

# 薄膜非线性撕裂三种弯曲模型的解答及讨论<sup>1)</sup>

魏悦广

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

**摘要** 针对薄膜非线性撕裂的弯曲模型, 引入了 3 种表征薄膜撕裂过程的双参数准则. 这 3 种表征分别为: (1) 界面断裂韧度和分离应力; (2) 界面断裂韧度和薄膜的裂尖转角; (3) 界面断裂韧度和薄膜在裂尖的临界 Mises 等效应变. 从 3 种双参数准则入手, 分析并给出了针对上述各准则的薄膜非线性撕裂问题的解答. 通过分析和比较, 建立弯曲模型解答与严格平面应变弹塑性分析解答之间的关联.

**关键词** 撕裂试验, 双参数准则, 弯曲模型, 断裂韧度

## 引 言

新型材料大多数都离不开薄膜. 薄膜以其独特的特征和行为广泛地被应用于表面工程和界面工程等相关工程实际应用领域中. 它的基本作用是在新材料中不仅起着保护和连接作用, 而且还起着增强和增韧作用, 同时也起着扩展新材料多种功能的作用, 等等. 为了检验薄膜材料与主体材料(基体)之间的粘结性能(强度), 在 20 世纪 50 年代人们就设计了一种简单的试验方法——撕裂试验<sup>[1]</sup>. 该试验以其操作简单等特点直到目前仍被广泛应用于诸多相关研究领域<sup>[2~6]</sup>. 特别是当薄膜和基体均可被看作弹性材料时, 可通过直接测量撕裂力而获得界面的粘结特性(粘结韧性), 此时的撕裂力(系统的能量释放率)其实等于界面的粘结韧性. 然而, 随着研究和应用的深入, 人们注意到, 当薄膜为韧性材料时, 由撕裂实验测出的撕裂力往往(远)大于薄膜/基体界面的粘结韧性, 这是由于在撕裂过程中, 薄膜发生塑性加卸载变形并进而发生塑性耗散引起的. 塑性耗散使得薄膜脱胶所需要施加的撕裂力更大. 为了预测由于塑性耗散引起能量释放率(撕裂力)的增大, Kim 及其合作者<sup>[7~9]</sup>提出并采用了薄膜的弯曲模型对韧性薄膜撕裂中的塑性耗散进行了预测. 在其后的近十几年里, 有关韧性薄膜的撕裂问题的分析都是采用或参考 Kim 的薄膜弯曲模型进行的<sup>[10~13]</sup>. 而 Wei 和 Hutchinson<sup>[14]</sup>在分析弹塑性薄膜的撕裂问题时, 则采用了一种不同于 Kim 的弯曲模型的方法, 即, 除已脱胶部分之外, 薄膜的脱胶

过程完全由平面应变弹塑性有限元方法模拟, 所得到的结果无论是在定性上还是定量上均与 Kim 的薄膜弯曲模型结果有较大的区别. 这就给研究者带来了一些疑问: 究竟那种模型所给出的结果更可靠的呢? 由于弯曲模型比较简单, 而且易于在相关研究领域推广应用, 但在什么情况下弯曲模型所给出的结果是可靠的呢? 鉴于撕裂试验在薄膜工程上的广泛应用及重要性, 澄清有关薄膜撕裂刻画模型有效性上的疑问也显得十分必要和重要. 为此, 最近有几位学者联名(B. Cotterell(新加坡), G. Williams(英国), J. Hutchinson(美国), M. Thouless(美国))<sup>[15]</sup>提出开展一项关于薄膜撕裂试验刻画模型有效性检验的国际合作研究——Kim 模型与 Wei-Hutchinson 模型之对比研究, 以便澄清在有关预测模型选取上的疑问.

由于韧性薄膜的撕裂过程为弹塑性变形及扩展, 该过程通常需采用双参数准则来表征. 本文基于薄膜的弯曲模型, 同时采用 3 种双参数准则刻画薄膜的撕裂过程, 并针对每一种双参数表征方法进行了求解. Kim 及其合作者<sup>[7~9]</sup>所采用的界面粘结韧性及裂尖张开角的表征仅仅为本文 3 种双参数准则的一种. 通过分析和比较, 初步建立了弯曲模型与 Wei-Hutchinson 模型结果之间的联系, 进而对弯曲模型的可靠性进行了评估.

## 1 薄膜弹塑性撕裂的弯曲模型及扩展准则

撕裂实验中弹塑性薄膜的变形过程可由图 1 刻画. 在撕裂力  $P$  的作用下薄膜发生脱胶并发生塑性

2003-03-12 收到第一稿, 2003-09-22 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(19925211)和中国科学院“百人计划”资助项目.

加卸载过程. 薄膜截面从零受力状态通过加卸载分别经过  $OA$  段 (弹性弯曲阶段),  $AB$  段 (弹塑性弯曲阶段),  $BD$  段 (卸载阶段) 和  $DE$  段 (反向塑性弯曲). 在  $E$  处, 薄膜被拉直, 曲率为零.  $EF$  段为第 2 次

卸载阶段. 整个过程的物理刻画见图 1. 在图 1 中给出了弯曲模型的弯矩 - 曲率关系示意图, 该关系的详细表达式将在下节导出.

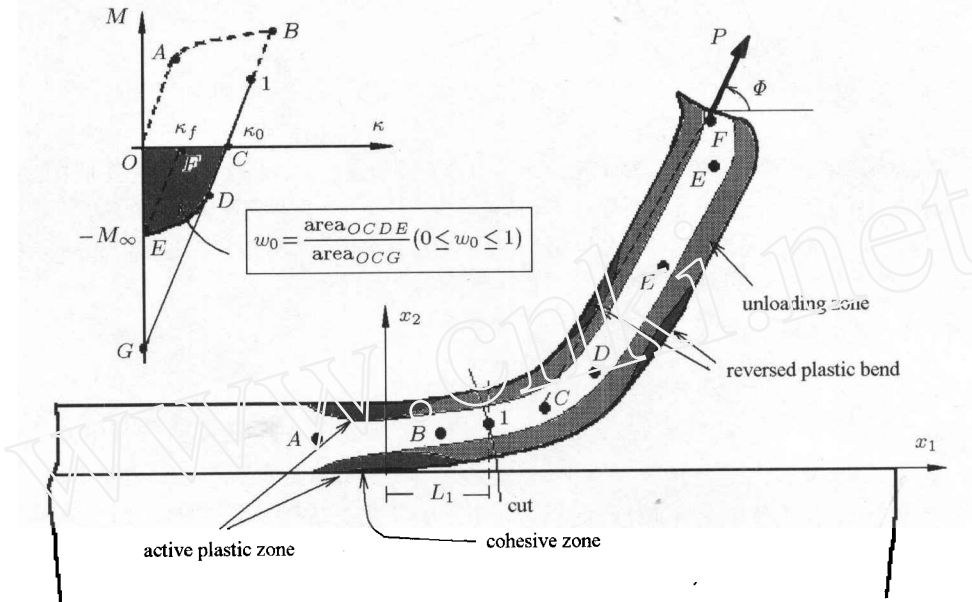


图 1 薄膜非线性撕裂的变形特征

Fig.1 Deformation of thin film in nonlinear peeling process

韧性薄膜沿基体界面被撕裂或脱胶的过程可通过双参数准则来刻画 (弹性脱胶可用单参数准则刻画), 即界面本身的粘结性能和系统中的塑性耗散需要由两个独立的参量进行表征. 本文将分别采用 3 种双参数准则对薄膜的弹塑性撕裂过程进行分析. 3 种双参数准则分别示于图 2(b), 图 2(c) 和图 2(d). 图 2(b) 为通常的粘聚力模型, 该模型的独立参数为  $(\Gamma_0, \hat{\sigma})$ , 其中  $\Gamma_0$  为界面的粘结断裂韧性或称粘结

功,  $\hat{\sigma}$  为界面的分离强度. 图 2(c) 表示将界面的粘结断裂韧性  $\Gamma_0$  和裂尖的临界张开角度  $\theta_{tip}^c$  取为控制参数, 该准则首先由 Kim 及其合作者采用 [7~9]. 图 2(d) 中介绍的双参数准则的控制参数为  $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$ , 其中  $\bar{\epsilon}_c$  为薄膜在裂尖处的 Mises 等效应变的临界值. 该准则由本文首先提出并采用. 由独立变化的双参数再结合弹塑性弯曲的基本关系可求解出薄膜弹塑性撕裂问题的解答.

