) \quad (11a)$$

$$S_p = S - S \frac{1-\alpha}{4} A \Delta x_+ + S \frac{1+\alpha}{4} A \Delta x_- =$$

$$S \left( 1 - \frac{1-\alpha}{4} A \Delta x_+ + \frac{1+\alpha}{4} A \Delta x_- \right) \quad (11b)$$

从而得到一维对流扩散方程(1)的二阶迎风,三基点变网格步长摄动有限差分格式:

$$\frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\Delta x_+} A_i (u_{i+1} - u_i) + \frac{1+\alpha}{2} \frac{1}{\Delta x_-} A_i (u_i - u_{i-1}) =$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1-\alpha}{4} A_i \Delta x_+ + \frac{1+\alpha}{4} A_i \Delta x_-} \cdot$$

$$\frac{2[(u_{i-1} - u_i)\Delta x_+ + (u_{i+1} - u_i)\Delta x_-]}{\Delta x_-^2 \Delta x_+ + \Delta x_+^2 \Delta x_-} + S_i \quad (12)$$

在变步长 PFD 格式(12)中令  $\Delta x_- = \Delta x_+$ , 得到等步长, 迎风二阶三基点 PFD 格式:

$$\frac{A_i}{2\Delta x} [(1-\alpha)(u_{i+1} - u_i) + (1+\alpha)(u_i - u_{i-1})] = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2} A_i \Delta x} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + S_i \quad (13)$$

### 3 数值实验

#### (1) 简单常系数问题

$$\begin{aligned} -\epsilon u_{xx} + u_x &= 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, u(1) = 1 \end{aligned}$$

其精确解为  $u(x) = (e^{x/\epsilon} - 1)/(e^{1/\epsilon} - 1)$ 。

本方程解在  $x = 1$  附近具有边界层型结构。在大部分区域内,解接近上游值  $u(0)$ , 仅仅在靠近边界  $x = 1$  的薄层内,解急剧增大到下游值  $u(1)$ 。计算中取  $\epsilon = 0.01$ , 计算区域为  $0 < x < 1$ 。网格节点取 101。变步长计算时在  $0.9 < x < 1$  区间内对网格加密,在  $0 < x < 0.9$  区间取 50 个均匀网格点,在  $0.9 < x < 1$  区间取 50 个均匀网格点。计算结果见图 1 和表 1。从图中可以看出:变步长 PFD 格式基本与精确解重合,精度优于等步长 PFD 格式和二阶中心格式。一阶迎风格式偏离精确解最大。表 1 列出了诸格式最大绝对误差和方均根误差(UW, CDS, PFD\_uniform 和 PFD\_ununiform 分别表示一阶迎风,二阶中心,等步长 PFD 格式和变步长 PFD 格式)。

可以看出:一阶迎风格式误差比二阶中心和等步长 PFD 格式约大一个数量级,而变步长 PFD 格式的误差比 CDS 约小一个数量级。

#### (2) 常系数对流扩散反应模型方程

$$\begin{cases} \epsilon u_{xx} + u_x - (1+\epsilon)u = 0 & -1 < x < 1 \\ u(-1) = 1 + e^{-2} \\ u(1) = 1 + e^{-(2(1+\epsilon)/\epsilon)} \end{cases}$$

其精确解为  $u(x) = e^{(x-1)} + e^{[-(1+\epsilon)(1+x)/\epsilon]}$ 。

该问题的解,当  $\epsilon \ll 1$  时在  $x = -1$  的边界附近存在薄边界型结构。计算中取  $\epsilon = 0.005$ , 计算区域为  $-1 < x < 1$ 。网格节点取 401。变步长计算时在  $-1 < x < -0.4$  区间内对网格加密,在  $-1 < x <$

$-0.4$  区间取 300 个均匀网格点,在  $-0.4 < x < 1$  区间取 100 个均匀网格点。计算结果见图 2 和表 2。表 2 列出了变步长 PFD 格式与一阶迎风,二阶中心格式及等步长 PFD 格式最大绝对误差和方均根误差。

