

# 用格子 Boltzmann 方法研究 Burgers 方程<sup>1)</sup>

阎广武

(中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室, 北京 100080;  
吉林大学数学系力学教研室, 长春 130023)

**摘要** 提出了用于 Burgers 方程的格子 Boltzmann 模型. 应用 Chapman-Enskog 展开和多重尺度技术, 通过选择平衡态分布函数的高阶矩, 得到了几种精度的 Burgers 方程, 模型中的参数通过分析耗散性质和色散性质给出.

**关键词** 格子 Boltzmann 方法, Burgers 方程, 多重尺度, 时间尺度  $t_0$  上的守恒律

## 引 言

研究模型方程具有广泛而深刻的物理背景和现实意义. 不仅在流体力学领域, 而且在众多物理学科中人们已对它产生了很大的兴趣, 用它去解释和揭示出新的物理现象与本质. 本文应用格子 Boltzmann 方法构造 Burgers 方程的模型, 从细观的角度建立和理解 Burgers 方程, 并给出一个新的数值模拟方法. 格子 Boltzmann 方法 (LBM) 是近几年发展起来的一种模拟复杂系统的新方法<sup>[1~3]</sup>. 这种方法的基本思想是利用离散的 BGK 型 Boltzmann 的模型方程式, 通常是将时间、空间与粒子速度全部离散, 得到格子 Boltzmann 方程, 通过选择平衡态分布函数, 利用多重尺度技术和 Chapman-Enskog 展开, 可以得到相应的宏观方程.

一些研究表明, 对于某些特殊的模型方程, 用格子 Boltzmann 方法可以实现模型的构造. 如文 [4] 是通过变换给出了 Burgers 方程的算法. 对于简单的模型方程, 通过增加平衡态分布函数的限定条件, 适当选择平衡态的形式可以实现<sup>[4~6,8]</sup>. 然而, 对于如 KdV 方程, RLW 方程这样的模型方程, 可以构造出高阶精度的格子 Boltzmann 算法<sup>[9]</sup>. 保留分布函数的高阶修正项, 适当选择平衡态分布函数的高阶矩的形式, 可以将截断误差提高到更高阶.

本文将分布函数进行 Chapman-Enskog 展开到 3 阶, 通过确定时间  $t_0$  上的守恒律, 给出了平衡态的形式. 得到了截断误差为  $O(\varepsilon^2)$  ( $\varepsilon$  是 Knudsen 数) 的 Burgers 方程.

## 1 格子 Boltzmann 模型

### 1.1 宏观物理量的定义

考虑一维模型, 将速度离散成 4 个方向, 每一个节点与相邻近的 4 个节点相连, 沿每一格线运动的粒子分布函数为  $f_\alpha(x, t)$ , 其中  $\alpha = 0, 1, \dots, 4$  ( $\alpha = 0$  表示静止粒子,  $e_\alpha = (0, c, -c, kc, -kc)$ )

1998-01-22 收到第一稿, 1998-05-25 收到修改稿.

1) 中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室开放基金资助项目.

为速度. 如果  $k=0$ , 则表示只与周围两个格点相连, 此时为 3-Bit 模型; 当  $k=2$  表示与周围 4 个格点相连, 为 5-Bit 模型. 物理量  $u(x, t)$  (粒子数) 定义为

$$u(x, t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x, t) \quad (1)$$

考虑守恒性质有

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq}(x, t) = u(x, t) \quad (2)$$

格子 Boltzmann 方程为

$$f_{\alpha}(x + e_{\alpha}, t + 1) - f_{\alpha}(x, t) = -\frac{1}{\tau} [f_{\alpha}(x, t) - f_{\alpha}^{eq}(x, t)] \quad (3)$$

其中  $f_{\alpha}^{eq}(x, t)$  表示局部平衡态分布函数,  $\tau$  为弛豫时间.

