

8 阶群速度控制格式及其应用¹⁾

李新亮 傅德薰 马延文

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 构造了 8 阶精度的群速度控制型差分格式. 根据激波捕捉能力及对小尺度分辨能力对格式系数进行了优化. 采用该格式对可压缩均匀各向同性湍流进行了直接数值模拟, 所计算的最大湍流马赫数达到 0.95. 相同计算条件下的结果与他人结果吻合较好, 说明了格式在捕捉激波的同时对湍流小尺度有较好的分辨能力.

关键词 群速度控制格式, 可压湍流, 直接数值模拟

引 言

对于可压湍流, 当湍流马赫数较高时, 流场中将出现随机的微激波 (shocklets). 该微激波的出现对可压湍流的直接数值模拟带来了挑战^[1]. 由于湍流场中微激波的尺度与湍流的 Komogorov 尺度在同一量级, 这就使得通常的激波捕捉格式显得过于耗散. 如果采用无耗散格式 (如高精度的中心型差分格式) 进行可压湍流的直接数值模拟, 当微激波较强时非物理振荡将导致数值计算无法进行下去. Samtaney 等^[2] 采用 10 阶精度的对称 Padé 格式对可压缩均匀各向同性湍流进行了直接数值模拟, 由于受起动问题 (start-up problem) 的限制, 计算只能限制在 $Mt \leq 0.5$ 之内. 作者采用了 7 阶精度的迎风偏斜差分格式离散对流项, 将数值计算的最大初始湍流马赫数提高到 0.7^[3]. 但当初始马赫数继续提高时, 该格式仍受到起动问题的限制. 而常规的激波捕捉格式 (包括像 ENO, WENO 这样的高精度格式) 对于湍流中的微激波又显得过于耗散^[4]. 构造一种既能捕捉激波, 又能分辨湍流微尺度的差分格式对于可压湍流的直接数值模拟是非常有意义的.

在差分格式的构造上, 傅德薰和马延文^[4,5] 提出了群速度控制思想, 其基本思想是保证间断两侧的数值振荡向间断方向传播 (而不是背离间断). 假设间断向右传播, 则在间断左侧应采用快格式 (数值振荡传播的速度快于间断传播的速度), 在间断右侧应选择慢格式 (数值振荡的传播速度慢于间断). 本文采用了群速度控制的思想构造了 8 阶精度的差分格

式, 并利用激波捕捉能力最强及数值耗散最小的标准对格式系数进行了优化. 本文将该格式用于可压缩衰减湍流的直接数值模拟, 将最高初始湍流马赫数提高到了 0.95, 且格式并未显得过于耗散.

1 差分格式的构造

对于模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{假设 } a > 0)$$

构造迎风偏斜差分格式

$$u'_j = (a_1 u_{j+4} + a_2 u_{j+3} + a_3 u_{j+2} + a_4 u_{j+1} + a_5 u_j + a_6 u_{j-1} + a_7 u_{j-2} + a_8 u_{j-3} + a_9 u_{j-4} + a_{10} u_{j-5}) / \Delta \quad (1)$$

其中 Δ 为网格间距, 在 j 点进行 Taylor 展开得到关于 a_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) 的约束方程

$$\sum_{j=1}^{10} (5-j)^k a_j = S_k \quad (k = 0, 1, \dots, K_{\max}) \quad (2)$$

其中 $S_k = \begin{cases} 1 & (k = 1), \\ 0 & (k \neq 1), \end{cases}$ 格式 (1) 具有 K_{\max} 阶精度.

令 $K_{\max} = 8$, 则控制方程组 (2) 包含 9 个方程及 10 个未知数. 令 a_{10} 为自由参数, 求解式 (2) 可得到含自由参数的 8 阶精度差分格式. 这时反映色

2003-03-12 收到第一稿, 2003-10-09 收到修改稿.

1) 基金重大项目“空天飞行器的若干重大基础问题”资助项目 (90205025)、国家自然科学基金资助项目 (19872070, 170176033)、国家重点基础研究专项经费资助项目 (G1999032805).