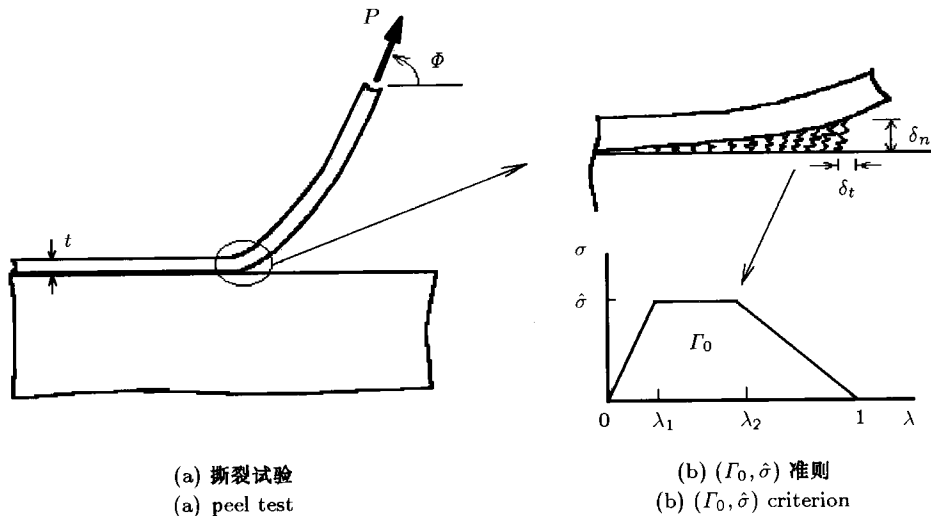


图 2 薄膜非线性撕裂的 3 种双参数表征

Fig.2 Three double-parameter criteria for thin film nonlinear peeling

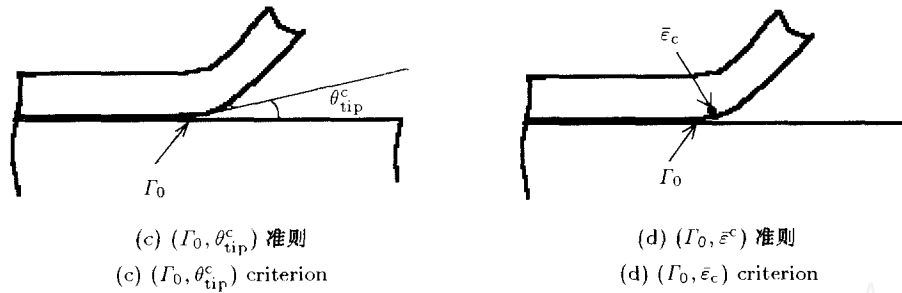


图 2 薄膜非线性撕裂的 3 种双参数表征 (续)

Fig.2 Three double-parameter criteria for thin film nonlinear peeling (continued)

对撕裂试验而言，通常所关心的是在薄膜撕裂过程中单位宽度撕裂力  $P$  (也称系统的能量释放率) 和界面的粘结断裂韧性  $\Gamma_0$  以及薄膜几何和物理参量之间的关系。本文讨论薄膜撕裂过程为定常扩展，则有

弹性撕裂

$$P(1 - \cos \Phi) = \Gamma_0 \quad (1)$$

弹塑性撕裂

$$P(1 - \cos \Phi) = \Gamma_0 + \Gamma^P \quad (2)$$

其中  $\Gamma^P$  为塑性耗散引起的能量释放率的增加，下面从薄膜的应力应变状态分析出发，推导出撕裂过程中薄膜非线性弯曲的基本关系，再进一步导出  $\Gamma^P$  的关系式。

## 2 基本关系的推导

Kim 和 Aravas<sup>[7]</sup> 对不可压缩 ( $\nu = 1/2$ ) 平面应变弹塑性薄膜情况导出了弯曲模型的基本方程，本文下面的推导则严格从可压缩一般平面应变弹塑性情况入手进行。

### 2.1 薄膜的应力应变状态

假定薄膜材料在单轴拉伸时的应力应变关系可由幂硬化关系刻画为

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{当 } \sigma \leq \sigma_Y \\ \sigma_Y(\varepsilon/\varepsilon_Y)^N, & \text{当 } \sigma \geq \sigma_Y \end{cases} \quad (3)$$

一般情况下可将式 (3) 推广到多轴应力的情况，此时的幂硬化关系可表示为

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}E/(1+\nu)\right)\bar{\varepsilon}, & \text{当 } \bar{\sigma} \leq \sigma_Y \\ \sigma_Y(\bar{\varepsilon}/\bar{\varepsilon}_Y)^N, & \text{当 } \bar{\sigma} \geq \sigma_Y \end{cases} \quad (4)$$

这里， $\bar{\sigma}$  和  $\bar{\varepsilon}$  分别为等效应力和等效应变

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right)^{1/2}, \quad \bar{\varepsilon} = \left(\frac{2}{3}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}\right)^{1/2} \quad (5)$$

其中  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$  和  $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$  分别为应力偏量和应变偏量

$$\bar{\varepsilon}_Y = \sigma_Y / \left[\frac{3}{2}E/(1+\nu)\right] = \varepsilon_Y / \left[\frac{3}{2}/(1+\nu)\right] \quad (6)$$

其中  $E$  为材料的杨氏模量， $\nu$  为泊松比， $\sigma_Y$  为屈服应力， $\varepsilon_Y = \sigma_Y/E$  为屈服应变。

通常假设薄膜只能承受正应力，不能承受剪应力。根据此假设，在平面应变情况下薄膜中的应力和应变状态分别为如下形式 (参考图 3 的坐标系)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} \neq 0, \quad \sigma_{33} = 0 \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{33} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

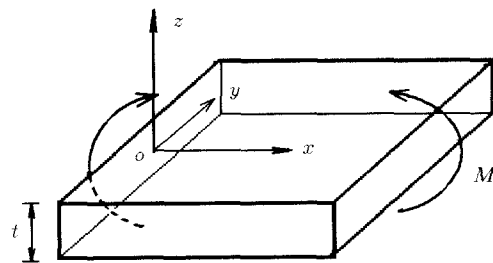


图 3 薄膜的弯曲模型

Fig.3 Bending model for thin film

其中  $\sigma$  和  $\varepsilon$  分别为  $X$  坐标面上的应力和应变。对弹性和弹塑性情况应力和应变分别满足如下物理关系：

弹性情况

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \quad (8)$$

弹塑性情况

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij}^e &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \\ \varepsilon_{ij}^p &= \lambda\sigma'_{ij} = \frac{3\varepsilon^p}{2\bar{\sigma}}\sigma'_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{1+\nu}{E} + \lambda\right)\sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{E} + \frac{\lambda}{3}\right)\sigma_{kk}\delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

对于幂硬化材料关系 (见式 (4)), 式 (9) 中  $\lambda$  的表达式为

$$\lambda = \frac{3\varepsilon^p}{2\bar{\sigma}} = \frac{(1+\nu)}{E} \left[ \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} \right)^{1/N-1} - 1 \right] \quad (10)$$

由平面应变条件  $\varepsilon_{22} = 0$ , 式 (7) 对弹性和弹塑性情况可分别写为

弹性情况

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma, \quad \sigma_{22} = \nu\sigma, \quad \sigma_{33} = 0 \\ \varepsilon_{11} &= (1-\nu^2)\sigma/E = \varepsilon, \quad \varepsilon_{22} = 0 \\ \varepsilon_{33} &= -\nu(1+\nu)\sigma/E = -[\nu/(1-\nu)]\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

弹塑性情况

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma, \quad \sigma_{22} = \alpha\sigma, \quad \sigma_{33} = 0 \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{33} = -[\alpha/(1-\alpha)]\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}[1 - U_0(\bar{\sigma}/\sigma_Y)] \\ U_0(\bar{\sigma}/\sigma_Y) &= \frac{(1-2\nu)}{1 + \frac{2}{3}(1+\nu)[(\bar{\sigma}/\sigma_Y)^{1/N-1} - 1]} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

于是, 可求得弹性和弹塑性情况下等效应力和等效应变由  $X$  坐标面上的应力和应变表示的表达式分别为

弹性

$$\bar{\sigma} = \sqrt{1-\nu+\nu^2}|\sigma|, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}{3(1-\nu)}|\varepsilon| \quad (14)$$

弹塑性

$$\bar{\sigma} = \sqrt{1-\alpha+\alpha^2}|\sigma|, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{3(1-\alpha)}|\varepsilon| \quad (15)$$

## 2.2 基本弯曲方程的推导

薄膜弯曲时沿  $X$  方向的应变为

$$\varepsilon = -\kappa z \quad (16)$$

其中  $\kappa = d\theta/ds$  为中性面  $z = 0$  的曲率,  $\theta$  为中性面对  $X$  坐标的倾斜角. 弯矩可由下式计算

$$M = 2 \int_0^{t/2} |\sigma| z dz \quad (17)$$

### 2.2.1 弹性弯曲

由式 (11), 式 (16) 和式 (17) 可求得此时的弯矩 - 曲率关系为

$$\frac{M}{M_0} = \frac{2\kappa}{3\kappa_e} \quad (18)$$

其中  $M_0 = \frac{3}{2}M_e$  为理想塑性材料的极限弯矩;  $M_e$  和  $\kappa_e$  分别为弹性极限弯矩和弹性极限曲率

$$\left. \begin{aligned} M_e &= \frac{2}{3}M_0 = \frac{\sigma_Y t^2}{6\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \\ \kappa_e &= \frac{2(1-\nu^2)\sigma_Y}{Et\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

### 2.2.2 弹塑性弯曲

由幂硬化关系  $\bar{\sigma} = \sigma_Y(\bar{\varepsilon}/\bar{\varepsilon}_Y)^N$  (见式 (4)) 及等效应力和等效应变关系 (15), 可得

$$|\sigma| = \sigma_Y^e \frac{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \left[ \frac{(1-\nu)}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}|\varepsilon|}{(1-\alpha)\varepsilon_Y^e} \right]^N \quad (20)$$

其中

$$\sigma_Y^e = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}, \quad \varepsilon_Y^e = \frac{(1-\nu^2)\sigma_Y}{E\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \quad (21)$$

分别为弹性极限弯曲时的  $X$  坐标面上的最大应力和应变.

由式 (11), 式 (16), 式 (17) 和式 (20) 可得

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^{t/2} |\sigma| z dz = \\ &= 2 \int_0^\xi |\sigma| z dz + 2 \int_\xi^{t/2} |\sigma| z dz = \\ &= \frac{2E\kappa\xi^3}{3(1-\nu^2)} + 2\sigma_Y^e \sqrt{1-\nu+\nu^2} \cdot \\ &\quad \left[ \frac{(1-\nu)}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{\kappa}{\kappa_e t/2} \right]^N \cdot \\ &\quad \int_\xi^{t/2} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \left[ \frac{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{(1-\alpha)} \right]^N z^{N+1} dz \end{aligned} \quad (22a)$$

其中  $z = \xi$  为矩形截面上弹塑性交界线到中性层的距离. 原则上可由式 (4) 的第 2 式、式 (13)、式 (15)

和式 (16) 联立求出  $\alpha$  作为  $z$  的函数并代入上式积分获得弯矩 - 曲率关系, 但无法求出该关系的解析表达式, 只能求出数值解. 在这里通过分析我们将获得有效的近似解析解. 首先讨论式 (13) 中  $U_0(\bar{\sigma}/\sigma_Y)$  函数的有效取值情况, 见表 1. 可见,  $U_0$  函数在等效应力  $\bar{\sigma}/\sigma_Y$  的有效取值范围内的数值远远小于 1, 这样, 可将上式中积分号下的  $\alpha$  函数关系按  $U_0$  展开, 则有

$$M = \frac{2E\kappa\xi^3}{3(1-\nu^2)} + 2\sigma_Y^e \sqrt{1-\nu+\nu^2} \cdot \left[ \frac{(1-\nu)}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{\kappa}{\kappa_e t/2} \right]^N \cdot \frac{2}{\sqrt{3}^{1-N}} \int_{\xi}^{t/2} \left\{ 1 - N \bar{U}_0 + \left( \frac{1}{2}N^2 + \frac{2}{3}N - \frac{1}{6} \right) U_0^2 + \dots \right\} z^{N+1} dz \quad (22b)$$

表 1 函数  $U_0(\bar{\sigma}/\sigma_Y)$  随材料参数  $\nu$  和  $N$  的变化情况

Table 1 The variation of function  $U_0(\bar{\sigma}/\sigma_Y)$  with material parameters  $\nu$  and  $N$

$\bar{\sigma}/\sigma_Y =$	1.2	1.5	2.0	2.5
$N = 0.1$				
$\nu = 0.5$	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
$\nu = 0.4$	0.041	0.0056	0.0004	0.0001
$\nu = 0.3$	0.087	0.0120	0.0009	0.0001
$\nu = 0.2$	0.138	0.0190	0.0015	0.0002
$N = 0.2$				
$\nu = 0.5$	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
$\nu = 0.4$	0.099	0.0420	0.0133	0.0055
$\nu = 0.3$	0.207	0.0880	0.0280	0.0120
$\nu = 0.2$	0.322	0.1411	0.0461	0.0191

由式 (22b) 可看出,  $U_0$  的展开式的系数也是小量, 于是在弯矩计算中, 可忽略  $U_0$  各次幂项的影响, 从而得到

$$M = \frac{2E\kappa\xi^3}{3(1-\nu^2)} + 2\sigma_Y^e \sqrt{1-\nu+\nu^2} \cdot \left[ \frac{(1-\nu)}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{\kappa}{\kappa_e t/2} \right]^N \cdot \frac{2}{\sqrt{3}^{1-N} (N+2)} \left\{ \left( \frac{t}{2} \right)^{N+2} - \xi^{N+2} \right\} \quad (23)$$

由 (13) 式可知  $U_0$  随  $\bar{\sigma}/\sigma_Y$  的增加而单调减小, 其最大值为  $1-2\nu$ , 最小值为 0. 在弯矩的积分中 (见 (22a) 式右边第 2 项), 若直接取  $U_0$  等于其最大值  $1-2\nu$ , 可获得从式 (22a) 到式 (23) (忽略  $U_0$ ) 的简化引起式 (22a) 右边积分项的相对计算误差上限

为

$$|\delta^U| = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}(1-2\nu)^2} [1 + (1-2\nu)]^N}^{(1-N)}$$

当  $N = 0.2$ ,  $\nu$  分别取 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 时获得的  $|\delta^U|$  值分别为: 0.000, 0.041, 0.084, 0.130, 0.177.

采用  $M_0$  和  $\kappa_e$  (见式 (19)) 分别对弯矩和曲率进行无量纲化并考虑到下列关系

$$\kappa\xi = \kappa_e t/2 = \varepsilon_Y^e \quad (24)$$

式 (23) 成为

$$\frac{M}{M_0} = \left\{ \frac{2}{3} - \frac{2}{N+2} \gamma \right\} \frac{1}{(\kappa/\kappa_e)^2} + \frac{2}{N+2} \gamma \left( \frac{\kappa}{\kappa_e} \right)^N \quad (25)$$

其中

$$\gamma = 2 \sqrt{\frac{1}{3}(1-\nu+\nu^2)}^{(1-N)} (1-\nu)^N \quad (26)$$

对于不可压缩材料  $\nu = 0.5$ , 即  $\gamma = 1$ , 式 (25) 将退化为 Kim 和 Aravas [7] 得到的结果.

### 2.2.3 卸载情况

仿照弹性弯曲的推导, 容易获得卸载情况的弯矩 - 曲率关系为

$$\frac{M}{M_0} = \frac{2}{3} \frac{\kappa - \kappa_0}{\kappa_e} \quad (27)$$

其中  $\kappa_0$  为首次卸载后的残余曲率, 见图 1. 需要指出的是, 加载和卸载的转折点 (图 1 中的 B 点) 一般并非位于裂尖处, 而是位于裂尖前方一点 (对弯曲模型而言), 但由于该点到裂尖的距离非常近 (量级为  $O(\delta_c)$ ), 为简化分析, 可取 B 点位置在裂尖处.

Kim 和 Aravas [7] 还进一步讨论了反向弯曲和第 2 次卸载的弯矩 - 曲率关系, 所涉及的关系极其复杂, 以致于他们仅对理想塑性情况进行了讨论. 在这里我们沿用 Wei 和 Hutchinson [14] 的处理方法, 采用一面积参数  $w_0$  来刻画反向弯曲的影响, 其中  $w_0$  的定义见图 1 所示. 这样可使得问题的求解大为简化.

### 2.2.4 薄膜撕开部分卸载区的挠曲率

由平衡方程 (参考图 1)  $\kappa dM = -P \sin(\Phi - \theta) d\theta$  及上面导出的弯矩 - 曲率关系通过积分可获得薄膜的挠曲率方程及变形曲线. 在这里我们只给出与后

面求解能量耗散相关的薄膜撕开部分卸载区的挠曲率关系. 把式 (27) 代入平衡方程并利用图 1 中  $w_0$  的定义, 再经过推导、化简后可得

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \sqrt{[1 - \cos(\Phi - \theta)] \frac{2P}{B} + (1 - w_0)\kappa_0^2} \\ \theta_B &\approx \theta_{\text{tip}} \leq \theta \leq \theta_C \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

### 2.3 弯曲模型基本方程总结

在卸载点 ( $B$  点),  $M = M_B, \kappa = \kappa_B$ , 由式 (25) 和式 (27)

$$\left. \begin{aligned} M_B/M_0 &= \frac{2}{3}(\kappa_B - \kappa_0)/\kappa_e \\ \kappa_0 &= \kappa_B + \left( \frac{3}{N+2}\gamma - 1 \right) \frac{\kappa_e^2}{\kappa_B^2} \\ &\quad - \frac{3}{N+2}\gamma \frac{\kappa_B^N}{\kappa_e^{N-1}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

由式 (28) 可得卸载点 ( $B$  点) 的曲率

$$\kappa_B = \sqrt{[1 - \cos(\Phi - \theta_{\text{tip}})] \frac{2P}{B} + (1 - w_0)\kappa_0^2} \quad (30)$$

其中  $B$  为弯曲模量

$$B = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (31)$$

在式 (30) 中 (或见图 1),  $w_0$  ( $0 \leq w_0 \leq 1$ ) 刻画材料的反向塑性变形行为 (或 Bauschinger 效应);  $\theta_{\text{tip}}$  为薄膜脱胶时的裂尖转角.

基本弯曲方程:

弹性情况

$$\frac{M}{M_0} = \frac{2\kappa}{3\kappa_e} \quad (32)$$

弹塑性情况

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_0} &= \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{N+2}\gamma \right) \frac{1}{(\kappa/\kappa_e)^2} + \\ &\quad \frac{2}{N+2}\gamma \left( \frac{\kappa}{\kappa_e} \right)^N \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

卸载情况

$$\frac{M}{M_0} = \frac{2}{3} \frac{\kappa - \kappa_0}{\kappa_e} \quad (34)$$

由式 (32) 到式 (34) 并参考图 1 中的 ( $M - \kappa$ ) 插图且通过计算  $M - \kappa$  曲线下回路  $OABCDEO$  的面积, 可求得塑性耗散的关系式 (假定基体为刚性的,

或者当基体材料的杨氏模量远大于薄膜的杨氏模量)

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^P &= \frac{1}{2}M_e\kappa_e - \frac{1}{2}M_B(\kappa_B - \kappa_0) + \\ &\quad \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{N+2}\gamma \right) M_0 \left( \kappa_e - \frac{\kappa_e^2}{\kappa_B} \right) + \\ &\quad \frac{2\gamma}{(N+1)(N+2)} M_0 \left( \frac{\kappa_B^{N+1}}{\kappa_e^N} - \kappa_e \right) + \\ &\quad \frac{1}{2}B\kappa_0^2w_0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

## 3 薄膜非线性撕裂问题的弯曲模型解答

### 3.1 基于不同双参数准则的解答形式及求解过程

#### 3.1.1 ( $\Gamma_0, \hat{\sigma}$ ) 双参数准则

考虑将薄膜撕裂的界面断裂过程区由粘聚力模型刻画, 则控制参数通常被选为  $(\Gamma_0, \hat{\sigma})$  [16~19]. 粘聚力模型的形状参数 (见图 2(b))  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的选取对预测结果不敏感 [16,19], 故在本文计算时简单取为  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1)$ , 而裂尖的临界张开位移  $\delta_c = \sqrt{\delta_n^2 + \delta_t^2}$  不可独立取值, 它与两个控制参数之间满足关系

$$\Gamma_0 = \hat{\sigma}\delta_c \quad (36)$$

这样, 弯矩在粘聚力区的分布可表示为

$$M = M_B + P \sin \Phi (L - s) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}(L - s)^2 \quad (37)$$

其中  $L$  为粘聚力区的长度,  $s$  为在该区内的坐标, 从左向右. 在裂尖,  $s = L$ .  $L$  值可在求解过程中确定. 在粘聚力区, 可近似取

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d^2w_z}{ds^2} \quad (38)$$

其中  $w_z$  为弯曲的挠度. 粘聚力区的变形条件可给出为

$$\left. \begin{aligned} w_z &= 0, \theta = 0, \kappa = 0; \text{ 当 } s = 0 \\ w_z &= \delta_c, \theta = \theta_{\text{tip}}; \text{ 当 } s = L \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

解答形式可由独立变化参量给出为

$$\left. \begin{aligned} \frac{P(1 - \cos \Phi)}{\Gamma_0} &= f_1(E/\sigma_Y, \hat{\sigma}/\sigma_Y, N, \nu, t/R_0, w_0, \Phi) \\ \theta_{\text{tip}} &= r_1(E/\sigma_Y, \hat{\sigma}/\sigma_Y, N, \nu, t/R_0, w_0, \Phi) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

其中长度参量  $R_0$  的定义为

$$R_0 = \frac{1}{3\pi(1 - \nu^2)} \frac{E\Gamma_0}{\sigma_Y^2} \quad (41)$$

它表示小范围屈服时裂尖塑性区的尺寸.  $\theta_{tip}$  为裂尖倾斜角. 也可在解答 (40) 中采用  $\delta_c$  作为长度的无量纲尺度,  $\delta_c$  和  $R_0$  之间由式 (36) 和式 (41) 存在下列关系

$$R_0 = \frac{(\hat{\sigma}/\sigma_Y)(E/\sigma_Y)\delta_c}{3\pi(1-\nu^2)} \quad (42)$$

应用式 (29)~(39), 通过迭代可求得解答 (40).

### 3.1.2 $(\Gamma_0, \theta_{tip}^c)$ 双参数准则

此时, 由式 (2), 式 (29), 式 (30) 和式 (35), 通过无量纲分析及求解便可直接获得问题的解答, 解答形式可表示为

$$\frac{P(1-\cos\Phi)}{\Gamma_0} = f_2(N, \nu, t/R_0, w_0, \Phi, \theta_{tip}^c) \quad (43)$$

可见, 此解答在形式上与材料的屈服强度和杨氏模量无关.

### 3.1.3 $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$ 双参数准则

此情况可直接由式 (2), (4), (13), (15), (16), (29), (30) 和式 (35), 通过无量纲分析及求解便可获得问题的解答, 解答形式可表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{P(1-\cos\Phi)}{\Gamma_0} &= f_3(N, \nu, t/R_0, w_0, \Phi, \bar{\epsilon}_c/\epsilon_Y) \\ \theta_{tip} &= r_3(N, \nu, t/R_0, w_0, \Phi, \bar{\epsilon}_c/\epsilon_Y) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

其中  $\epsilon_Y = \sigma_Y/E$  为屈服应变.

## 3.2 解答及讨论

图 4 至图 6 为基于  $(\Gamma_0, \hat{\sigma})$  双参数准则的解答, 其中图 4 和图 5 给出了薄膜弹塑性定常撕裂过程中无量纲化能量释放率 (或撕裂力) 随薄膜厚度的变化曲线. 如果薄膜是弹性变形,  $P(1-\cos\Phi)/\Gamma_0 = 1$ , 见式 (1), 可见由塑性耗散引起能量释放率显著增大. 由图 4 和图 5 可看出, 无量纲撕裂力 (能量释放率)  $P(1-\cos\Phi)/\Gamma_0$  随薄膜厚度的变化规律为: 当薄膜厚度很小时该值趋向于 1, 即塑性耗散可忽略不计, 随着厚度增加, 能量释放率急剧增大并在  $t/R_0$  大约等于 2 处获得一极大值, 随着薄膜厚度的进一步增加, 塑性耗散则逐步减小. 由图 6 可看出裂尖的倾斜角的变化情况, 即当薄膜厚度很小时, 撕裂过程中的裂尖倾斜角的值较大, 随着薄膜厚度的增加, 该角度急剧减小.

图 7 至图 9 为基于  $(\Gamma_0, \theta_{tip}^c)$  双参数准则的计算结果. 由该结果可看出,  $P(1-\cos\Phi)/\Gamma_0$  随  $t/R_0$  的变化规律与图 4 至图 6 基于  $(\Gamma_0, \hat{\sigma})$  双参数准则的结果有明显的不同, 即随着薄膜厚度的减小,  $P(1-\cos\Phi)/\Gamma_0$  始终在增大, 该变化趋势与 Kim 及其合作者所给出的结果 [7~9] 相一致. 由图 7 至图 9 可知, 随着裂尖临界倾斜角的增大, 曲线位置降低, 即塑性耗散减小.

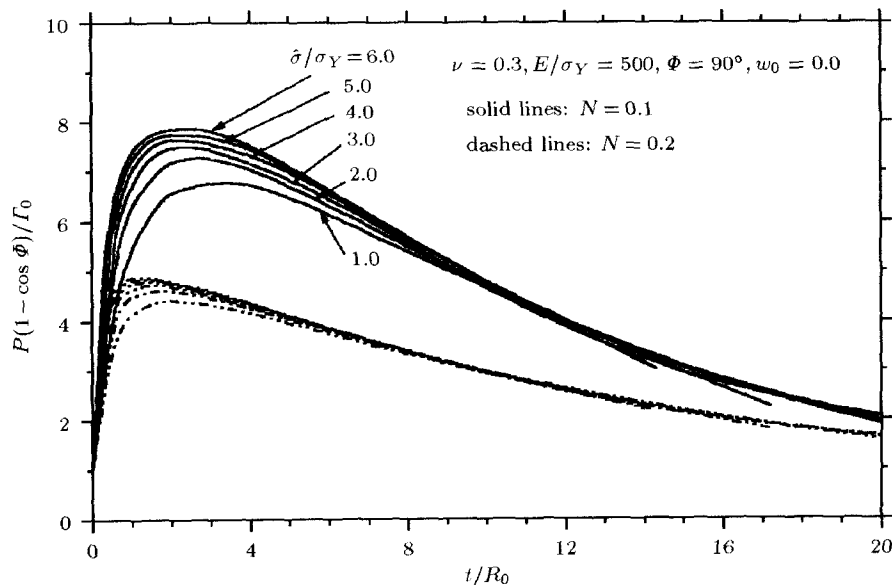


图 4 由  $(\Gamma_0, \hat{\sigma})$  双参数准则计算的无量纲能量释放率随薄膜厚度的变化曲线

Fig.4 Variation of normalized energy release rate with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \hat{\sigma})$  criterion

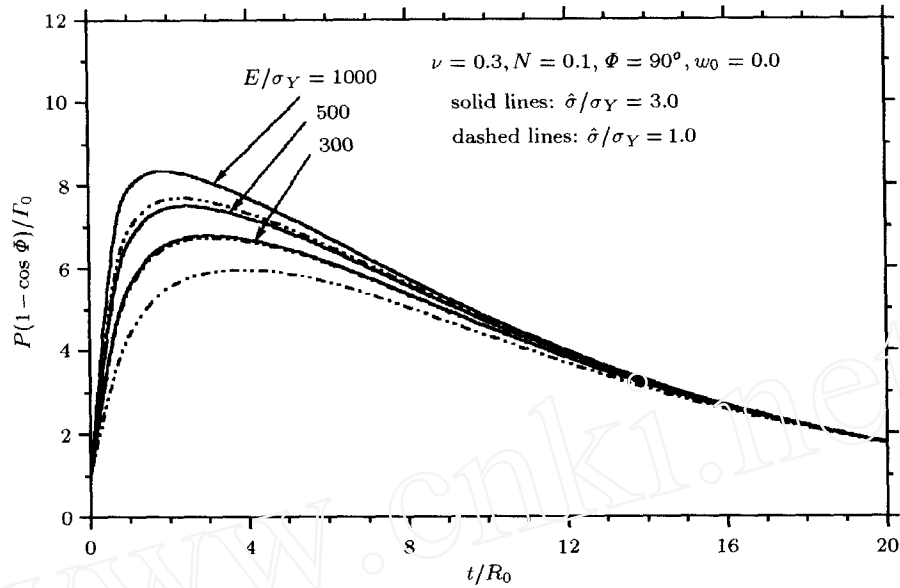


图 5 由  $(\Gamma_0, \delta)$  双参数准则计算的无量纲能量释放率随薄膜厚度的变化曲线

Fig.5 Variation of normalized energy release rate with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \delta)$  criterion

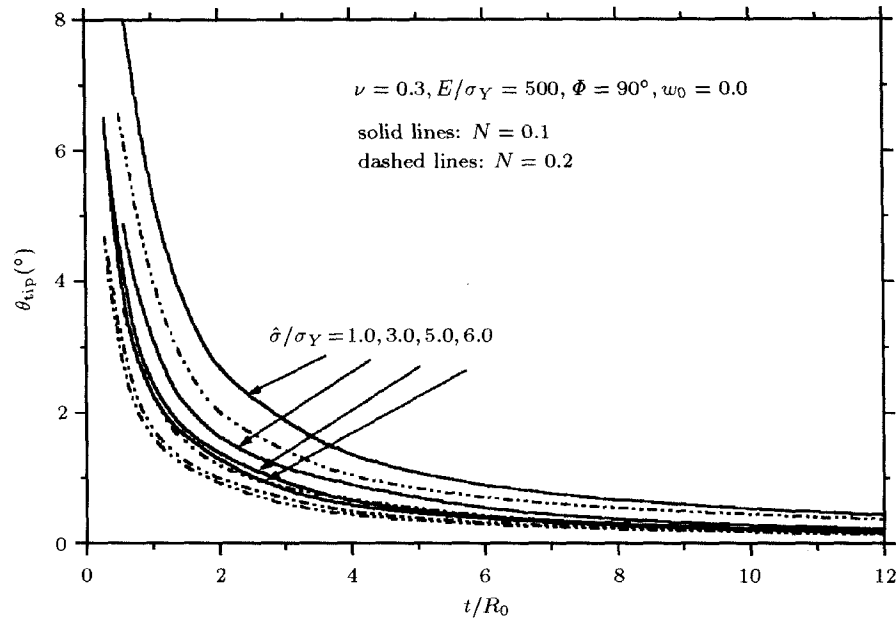


图 6 由  $(\Gamma_0, \delta)$  双参数准则计算的薄膜裂尖转角随薄膜厚度的变化曲线

Fig.6 Variation of thin film slope angle at tip with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \delta)$  criterion

图 10 至图 12 为基于  $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$  双参数准则的计算结果. 显然图 10 中所给出的  $P(1 - \cos \Phi)/\Gamma_0$  随  $t/R_0$  变化的计算结果与上面介绍的基于其它两种双参数准则的计算结果极不相同. 在图 10 中,

$P(1 - \cos \Phi)/\Gamma_0$  随  $t/R_0$  线性增大, 该线性关系的斜率随着裂尖临界 Mises 等效应变的增大而增加. 图 11 给出了裂尖倾斜角的变化情况, 即当薄膜厚度较小时, 角度较大, 随着厚度的增加该角度急剧减小



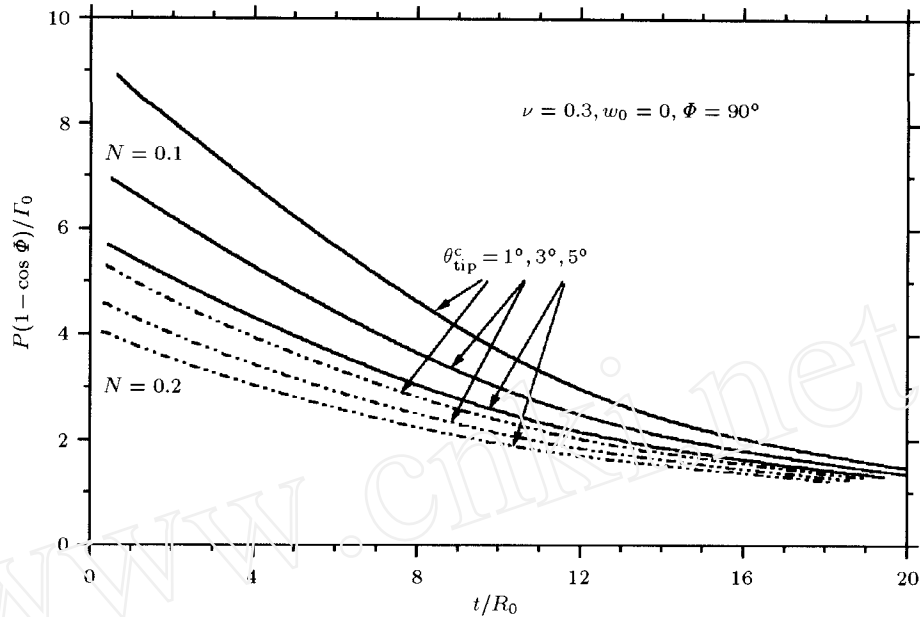


图 7 由  $(\Gamma_0, \theta_{tip}^c)$  双参数准则计算的无量纲能量释放率随薄膜厚度的变化曲线

Fig.7 Variation of normalized energy release rate with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \theta_{tip}^c)$  criterion

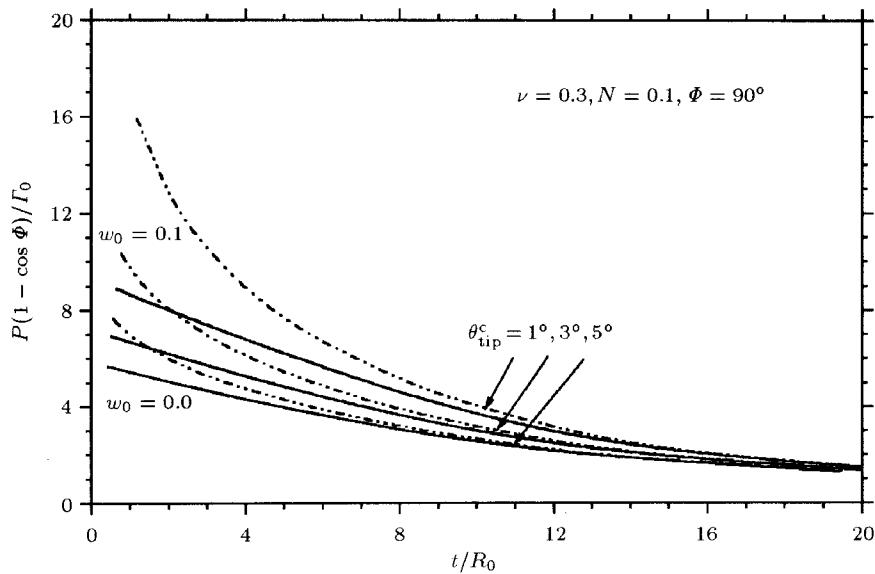


图 8 由  $(\Gamma_0, \theta_{tip}^c)$  双参数准则计算的无量纲能量释放率随薄膜厚度的变化曲线

Fig.8 Variation of normalized energy release rate with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \theta_{tip}^c)$  criterion

并由正值过渡为负值。倾斜角度变为负值显然不符合物理实际，说明所采用的准则此时已失效，对应结果应被去除，见图 10 中的虚线以上部分。准则失效的原因可结合图 12 作如下解释：当薄膜厚度较小时，薄膜是通过发生较大的弯曲变形来实现较大的

裂尖临界 Mises 等效应变值的；而当薄膜厚度较大时，在薄膜中难以实现较大的弯曲曲率以满足较高的临界 Mises 等效应变值。在这种情况下， $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$  双参数准则失效。

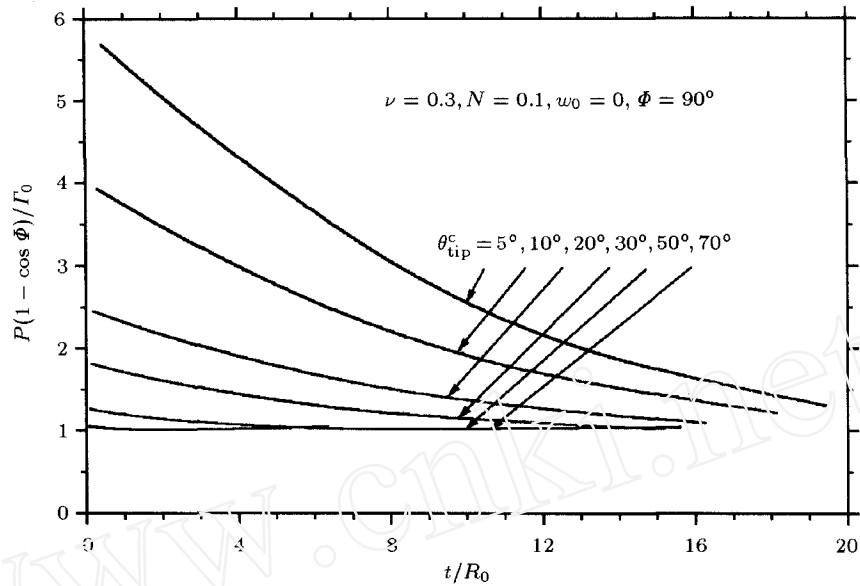


图 9 由  $(\Gamma_0, \theta_{tip}^c)$  双参数准则计算的无量纲能量释放率随薄膜厚度的变化曲线

Fig.9 Variation of normalized energy release rate with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \theta_{tip}^c)$  criterion

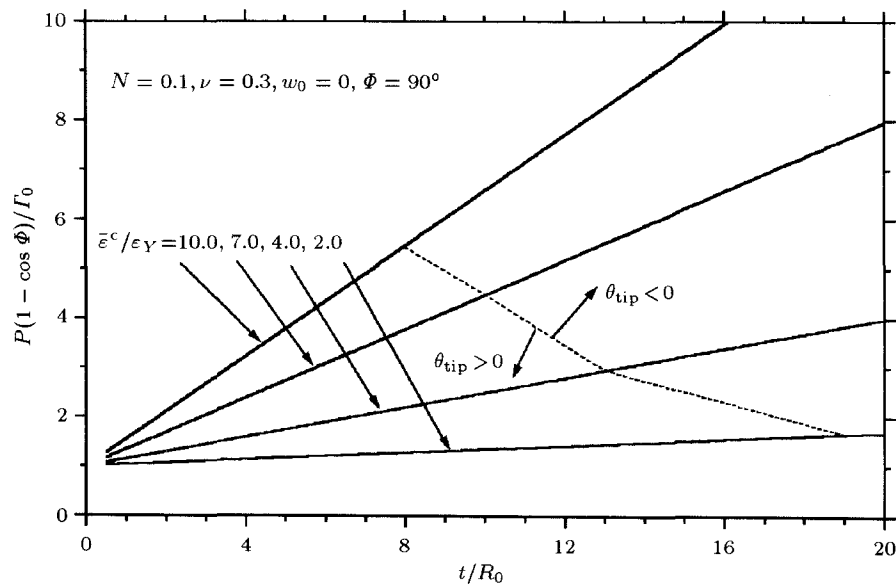


图 10 由  $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$  双参数准则计算的无量纲能量释放率随薄膜厚度的变化曲线

Fig.10 Variation of normalized energy release rate with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$  criterion

#### 4 对薄膜非线性撕裂问题弯曲模型解答的讨论

在上节我们求解并给出了基于 3 种双参数准则的薄膜非线性撕裂问题的弯曲模型的解答, 从所给出的解答可看出, 取不同的控制双参数得到不同的

结果, 可见, 弯曲模型的结果对控制参数的选取很敏感. 这就使得人们产生一个疑问: 采用弯曲模型预测薄膜的非线性撕裂, 究竟取何种控制参量才合理、并与实际情况符合呢? 从基于前两个双参数准则(粘聚力模型和界面断裂韧性与裂尖转角)的计算

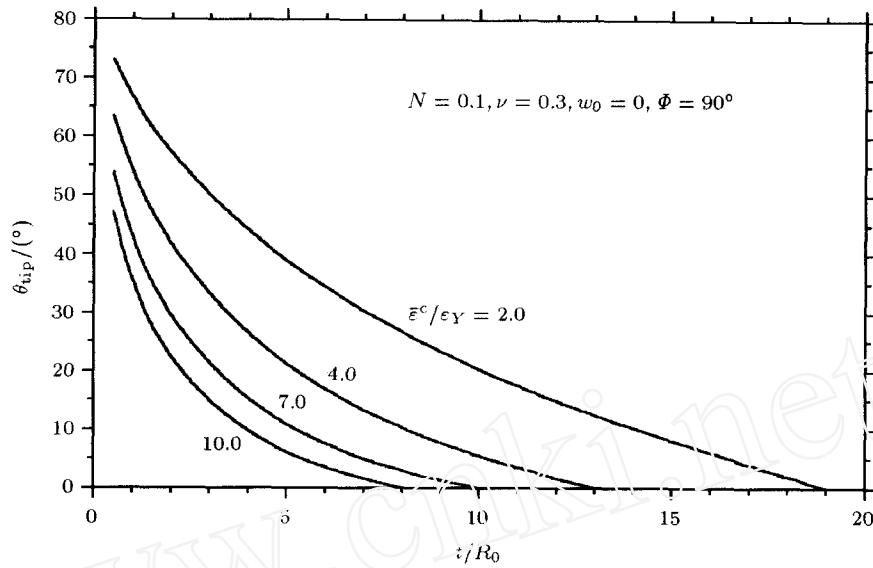


图 11 由  $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$  双参数准则计算的薄膜裂尖转角随薄膜厚度的变化曲线

Fig.11 Variation of thin film slope angle at tip with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$  criterion

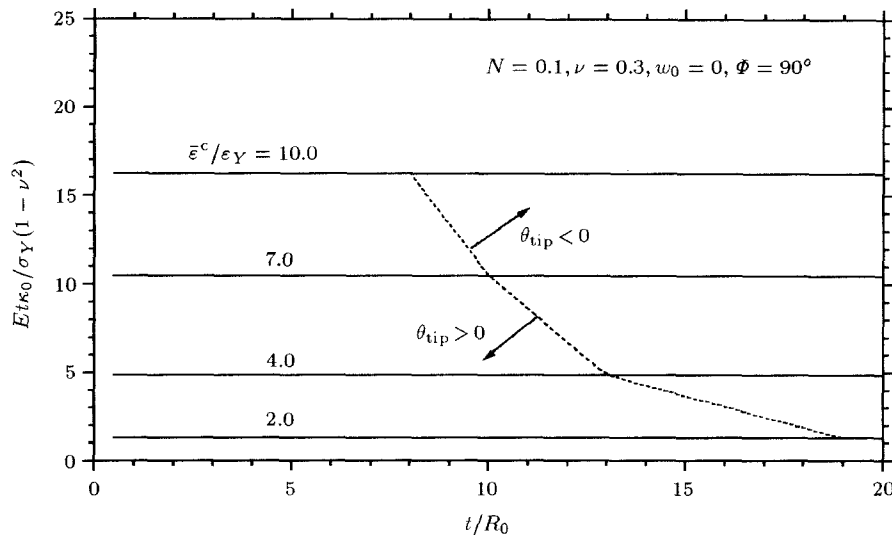


图 12 由  $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$  双参数准则计算的无量纲残余曲率随薄膜厚度的变化曲线

Fig.12 Variation of normalized residual curvature with thin film thickness predicted from  $(\Gamma_0, \bar{\epsilon}_c)$  criterion

结果可看出，在薄膜厚度大约  $t/R_0 < 5$  的情况下，弯曲塑性耗散对能量释放率有较大的贡献，这点也可从文献 [20] 的残余曲率的变化结果中看出。然而从基于界面断裂韧性与临界 Mises 等效应变的双参数准则 (上节第 3 种) 的计算结果可知，在薄膜厚度大约  $t/R_0 < 5$  的情况下，弯曲塑性耗散对能量释放率的贡献则明显小于前两种准则的结果。究竟是前两种双参数准则夸大了弯曲塑性耗散对能量释放率的贡献呢？还是第 3 种双参数准则低估了该贡献呢？我们将本文基于弯曲模型的解答与二维平面应变弹塑性有限元计算结果进行对比。图 13 给出了薄

膜定常撕裂过程的二维平面应变弹塑性有限元计算结果，来源于文献 [14]。通过对比可知，采用弯曲模型基于界面断裂韧性与临界 Mises 等效应变的双参数准则的计算结果与二维平面应变弹塑性有限元计算结果 (图中  $E_s$  为弹性基体的杨氏模量) 在大约  $t/R_0 < 5$  的范围内具有相似的变化趋势和同等量级大小。可见，在此薄膜厚度范围内，弯曲模型的上述第 3 种双参数准则的计算结果比较合理。然而，随着薄膜厚度继续增大，平面应变弹塑性有限元解趋向于小范围屈服解 (不随薄膜厚度变化)，而弯曲模型基于界面断裂韧度与临界 Mises 等效应变的双参

数准则解则失效, 见上节的讨论. 因此, 当薄膜厚度较大时, 即当  $t/R_0 > 5$ , 如何建立基于弯曲模型的控制参数准则将是需要进一步探讨的问题.

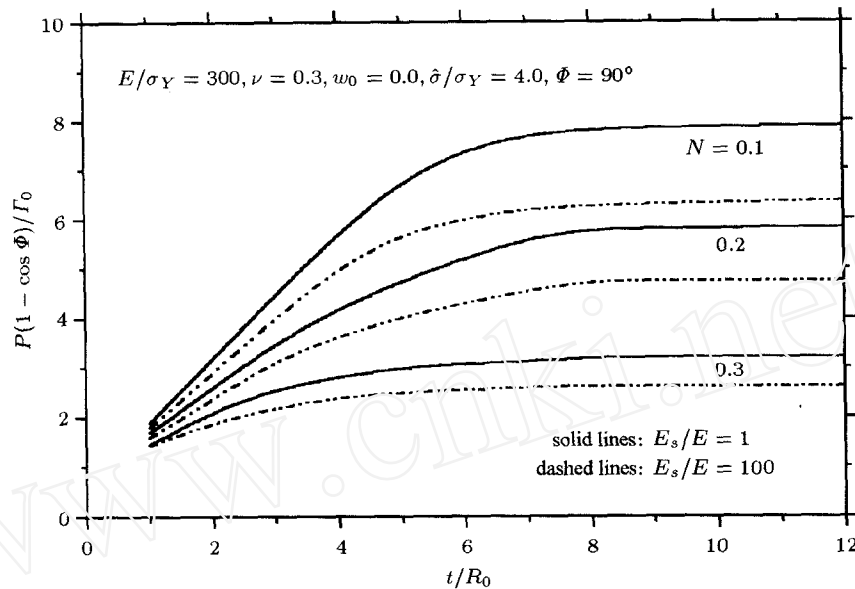


图 13 由平面应变弹性分析计算的无量纲能量释放率随薄膜厚度的变化曲线, 结果来源于 Wei & Hutchinson<sup>[14]</sup>  
Fig.13 Variation of normalized energy release rate with thin film thickness predicted from plane strain elastic-plastic analysis from Wei & Hutchinson<sup>[14]</sup>

### 参 考 文 献

- 1 Spies GJ. The peeling test on redux-bonded joints. *J Aircraft Eng*, 1953, 25: 64~70
- 2 Feliu-Baez R, Lockhart HE, Burgess G. Correlation of peel and burst tests for pouches. *Packaging Tech Sci*, 2001, 14: 63~69
- 3 Choi JW, Oh TS. Peel strength and peel angle measured by the T-peel test on Cr/BPDA-PDA interface. *J Adhe Sci Tech*, 2001, 15: 139~152
- 4 Asai H, Iwase N, Suga T. Influence of ceramic surface treatment on peel-off strength between aluminum nitride and epoxy-modified polyaminobismaleimide adhesive. *IEEE Trans on Adv Packaging*, 2001, 24: 104~112
- 5 Bundy K, Schlegel U, Rahn B, et al. Improved peel test method for measurement of adhesion to biomaterials. *J Mater Sci: Mater in Medicine*, 2000, 11: 517~521
- 6 Kawabe M, Tasaka S, Inagaki N. Effects of surface modification by oxygen plasma on peel adhesion of pressure-sensitive adhesive tapes. *J Appl Polym Sci*, 2000, 78: 1392~1401
- 7 Kim KS, Aravas N. Elasto-plastic analysis of the peel test. *Int J Solids Struct*, 1988, 24: 417~435
- 8 Kim KS, Kim J. Elasto-plastic analysis of the peel test for thin film adhesion. *J Engin Mat Tech*, 1988, 110: 266~273
- 9 Kim J, Kim KS, Kim YH. Mechanical effects of peel adhesion test. *J Adhe Sci Tech*, 1989, 3: 175~187
- 10 Kinloch AJ, Lau CC, Williams JG. The peeling of flexible laminates. *Int J Fracture*, 1994, 66: 45~70
- 11 Moidu AK, Sinclair AN, Spelt JK. On determination of fracture energy using the peel test. *J Testing Evalu*, 1998, 26: 247~254
- 12 Park IS, Yu J. An X-ray study on the mechanical effects of the peel test in a Cu/Cr/polyimide system. *Acta Mater*, 1998, 46: 2947~2953
- 13 Yang QD, Thouless MD, Word SM. Numerical simulations of adhesively-bonded beams failing with extensive plastic deformation. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47: 1337~1353
- 14 Wei Y, Hutchinson JW. Interface strength, work of adhesion and plasticity in the peel test. *Int J Fracture*, 1998, 93: 315~333
- 15 Cotterell B, Williams G, Hutchinson J, et al. Announcement of a round robin on the analysis of the peel test. *Int J Fracture*, 2002, 114: L9~L13
- 16 Tvergaard V, Hutchinson JW. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41, 1119~1135
- 17 Wei Y, Hutchinson JW. Nonlinear delamination mechanics for thin films. *J Mech Phys Solids*, 1997, 45: 1137~1159
- 18 Wei Y. Thin layer splitting along the elastic-plastic solid surface. *Int J Fracture*, 2002, 113: 233~252
- 19 Wei Y, Zhao M, Tang S. Characterization of the fracture work for ductile film undergoing the micro-scratch. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 18: 494~505
- 20 Wei Y, Hutchinson JW. Peel test and interfacial toughness. In: Gerberich WW, Yang W, eds. *Encyclopedia of Comprehensive Structural Integrity*, Vol 8, Chapter 3, Oxford: Elsevier Science Publisher, 2003

## SOLUTIONS AND DISCUSSIONS OF THIN FILM UNDERGOING THE NONLINEAR PEELING BASED ON THREE BENDING MODELS<sup>1)</sup>

Wei Yueguang

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract** Based on the bending model for thin film nonlinear peeling, three double-parameter criteria characterizing peeling process are introduced. Three double-parameter characterizations include: (1) the interfacial fracture toughness and the separation strength, (2) the interfacial fracture toughness and the slope angle at crack tip of thin film, and (3) the interfacial fracture toughness and the critical Mises effective strain of thin film at crack tip. Based on the three double-parameter criteria, the thin film nonlinear peeling problems are solved for each case. Through analyses and comparisons for different solutions, the solutions based on the bending model and based on the plane strain elastic-plastic analysis are connected.

**Key words** peel test, double-parameter criterion, bending model, fracture toughness

---

Received 12 March 2003, revised 22 September 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19925211) and "Bai Ren Project" of the Chinese Academy of Science.