### 1.2 不同时间尺度上的格子 Boltzmann 方程

我们给一个小参数  $\varepsilon$ , 作为时间步长和 Knudsen 数<sup>[11]</sup>. 则 (3) 式可以写成

$$f_{\alpha}(x + \varepsilon e_{\alpha}, t + \varepsilon) - f_{\alpha}(x, t) = -\frac{1}{\tau} [f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}] \quad (4)$$

将 (4) 式左边作 Taylor 展开得

$$f_{\alpha}(x + \varepsilon e_{\alpha}, t + \varepsilon) - f_{\alpha}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right]^n f_{\alpha}(x, t) \quad (5)$$

展到  $\varepsilon^4$ , (5) 式右边为

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right] f_{\alpha} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 f_{\alpha} + \\ & \frac{\varepsilon^3}{6} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right]^3 f_{\alpha} + \frac{\varepsilon^4}{24} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right]^4 f_{\alpha} + O(\varepsilon^5) \end{aligned} \quad (6)$$

应用 Chapman-Enskog 展开<sup>[7]</sup>

$$f_{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_{\alpha}^{(n)} = f_{\alpha}^{(0)} + \varepsilon f_{\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{\alpha}^{(2)} + \varepsilon^3 f_{\alpha}^{(3)} + \varepsilon^4 f_{\alpha}^{(4)} + \dots \quad (7)$$

这里记  $f_{\alpha}^{eq}$  为  $f_{\alpha}^{(0)}$ . 给出 4 个时间尺度

$$t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \quad t_3 = \varepsilon^3 t$$

有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t_3} + O(\varepsilon^4) \quad (8)$$

分别由  $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$  和  $\varepsilon^4$  的系数相等, 得到系列方程<sup>[9]</sup>

$$\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_1} - \tau \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_{\alpha}^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(2)} \quad (10)$$

$$\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_2} + (1 - 2\tau) \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_1} + \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^3 f_{\alpha}^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(3)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_3} + \left(2\tau^2 - \frac{5}{2}\tau + \frac{1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_{\alpha}^{(0)} + (1 - 2\tau) \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\alpha}^{(0)} + \\ \left(-\tau^3 + \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{7}{12}\tau + \frac{1}{24}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^4 f_{\alpha}^{(0)} + \frac{\partial f_{\alpha}^{(2)}}{\partial t_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\alpha}^{(2)}}{\partial t_1^2} = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(4)} \end{aligned} \quad (12)$$

详细过程见文 [9]. 上面的方程 (9)~(12) 称为时间尺度  $t_0, t_1, t_2, t_3$  上的格子 Boltzmann 方程. 对二维和三维问题都成立. 上述方程中系数对建立其它数理方程的高精度格子 Boltzmann 模型是重要的.

### 1.3 Burgers 方程

记  $m^0 = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}$ . 由 (9)+(10) $\times\epsilon$  +(11) $\times\epsilon^2$  +(12) $\times\epsilon^3$ , 再求和得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial m^0}{\partial x} + \epsilon \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_{\alpha}^{(0)} + \epsilon^2 \left(\tau^2 - \tau - \frac{1}{6}\right) \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^3 f_{\alpha}^{(0)} + \\ \epsilon^3 \left[ \left(1 - 2\tau\right) \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\alpha}^{(0)} + \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \sum_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}^{(2)}}{\partial t_1} + \left(2\tau^2 - 2\tau + \frac{1}{4}\right) \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_{\alpha}^{(0)} + \right. \\ \left. \left(-\tau^3 + \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{7}{12}\tau + \frac{1}{24}\right) \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^4 f_{\alpha}^{(0)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

如选择

$$m^0 = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha} = \frac{1}{2} u^2 \quad (14)$$

$$\pi^0 = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}^2 = \frac{1}{3} u^3 + \lambda u \quad (15)$$

则有

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\alpha}^{(0)} = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_{\alpha}^{(0)} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (17)$$

其中  $\lambda$  为待定系数. (16) 式实际为  $u$  和  $m^0$  的守恒方程, 我们称其为时间尺度  $t_0$  上的守恒律. 文 [5, 6] 中曾出现类似的守恒方程, 但是那里不是时间尺度  $t_0$  上的.