同样可以看出:变步长 PFD 格式比其它诸格式精度均有明显提高。

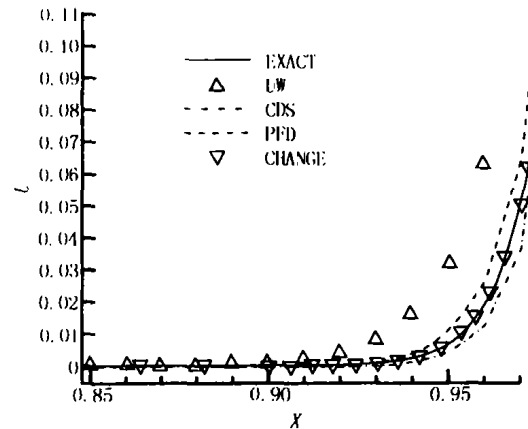


图 1 简单常系数方程(局部放大)

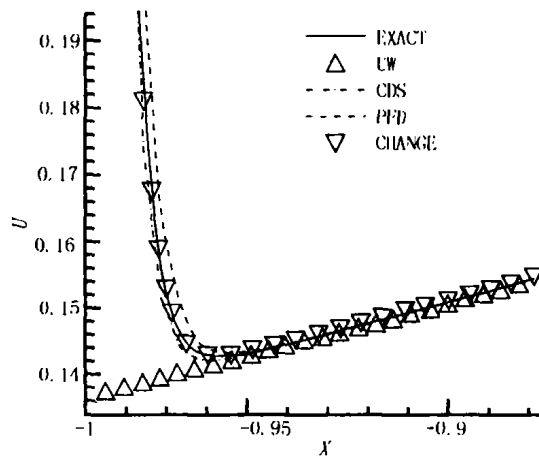


图 2 常系数对流扩散反应模型方程(局部放大)

#### (3) 变系数方程<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} \epsilon u_{xx} - \frac{1}{1+x} u_x - \frac{1}{2+x} u = \\ (\epsilon - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}) e^x - \frac{1}{2+x} 2^{-1/\epsilon} (1+x)^{1+1/\epsilon} \\ 0 < x < 1 \\ u(0) = 1 + 2^{-1/\epsilon}, u(1) = e + 2 \end{cases}$$

表 1 问题 1 诸格式最大误差和方均根误差

	UW	CDS	PFD_uniform	PFD_ununiform
最大误差	0.132121E+00	0.345461E-01	0.321206E-01	0.211626E-02
方均根误差	0.196634E-01	0.443523E-02	0.434944E-02	0.640058E-03

表 2 常系数对流扩散反应模型方程诸格式最大误差和方均根误差

	UW	CDS	PFD_uniform	PFD_ununiform
最大误差	0.366717E+00	0.343730E-01	0.320976E-01	0.777927E-02
方均根误差	0.197067E-01	0.220887E-02	0.219703E-02	0.142005E-02

表 3 变系数方程诸格式最大误差和方均根误差

	UW	CDS	PFD_uniform	PFD_ununiform
最大误差	0.407668E+00	0.386300E+00	0.138690E+00	0.238995E-01
方均根误差	0.309216E-01	0.272621E-01	0.101405E-01	0.459306E-02

其精确解为  $u(x) = e^x + 2^{-1/\epsilon}(1+x)^{1+1/\epsilon}$ 。

该问题的解,当  $\epsilon$  很小时在  $x = 1$  的边界附近存在薄边界型结构。计算中取  $\epsilon = 0.001$ , 计算区域为  $0 < x < 1$ 。网格节点取 201。变步长计算时在  $0.9 < x < 1$  区间内对网格加密,在  $0 < x < 0.9$  区间取 100 个均匀网格点,在  $0.9 < x < 1$  区间取 100 个均匀网格点。计算结果见图 3 和表 3。表 3 列出了变步长 PFD 格式与一阶迎风,二阶中心格式及等步长 PFD 格式最大绝对误差和方均根误差。