散误差的数值波数为

$$k_i = -a_1 \sin 4\alpha - a_2 \sin 3\alpha - a_3 \sin 2\alpha - a_4 \sin \alpha + a_6 \sin \alpha + a_7 \sin 2\alpha + a_8 \sin 3\alpha + a_9 \sin 4\alpha + a_{10} \sin 5\alpha$$

根据群速度控制思想有

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dk_i}{d\alpha} > 1 \text{ (在间断左方)} \\ \frac{dk_i}{d\alpha} < 1 \text{ (在间断右方)} \end{array} \right\} \quad (3)$$

图 1 为 $a_{10} = -0.008, -0.006, -0.004, -0.002, 0, 0.002$ 时对应的 k_i 随 α 的变化情况. 从中可以看出, 当 α 较小时 $a_{10} = -0.008, -0.006, -0.004$ 对应的格式为快格式 ($\frac{dk_i}{d\alpha} > 1$), $a_{10} = -0.002, 0, 0.002$ 对应的格式为慢格式. 在间断左右两侧分别采用适当的快格式及慢格式就可构造出具有间断捕捉能力的群速度控制型差分格式.

具体步骤如下

令

$$u'_j = (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})/\Delta \quad (4)$$

其中

$$F_{j+1/2} = b_1 u_{j+4} + b_2 u_{j+3} + b_3 u_{j+2} + b_4 u_{j+1} + b_5 u_j + b_6 u_{j-1} + b_7 u_{j-2} + b_8 u_{j-3} + b_9 u_{j-4} \quad (5)$$

其中

$$b_1 = a_1, \quad b_k = b_{k-1} + a_k \quad (k = 2, 3, \dots, 9) \quad (6)$$

a_k 为式 (1) 的系数.

当 $|\Delta u_{j-1/2}| < |\Delta u_{j+1/2}|$ (在间断左侧), 取 $a_{10} = a_{10}^{(1)}$.

当 $|\Delta u_{j-1/2}| > |\Delta u_{j+1/2}|$ (在间断右侧), 取 $a_{10} = a_{10}^{(2)}$.

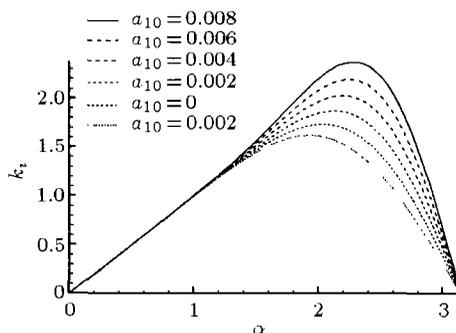


图 1 不同 a_{10} 对应的 k_i 随 α 的变化曲线

Fig.1 k_i varies as a function of α

由式 (2), 式 (6) 定出系数 b_k 并由式 (4), 式 (5) 求出一阶导数的逼近, 其中 $\Delta u_j = u_{j+1/2} - u_{j-1/2}$.

以上是模型方程 $a > 0$ 的情况. 当 $a < 0$ 时可同样构造. 可以证明, 本格式在光滑区域具有 8 阶精度, 在个别点退化为 7 阶精度. 本文将其称为 8 阶精度的群速度控制格式 (GVC8). 该格式的计算量与 9 阶普通迎风差分相当, 远低于目前流行的 5 阶 WENO 格式 [6].

2 系数的选取与优化

格式 (4) 中包含了两个自由参数 $a_{10}^{(1)}$ 与 $a_{10}^{(2)}$, 可以选择一定的优化原则来选取这两个系数. 由于本文的目的在于捕捉湍流场中的微激波, 因此格式对激波的捕捉能力及对高波数物理量的分辨能力将成为选择这两个系数的判据.

考虑一维 SOD 激波管问题, 设初值条件为:

当 $x < 1/2$ 时, $u = 0, \rho = \rho_s, p = p_s$. 当 $x \geq 1/2$ 时, $u = 0, \rho = 0.125, p = 0.1$.

设 $p_s = \rho_s$. p_s 值越大说明间断 (激波) 的强度越强. 求解该 SOD 问题, 当 p_s 超过一定值时, 计算将不稳定, 通常表现为数值计算发散. 可以根据不同系数的 GVC8 格式能够模拟的最高 p_s 值衡量格式对强间断的捕捉能力. 计算网格点取为 128, 时间推进采用 3 阶 TVD 型的 Runge-Kutta 方法. 表 1 为采用不同系数 GVC8 格式能够模拟到的最高 p_s 值 (定义为 $p_{s \max}$).