(17) 式写成

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 f_{\alpha}^{(0)} + \\ & \eta \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 f_{\alpha}^{(0)} + \left( 2\tau^2 - \tau + \frac{1}{4} \right) \varepsilon^3 \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{\partial}{\partial t_0} + e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f_{\alpha}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\nu = \lambda\varepsilon(\tau - 1/2)$ ,  $\mu = \varepsilon^2(\tau^2 - \tau + 1/6)$ ,  $\eta = \varepsilon^3 \left( -\tau^3 + \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{7}{12}\tau + \frac{1}{24} \right)$ .

(18) 式实际上是 2 阶精度的 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\varepsilon^2) \quad (19)$$

对于 3-Bit 模型, 即  $k = 0$ , 由方程 (2), (14) 和 (15) 可直接给出平衡态分布函数. 文 [8] 也给出了类似的结果.

$$f_1^{(0)} = \frac{u^2}{4c} + \frac{u^3}{6c^2} + \frac{\lambda u}{2c^2} \quad (20)$$

$$f_2^{(0)} = \frac{u^3}{6c^2} + \frac{\lambda u}{2c^2} - \frac{u^2}{4c} \quad (21)$$

$$f_0^{(0)} = u - \frac{u^3}{3c^2} - \frac{\lambda u}{c^2} \quad (22)$$

对于 5-Bit 模型,  $k = 2$ , 可以由平衡态分布函数的前 5 阶矩得到平衡态分布函数. 如记  $\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = B_1$ ,  $\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha} = cB_2$ ,  $\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}^2 = c^2B_3$ ,  $\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}^3 = c^3B_4$ , 及  $\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}^4 = c^4B_5$ , 则可得到平衡态分布函数为

$$f_1^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{k^2 B_3 - B_5 + k^2 B_2 - B_4}{k^2 - 1} \right) \quad (23)$$

$$f_2^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{k^2 B_3 - B_5 - k^2 B_2 + B_4}{k^2 - 1} \right) \quad (24)$$

$$f_3^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{B_5 - B_3}{k^4 - k^2} + \frac{B_4 - B_2}{k^3 - k} \right) \quad (25)$$

$$f_4^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{B_5 - B_3}{k^4 - k^2} - \frac{B_4 - B_2}{k^3 - k} \right) \quad (26)$$

$$f_0^{(0)} = B_1 - (f_1^{(0)} + f_2^{(0)} + f_3^{(0)} + f_4^{(0)}) \quad (27)$$

#### 1.4 几个不同精度的模型

对于 3-Bit 模型, 3 阶矩和 4 阶矩是不独立的. 由 (2), (14), (15) 式得

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}^3 = \frac{1}{2} c^2 u^2 \quad (28)$$

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}^4 = \left(\frac{1}{3}u^3 + \lambda u\right) c^2 \quad (29)$$

方程 (18) 成为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}u^2\right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\frac{1}{4}u^4 - (c^2 - 3\lambda)u^2\right] + O(\varepsilon^3) \quad (30)$$

截断误差为

$$R = \mu \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\frac{1}{4}u^4 - (c^2 - 3\lambda)u^2\right] + O(\varepsilon^3) \quad (31)$$

对于 5-Bit 模型, 0 阶到 4 阶矩是独立的. 如果选择

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}^3 = \frac{3}{2}\lambda u^2 + \frac{1}{4}u^4 + \xi_1 u \quad (32)$$

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}^4 = \frac{1}{5}u^5 + 2\lambda u^3 + u^2 \xi_1 + \xi_2 u \quad (33)$$

其中  $\xi_1, \xi_2$  为待定参数. 此时误差为

$$R = \xi_1 \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\varepsilon^3) \quad (34)$$

(1) 当  $\lambda = 0$  时得到 KdV 方程 [9].

(2) 当  $\lambda = 0$ , 并且  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  时, 得到激波的模式方程. 此时误差为

$$R = O(\varepsilon^3)$$

(3) 当  $\xi_1 < 0$ , 则得到 KdV-Burgers 方程. 此时误差为

$$R = O(\varepsilon^3) \quad (35)$$

(4) 对不同的  $\xi_1, \xi_2$  则得到不同精度的 Burgers 方程.