分析计算结果表明:对于变系数方程,变步长 PFD 格式基本与精确解重合,其次是等步长 PFD,再次一阶迎风格式,二阶中心格式在附近出现振荡。

#### (4) 非线性 Burgers 方程

Burgers 方程是典型的模型方程,其形式为:

$$\begin{cases} uu_x = u_{xx}/Re & -1 < x < 1 \\ u(-1) = \tanh(Re/2) \\ u(1) = -\tanh(Re/2) \end{cases}$$

其精确解为  $u(x) = -\tanh(xRe/2)$ 。

该问题的解,当  $Re$  数很大时在  $x = 0$  附近变化剧烈。计算中取  $Re = 1000$ , 计算区域为  $-1 < x < 1$ 。网格节点取 501。变步长计算时在  $-0.2 < x < 0.2$  区间内对网格加密,在  $-1 < x < -0.2$  和  $0.2 < x < 1$  区间取 100 个均匀网格点,在  $-0.2 < x < 0.2$  区间取 400 个均匀网格点。计算结果见图 4。

可以看出:变步长 PFD 格式基本与精确解重合,其次是等步长 PFD,一阶迎风格式与精确解有较大偏离,而二阶中心格式此时已出现局部振荡。

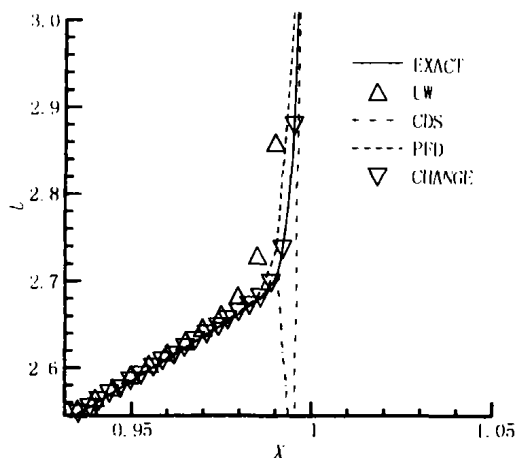


图3 变系数方程(局部放大)

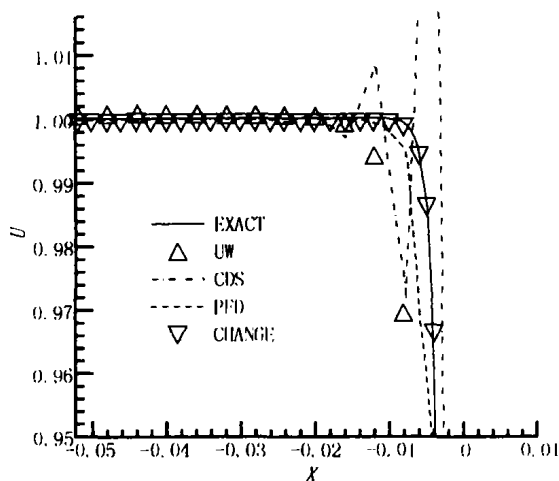


图4 非线性 Burgers 方程(局部放大)

为比较变步长 PFD 格式与其它诸格式的收敛性和稳定性情况,对 Burgers 方程,图 5 和图 6 分别给出了四种格式方均根误差与迭代次数的关系。图中横坐标代表迭代次数,纵坐标代表方均根误差,网格点与与计算图 4 的网格点一样。图 5 和图 6 中  $Re$  分别为 1000 和 1400。分析两图不难发现:变步长 PFD 格式收敛性和稳定性比其它诸格式均有所提高。特别是当  $Re$  数增大到 1400 时,二阶中心格式已得不到稳定解,而此时变步长 PFD 格式仍保持了较好的收敛性与稳定性。

#### 4 结论

通过文中 4 个算例,表明:变步长 PFD 格式与一阶迎风,二阶中心及等步长 PFD 格式相比具有精度高,稳定性与收敛性好的特点。特别是在求解梯度变

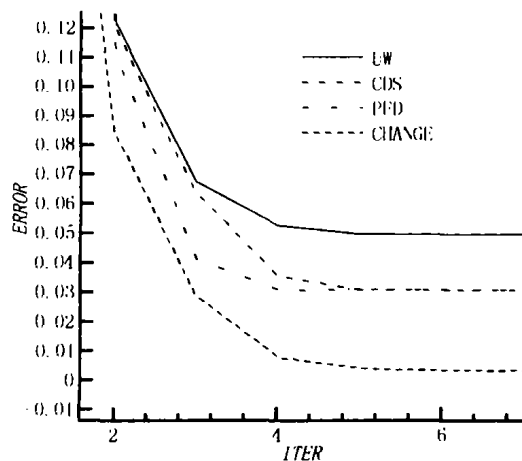


图5 Burgers 方程收敛性分析 ( $Re = 1000$ )

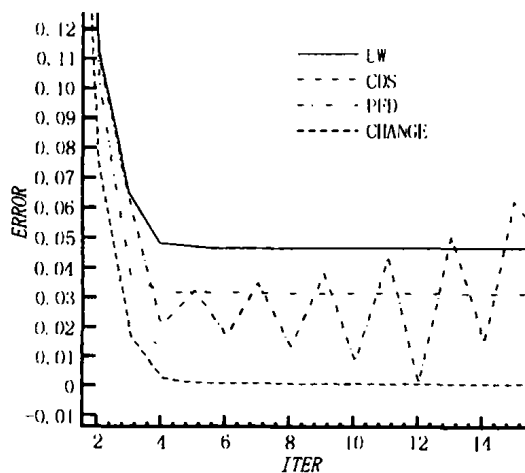


图6 Burgers 方程收敛性分析 ( $Re = 1400$ )

化比较剧烈的问题时,变步长 PFD 格式比其它格式具有更明显的优势。

#### 参 考 文 献:

- [1] FERZIGER J H, PERIC M. Computational Methods for Fluid Dynamics[M]. 2nd edit. Springer, Berlin 1999.
- [2] PATANKAR S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow[M]. McGraw Hill, New York 1980.
- [3] GAO Z. An infinite-order accurate upwind compact difference scheme for the convective diffusion equation [A]. Proc. of Asia Workshop on Computational Fluid Dynamics[C]. Sichuan, China, 1994.
- [4] GAO Zhi, YANG Guo-wei. Perturbation finite volume method for the convective-diffusion integral equation [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 20(6):580-590.

- [5] GAO Zhi, HU Li-min. Perturbational finite difference scheme of convection-diffusion equation[J]. Journal of Hydrodynamics, Ser. B, 2002, (2): 51-57.
- [6] 高智. 摄动有限差分方法研究进展[J]. 力学进展, 2000, 30(2): 200-215.
- [7] 忻孝康等. 定常对流扩散方程的修正积分因子方法[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 1993, 8(3): 285-295.
- [8] 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积方法及讨论[A]. 第十一届全国计算流体力学会议论文集[C]. 河南洛阳:中国空气动力学会, 2002. 29-35.
- [9] 朱力立, 胡利民, 高智. 摄动有限差分(PFD)方法的数值计算[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2003, 18(6): 732-737.
- [10] 林建国, 刘颖. 对流扩散方程局部分析解的数值模拟[J]. 水动力学研究与进展 A辑, 2003, 18(3): 283-288.
- [11] 杨志峰等. 对流扩散方程的一种高精度优化差分格式[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 1991, 6(1): 113-119.
- [12] 陈国谦, 杨志峰. 对流扩散方程的二阶紧凑迎风差分格式[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 1993, 8(3): 499-507.
- [13] 申义庆, 高智, 杨顶辉. 双曲守恒型方程的二阶摄动有限差分格式[J]. 空气动力学报, 2003, 21(3): 342-350.