表 1 不同 GVC8 格式能够计算的最大 p_s

Table 1 Maximum p_s for each GVC8 schemes

$(a_{10}^{(1)}, a_{10}^{(2)})$	$p_{s \max}$	$(a_{10}^{(1)}, a_{10}^{(2)})$	$p_{s \max}$
(-0.00128, 0.0042)	8.5	(-0.006, -0.004)	3.5
(-0.006, 0.001)	17.0	(-0.008, -0.003)	5.0
(-0.008, 0.001)	12.0	(-0.005, -0.005)	3.0
(-0.006, 0.0015)	18.5	(-0.0015873, -0.0015873)	1.5

在上表中还列出了 $a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(2)}$ 的几种情况, 当 $a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(2)}$ 时, 格式为普通的 8 阶迎风偏斜格式. 其中 $a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(2)} = -0.0015873$ 时, 格式为 9 阶迎风偏斜格式. 这时格式的精度较高, 但对于强间断的捕捉能力较差. 从上表可以看出 $(a_{10}^{(1)}, a_{10}^{(2)})$ 取 $(-0.006, 0.001)$ 及 $(-0.006, 0.0015)$ 时格式对强间断的捕捉能力较强. 湍流直接数值模拟的关键在于高波数物理量的模拟, 对高波数成分的捕捉能力差会

使数值计算过于耗散，通过数值实验发现耗散误差随着 $a_{10}^{(1)}$ 的增大而减小，随着 $a_{10}^{(2)}$ 的增大而增大。

同时考虑到激波捕捉能力及小尺度分辨能力，本文取 $a_{10}^{(1)} = -0.006$, $a_{10}^{(2)} = 0.001$ 。

3 GVC8 的具体格式及计算效率

最终 GVC8 格式如下

$$u'_j = (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) / \Delta \quad (\Delta \text{ 为网格间距})$$

对于正通量的导数逼近 (采用后差) 有

$$F_{j+1/2} = \sum_{k=1}^9 b_k u_{j+5-k}$$

$$b_k = \begin{cases} b_k^{(1)}, & |\Delta u_{j-1/2}| \leq |\Delta u_{j+1/2}| \\ b_k^{(2)}, & |\Delta u_{j-1/2}| > |\Delta u_{j+1/2}| \end{cases}$$

其中 $\Delta u_j = u_{j+1} - u_{j-1}$, $b_k^{(1)}$ 及 $b_k^{(2)}$ 的值见表 2。

表 2 $b_k^{(1)}$ 及 $b_k^{(2)}$ 的值

Table 2 $b_k^{(1)}$ and $b_k^{(2)}$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b_k^{(1)}$	17 7 000	283 21 000	53 21 000	6 269 21 000	4 429 4 200	10 531 21 000	4 253 21 000	351 7 000	3 500
$b_k^{(2)}$	4 875	893 21 000	4063 21 000	14 501 21 000	2 371 4 200	2 299 21 000	137 21 000	31 7 000	1 1 000

对于负通量有： $F_{j+1/2} = \sum_{k=1}^9 a_k u_{j+6-k}$

$$a_k = \begin{cases} b_{10-k}^{(2)}, & |\Delta u_{j-1/2}| < |\Delta u_{j+1/2}| \\ b_{10-k}^{(1)}, & |\Delta u_{j-1/2}| \geq |\Delta u_{j+1/2}| \end{cases}$$

($k = 1, 2, \dots, 9$)

为了验证计算效率，本文采用 GVC8 格式，9 阶迎风偏斜格式 (UD9) 及 5 阶 WENO 格式 (WENO5) 求函数 $u = \cos(100x)$, $x \in [0, 2\pi]$, 导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的差分逼近。计算采用 10 000 个网格点，计算在 2.0 GHz 的 Pentium4 微机上进行，数值误差 (最大误差) 及 1000 次计算的 CPU 时间见表 3。

表 3 不同格式的计算效率及数值误差

Table 3 The numerical error and CPU times by using difference schemes

Numerical schemes	Numerical error	CPU time (s) (run 1 000 times)
GVC8	2.73×10^{-9}	0.25
WENO5	1.55×10^{-5}	3.36
UD9	2.13×10^{-10}	0.16

从表 3 可以看出，GVC8 格式的数值精度及计算效率与 9 阶迎风格式相差不大，均远高于 WENO5。而从表 1 中可以看出 GVC8 格式的激波捕捉能力远强于 UD9。可见 GVC8 格式是一个兼顾激波捕捉能力，精度及计算效率的差分格式。实际上该格式除了用于捕捉可压湍流中的微激波，还可用于宏观激波的数值模拟，是一种实用性很强的激波捕捉格式。

根据该格式的基本思想还可以构造出更为经济的 6 阶格式，用于含激波复杂流动的数值模拟。

4 较高湍流马赫数的均匀各向同性湍流的直接数值模拟

考虑均匀各向同性衰减湍流的直接数值模拟^[2]。对控制流动的 N-S 方程进行流通矢量分裂，采用 GVC8 格式逼近；黏性项采用 10 阶中心差分格式逼近。时间推进采用 3 阶精度的 TVD 型 Rungue-Kutta 方法。

表 4 为本文计算的几种工况。为了进行比较，除了采用 GVC8 格式以外，还采用 5 阶精度的 WENO 格式 (WENO5) 及 7 阶精度的迎风差分格式 (UD7)。所有计算的 Re_λ 为 72 及 153。可以看出采用 GVC8 格式可以使能够计算的最大初始湍流马赫数提高到了 0.95。

表 4 本文计算参数

Table 4 The computational conditions of each DNS cases

CASE	Re_λ	Mt	Scheme	Mesh size
D1	72	0.5	GVC8	128^3
D2	72	0.8	GVC8	128^3
D3	72	0.9	GVC8	128^3
D4	72	0.95	GVC8	128^3
D5	72	0.5	WENO5	128^3
D6	72	0.9	GVC8	256^3
E1	153	0.6	GVC8	256^3
E2	153	0.8	GVC8	256^3
E3	153	0.6	WENO5	256^3
F1	153	0.3	UD7	256^3
F2	153	0.6	UD7	256^3

图 2 为工况 D1 的归一化湍动能及速度导数偏斜因子^[2]随时间的变化. 图中的符号为 Samtaney 等人^[2]的计算结果. 可以看出本文结果与 Samtaney 的结果吻合较好, 说明本方法在捕捉湍流微激波的同时对湍流微尺度也有较好的分辨能力. 图中的虚线为 WENO5 的对应结果 (工况 D5), 可以看出, WENO5 计算的湍动能的衰减明显快于 GVC8 的计算结果, 这说明 WENO5 的数值耗散明显偏大. 图 3 为工况 D1~D4 的归一化湍动能随无量纲时间的变化图. 可以看出随着湍流马赫数的增加湍动能的衰减加快, 这与流场中随机微激波增加了湍动能的耗散有关. 图 4 为工况 D3 与 D6 归一化湍动能的衰减情况, 可以看出二者吻合较好, 这说明本文的计算结果与网格无关, 同时说明在 128^3 的网格下 GVC8 格式的数值耗散与物理耗散相比是可以忽略的.

随着时间的发展, 初值的影响逐渐减弱. 对于本流动, 通常认为 $t/\tau > 0.5$ (τ 为大涡翻转时间 “large eddy turn-over time”^[2]), 我们保留了工况 D6, E1, E2, F1 的 $t/\tau \geq 1$ 时刻的 4 个流场, 并对其进行分析.

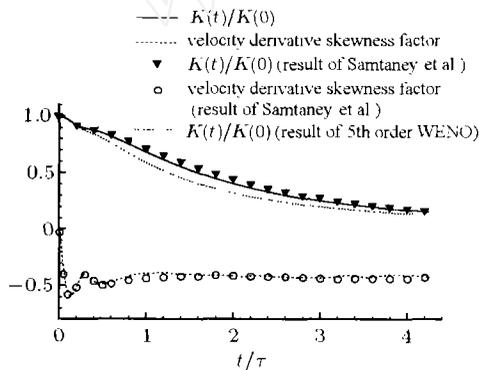


图 2 归一化的湍动能及速度导数偏斜因子随无量纲时间变化 ($Mt = 0.5$)

Fig.2 Normalized turbulent kinetic energy and skewness factor of velocity derivative ($Mt = 0.5$)

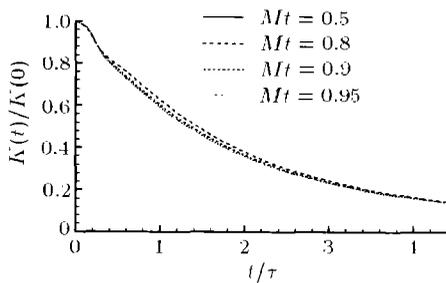


图 3 不同初始湍流马赫数流场归一化湍动能随无量纲时间的变化
Fig.3 Time history of normalized turbulent kinetic energy of computing case D1~D4