## 2 数值模拟

如下 3 个例子均选自于文献 [10].

算例 1 非线性方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

这个问题有解析解

$$u_e(x, t) = \frac{4\pi}{Re} \frac{AB}{C + D}$$

其中,  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{n^2 \pi^2 t}{Re}\right]$ ,  $B = n I_n\left(\frac{Re}{2\pi}\right) \sin(n\pi x)$ ,  $C = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{n^2 \pi^2 t}{Re}\right] I_n\left(\frac{Re}{2\pi}\right) \cos(n\pi x)$ ,  $D = I_0\left(\frac{Re}{2\pi}\right)$ . 其中  $I_n(x)$  为第一类  $n$  阶修正 Bessel 函数. 运算取  $Re = 100$ ,  $\Delta x = 0.01$ ,

$\Delta t = 0.002$ ,  $c = 5.0$ . 当  $N = 200$ ,  $N = 400$ ,  $N = 1000$ ,  $N = 1500$  分别对应  $t = 0.4$ ,  $t = 0.8$ ,  $t = 2.0$ ,  $t = 3.0$ . 图 1 给出了 4 个时刻的解析解与两种模型数值结果的比较. 可以看到 3-Bit 模型的结果比 5-Bit 模型的结果好.

**算例 2** 取初条件

$$u(x, 0) = \frac{1}{Re} \left( x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

边条件

$$u(1/2, t) = \frac{1}{Re+t} \left[ \frac{1}{2} + \operatorname{tg} \frac{Re}{4(Re+t)} \right], \quad u(3/2, t) = \frac{1}{Re+t} \left[ \frac{3}{2} + \operatorname{tg} \frac{3Re}{4(Re+t)} \right]$$

有解析解

$$u(x, t) = \frac{1}{Re+t} \left[ x + \operatorname{tg} \frac{Re x}{2(Re+t)} \right]$$

其中  $\Delta x = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.002$ ,  $Re = 500$ .

下面表 1 给出算例 2 的理论解与数值模拟结果的比较, 从中可以得到误差的大小. 其中  $u$  的量级为  $10^{-3}$ ,  $T$  表示理论解,  $N$  表示数值解. 图 2 中小图为放大后的 3 个时刻的解析解与数值解的比较.

**表 1** 算例 2 的理论结果与数值模拟结果的比较

Table 1 The quantitative comparisons between numerical and theoretical results of test 2

$x$	$t = 0.4$		$t = 0.8$		$t = 2.0$	
	$T$	$N$	$T$	$N$	$T$	$N$
5.0E-01	1.509051	1.509051	1.507421	1.507421	1.502552	1.502552
7.0E-01	2.127721	2.127470	2.125389	2.124878	2.118425	2.117133
9.0E-01	2.763012	2.762656	2.759922	2.759193	2.750689	2.748845
1.10	3.422263	3.421762	3.418325	3.417290	3.406563	3.403951
1.30	4.115477	4.114753	4.110557	4.109080	4.095869	4.092160
1.50	4.857069	4.857069	4.850961	4.850961	4.832730	4.832730

**算例 3** 考虑 KdV-Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu > 0, \nu > 0, \quad u_{-\infty} = 1, \quad u_{\infty} = 0, \quad t > 0$$

并且, 在无穷远处一切导数消失. 初值为

$$\begin{cases} u(x, 0) = 1, & x < 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

加一初始小扰动

$$\begin{cases} \delta u = 0.2, & x \in [-0.2, 0] \\ \delta u = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

当  $\xi_1 < 0$  时, 方程 (30) 为 KdV-Burgers 方程. 取  $\xi_1 = -1.0$ , 给定  $\mu, \nu, \varepsilon$ , 可以由下式给出弛豫时间  $\tau$ .

$$\tau = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{\mu}{\varepsilon^2}}$$

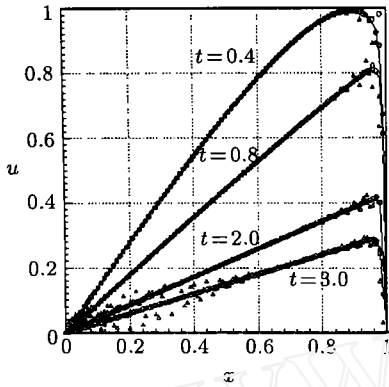


图 1 算例 1 的数值结果与精确结果的比较. 其中, 实线为精确解, 小圆为 3-Bit 模型的结果, 小三角形为 5-Bit 模型的结果. 3-Bit 模型,  $c = 5.0, \lambda = c^2/3$ ; 5-Bit 模型,  $c = 5.0, \lambda = c^2/3, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1.0$

Fig.1 The comparisons between numerical and theoretical results of test 1, Exact solution (line), numerical results of 3-Bit model(circle), 5-Bit model (triangle). 3-Bit model,  $c = 5.0, \lambda = c^2/3$ ; 5-Bit model,  $c = 5.0, \lambda = c^2/3, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1.0$

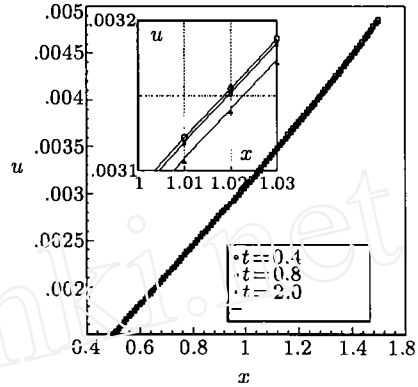


图 2 算例 2 的数值结果与精确结果的比较. 其中, 实线为精确解, 模型为 3-Bit. 图中的小图为放大之后的结果, 每时刻有各自的解析解 (实线).

$c = 5.0, \lambda = c^2/3$

Fig.2 The comparisons between numerical and theoretical results of test 2, Exact solution (line), the model is 3-Bit . The subfigure in Fig.2 shows theoretical and numerical results by enlarge the scales.  $c = 5.0, \lambda = c^2/3$

再由  $\nu = \lambda\varepsilon(\tau - 1/2)$  给出  $\lambda$ .

应用 5-Bit 模型, 选取  $\Delta x = 0.01, c = 5.0$ . 数值模拟分两种情况:

- (1) 当  $\nu = 6, \mu = 1$  时, 呈耗散优势, 初始时的扰动方波在  $t = 3.0$  以后被抹平, 之后激波很快发展到稳定光滑的激波. 如图 3.
- (2) 当  $\nu = 0.05, \mu = 1$ , 呈色散优势, 即使不加干扰, 波头也会出现强烈的振荡, 并且振荡越来越强, 以致没有激波的形状, 如图 4.

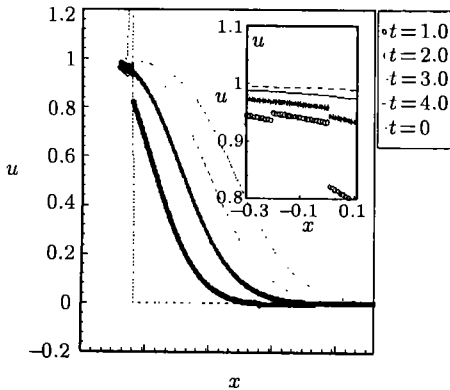


图 3 算例 3 的情况 (1), 耗散占优势.  $\nu = 6, \mu = 1$ . 初始加小方波扰动. 图中给出不同时刻的情况, 其中, 实线为数值解. 格点数为 1000.

Fig.3 The case (1) of test 3, where, exact solution (line), lattice size: 1000

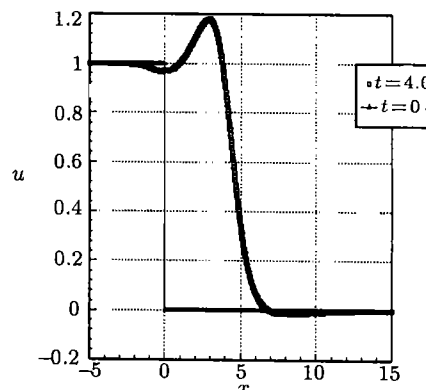


图 4 算例 3 的情况 (2), 色散呈优势.  $\nu = 0.05, \mu = 1.0$ . 格点数为 2000. 图中结果没加扰动.