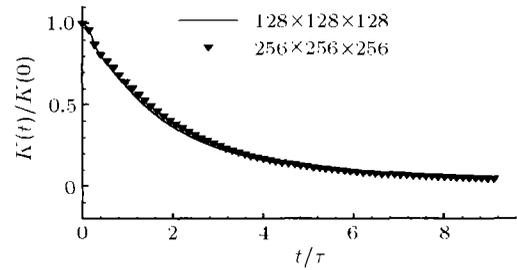


图 4 工况 D3 及 D6 的归一化湍动能随无量纲时间的变化
Fig.4 Time history of normalized turbulent kinetic energy of D3 and D6

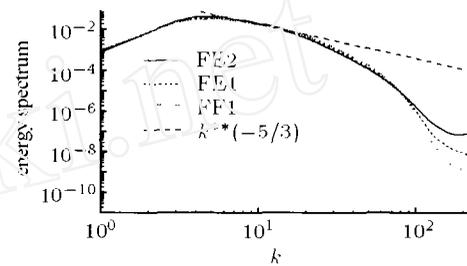


图 5 流场 FE2, FE1 及 FF1 的能谱

Fig.5 Energy spectrum of flow field FE2, FE1 and FF1

这 3 个流场的 Re_λ 相同, 均为 66.9, 其湍流马赫数分别为 0.54, 0.70 和 0.28. 图 5 为流场 FE2, FE1 和 FF1 的能谱, 能谱的高波数部分并未出现明显的上翘, 说明数值计算对于高波数成分的分辨率是足够的. 由于 Reynolds 数不高, 能谱中的惯性区很短. 从图中可以看出, 随着湍流马赫数的增加, 高波数成分的衰减加快, 这说明随着湍流马赫数增加, 在小尺度有更多的动能被耗散掉.

5 结 论

计算结果表明本文构造的 GVC8 格式具有较强的激波捕捉能力及很好的小尺度分辨能力, 是数值模拟含有微激波的可压缩湍流的有效方法, 同时该格式具有较高的计算效率. 同时, 计算结果表明随着湍流马赫数的增高, 更多的湍动能被耗散掉.

致谢 感谢工程与科学计算国家重点实验室 (LSEC) 为本文的计算提供机时, 感谢 LSEC 的张林波研究员对本文程序改进提供的帮助.

参 考 文 献

- 1 Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research. *Annu Fluid Mech*, 1998, 30: 539~578

- 2 Samtaney R, Pullin DI, Kosovic B. Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics. *Phys Fluids*, 2001, 13(5): 1415~1430
- 3 李新亮, 傅德薰, 马延文. 衰减湍流中被动标量场的直接数值模拟及谱分析. *中国科学 G*, 2003, 33(4): 357~367 (Li Xinliang, Fu Dexun, Ma Yanwen. Direct numerical simulation of compressible isotropic turbulence. *Science in China, Serial G*, 2003, 33(4): 357~367 (in Chinese))
- 4 Fu DX, Ma YW, Kobayashi T, et al. Nonphysical oscillations in numerical solutions — reason and improvement. *Computational Fluid Dynamics Journal*. 1996, 4(4): 427~450
- 5 Fu DX, Ma YW. A high order accurate difference scheme for complex flow. *Journal of Computational Physics*, 1997, 134: 1~15
- 6 Liu XD, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J Comp Phys*, 1994, 115: 200~212

OPTIMIZED GROUP VELOCITY CONTROL SCHEME¹⁾

Li Xinliang Fu Dexun Ma Yanwen

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract A new difference scheme called GVC8 is developed, and the scheme are used in the direct numerical simulation of decaying compressible turbulence. In the DNS we have successfully improved the turbulent Mach number up to 0.95. The statistical quantities thus obtained at lower turbulent Mach number agree well with those from previous authors start with same initial conditions, but they are limited to simulate at lower turbulent Mach numbers due to so-called start-up problem. Energy spectrum of compressible turbulent flow is analyzed.

Key words group velocity control, direct numerical simulation, compressible turbulence

Received 12 March 2003, revised 9 October 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (90205025, 19872070, 170176033) and the NKBRSF (G1999032805).