Fig.4 The case (2) of test 3, lattice size: 2000

### 3 结论

我们应用分布函数的 Chapman-Enskog 展开和多重尺度技术, 保留分布函数  $f_{\alpha}^{(3)}$ , 得到了精度较高的 Burgers 方程和 KdV-Burgers 方程, 较好地再现了几个经典结果. 应当指出的是将格子 Boltzmann 方法应用到求解数学物理方程还是一种尝试, 通过对此类模型方程的研究, 目的在于求解复杂的数学物理方程. 然而构造复杂系统中的如气体动力学的 Euler 方程, 乃至 Navier-Stokes 方程高阶精度的模型较为复杂 (宏观物理量的增加, 得到平衡态分布函数的高阶矩比较困难, 同时相应的空间格子的复杂性将增加). 这将有待于解决.

### 参 考 文 献

- 1 Qian YH, d'humieres D, Lallemand P. Lattice BGK model for Navier-Stokes equation. *Europhys Lett*, 1992, 17, (6): 479~484
- 2 Chen HD, Chen SY, Matthaeus WH. Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice Boltzmann method. *Phys Rev A*, 1992, 45: 5339~5342
- 3 Benzi R, Succi S, Vergassola M. The lattice Boltzmann equations: theory and applications. *Physics Reports*, 1992, 222: 147~197
- 4 Alexander FJ, Chen HD, Chen SY, Doolen GD. Lattice Boltzmann model for compressible fluids. *Phys Rev*, 1993, 46A: 1967~1970
- 5 邹秀芬. 对流扩散方程的格点模型. 计算物理, 1996, 3: 310~314 (Zou Xiufen. A lattice model for convection diffusion equation. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1996, 3: 310~314 (in Chinese))
- 6 阎广武, 胡守信, 施卫平. 守恒方程的差分型格子气方法. 计算物理, 1997, 2: 190~194 (Yan GW, Hu SX, et al. A difference type lattice gas scheme for conservational equation. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1997, 2: 190~194 (in Chinese))
- 7 Chapman S, Cowling TG. The mathematical theory of non-uniform gas. Cambridge: Cambridge University Press, 1939
- 8 李元香, 康立山. 线性 and 拟线性抛物型方程的格点模型. 计算物理, 1997, 4/5: 587~589 (Li YX, Kang LS. Lattice models for linear and quasi-linear parabolic equations. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1997, 4/5: 587~589 (in Chinese))
- 9 Yan GW, Chen Yaosong, Hu Shouxing. A lattice boltzmann method for KdV equation. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 14(1): 18~26
- 10 忻孝康, 刘儒勋, 蒋伯诚. 计算流体力学. 国防科技大学出版社, 1989 (Xin XK, Liu RX, Jiang BC. Computational Fluid Dynamics. Changsha, China: National University of Defence Technology Press, 1987)
- 11 Hou SL, Zhou QS, Chen SY, et al. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. *J Comput Phys*, 1995, 118: 329~347



## STUDIES OF BURGERS EQUATION USING A LATTICE BOLTZMANN METHOD <sup>1)</sup>

Yan Guangwu

*(Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;  
Department of Mathematics, Jilin University, Changchun 130023, China)*

**Abstract** We proposed a lattice Boltzmann model for Burgers equation. Using Chapman-Enskog expansion and multiscale technique, we obtained the high order moments of equilibrium distribution function, and the 3rd dispersion coefficients and 4th order viscosity. The parameters in the model might be determined by analysing these coefficients.

**Key words** lattice Boltzmann method, Burgers equation, multiscale method, conservation law in time scale  $t_0$

---

Received 22 January 1998, revised 25 May 1998.

1) The project supported by the LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences.