

喷涂于运动固壁上的模口流变流动

唐泽眉* 胡文瑞

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 模口膨胀是聚合物加工中的重要现象, 通常用流变效应来解释. 射流自由面上温度分布不均匀, 必然会产生表面张力梯度驱动的热毛细对流. 采用二维非定常有限元方法, 数值模拟喷涂于运动固壁上的流变流体的模口膨胀问题. 计算中考虑了流变效应和热毛细效应的耦合作用. 结果表明, 流变效应和热毛细效应两者均使射流截面增大, 非 Newton 流体的流变效应是模口膨胀的主要原因.

关键词 模口膨胀 热毛细流动 非 Newton 流体 薄膜射流

薄膜流动和聚合物加工都要求了解流体动力学过程^[1,2]. 在加工过程中常常观测到聚合物射流在模口处的截面变化, 模口膨胀是这些过程的重要现象, 通常用流体介质的流变性质解释. Tanner 的理论用沿射流的一个速度分量解释模口膨胀现象^[3]. 由于截面不均匀, 膜口区的流场应该至少是二维的, 如文献[4,5]. 可以设想, 法向应力差会使熔体射流在模口处的截面增大, 但是, 热毛细对流会对模口膨胀效应有贡献^[6-8]. 实验表明, 液体表面产生的溶质毛细作用也会使液层的厚度增大^[9].

聚合物由高温熔区向低温外界区域的热传导, 在自由面上形成温度梯度, 从而在射流中叠加了热毛细流动. 自由面上温度梯度驱动的热毛细流动将使聚合物加工时薄膜的截面加大. 前文用分析方法讨论了 Newton 流体薄膜及弱非 Newton 流体情况时热毛细流动的影响^[6,7]. 这些分析皆基于润滑理论和摄动理论近似, 然后用分析的方法求解液体薄膜热流体过程的高阶方程. 由模口射流出的相对高温的非 Newton 流(熔)体喷涂于运动固体膜上, 该过程由具有传热的流体动力学控制, 只有较简单的情况能求出分析解. 通常情况下, 非 Newton 流体比较复杂, 问题一般只能用数值方法求解.

本文数值分析非 Newton 流体喷涂于运动固体边界上形成的液体薄膜射流, 用二维非定常模型直接数值模拟流体喷出模口后的截面变化、流场和温度分布. 在控制方程和边界条件中考虑流变和热毛细流动效应.

1 薄膜射流的非 Newton 液体物理和数学模型

射流薄膜模型如图 1 所示, 其中液体薄膜熔体或液体由容器喷管中射出并喷涂于等厚度的运动固体薄膜上. 选用直角坐标系 (x, y, z) , 二维近似只依赖于 (x, z) , 并假设 $\partial/\partial y = 0$. 熔体或液体自容器出口流动一个长距离 l . h_0 是喷出液层在 $x = 0$ 的初始高度, 该处的温度 T_0 比气体

2003-02-11 收稿, 2003-07-28 收修改稿

* E-mail: tang@nml.imech.ac.cn

环境温度 T_g 和 $x = l$ 处的温度 T_l 要高. 固体薄膜与喷出流体的下边界光滑接触, 以 $z = 0$ 处液体相同的速度 u_0 运动.

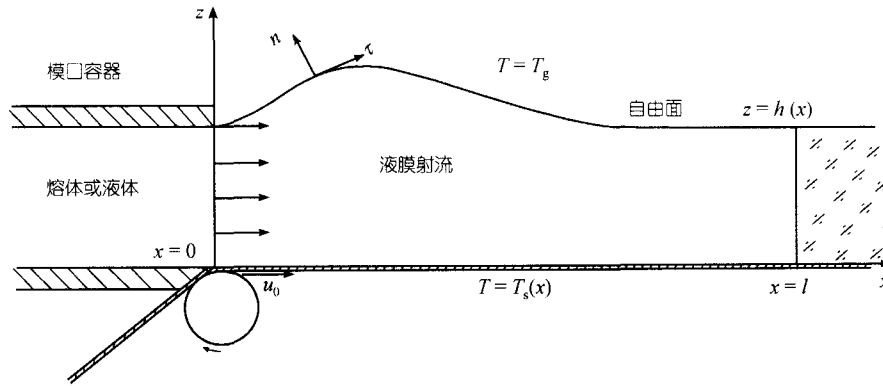


图 1 由模口射出并涂于运动固体边界上的液体薄膜射流示意图

考虑液体不可压并有均匀的运动学黏性和热扩散系数. 非定常的二维守恒关系可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \nabla v = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \nabla \pi, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (1.3)$$

其中 ρ , p , μ , κ 和 T 分别为液体的密度、压强、黏性系数、热扩散系数和温度, (u, v, w) 为速度矢量 v 的分量, 而弹性应力张量 π 的分量为 π_{xx} , π_{xz} , π_{zx} 和 π_{zz} . 其中

$$\begin{aligned} \pi_{xx} = & 4\alpha_1^* \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ & + 2\alpha_2^* \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\pi_{xz} = 2\alpha_2^* \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \pi_{zz} = & 4\alpha_1^* \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ & + 2\alpha_2^* \left[w \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

上式中 α_1^* , α_2^* 是弹性系数. 并满足条件 $\alpha_1^* > 0$, $\alpha_2^* < 0$. 第 1 法向应力差为 $-\alpha_2^*$, 而第 2 法向应力差 $\alpha_1^* + \alpha_2^*$ 为小量, 在本计算中取 $\alpha_1^* + \alpha_2^* = 0$.

液体层的边界条件可表示如下:

$$z = 0: u = u_s, w = 0, T = T_s(x) = T_0 - (T_0 - T_l)(x/l), \quad (1.7)$$

其中 T_0 和 T_l 分别是 $x = 0$ 和 $x = l$ 处的温度.

流体层自由边界 $z = h(x)$ 上:

$$u \frac{dh}{dx} = w, \quad (1.8)$$

$$p = \frac{2\mu}{1+h'^2(x)} \left[h'^2(x) \frac{\partial u}{\partial x} - h'(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{1}{1+h'^2(x)} \left[h'^2(x) \pi_{xx} - 2h'(x) \pi_{xz} + \pi_{zz} \right] - \sigma \frac{h''(x)}{[1+h'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.9)$$

$$\frac{-|\sigma_T|}{\sqrt{1+h'^2(x)}} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + h'(x) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\mu}{(1+h'^2(x))} \left[2h'(x) \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (1-h'^2(x)) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{(1+h'^2(x))} \left[-h'(x) \pi_{xx} + (1-h'^2(x)) \pi_{xz} + h'(x) \pi_{zz} \right], \quad (1.10)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -H(T - T_f), \quad (1.11)$$

其中 $h'(x) = dh/dx$, n 是单位法向矢量, κ 和 H 分别是液体的热传导率和气体的热传导系数, 在 (1.11) 式中忽略了辐射效应. 自由面的曲率为

$$\frac{1}{R_c} = \frac{h''(x)}{\sqrt{1+h'^2(x)}}.$$

进口处边界条件:

设进口处的流速为平行层流, 有抛物线速度分布. z 坐标原点在底部固壁上,

$$x = 0, \quad u = u_0 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z}{h_0} - \frac{1}{2} \right)^2 \right], \quad w = 0; \quad T = T_0. \quad (1.12)$$

出口处边界条件:

$$x = l, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (1.13)$$

2 计算方法及程序校验

将方程(1.1~1.3) 改写为无量纲流函数和涡度的表达式, 用分步杂交有限元方法求解, 特征线法用于对流项, 求解扩散项用有限元方法^[10]. 计算区域在 x, z 方向分别划分为 121 和 21 个网格, 全部计算区域有 2541 个节点, 相应有 4800 个三角元.

用非定常数值程序计算模口膨胀问题在上述边界条件下的定常解. 在 $t = 0$ 的初始时刻取自由面为平面, 在 $x = 0$ 处初始速度 u 按(1.12)式取值. 初始温度为零, 以 $5^\circ\text{C}/\text{s}$ 的加热速率在 20 s 加热到 $T_0 = 100^\circ\text{C}$, 之后保持不变. 在上述边界条件下计算模口段的流场和温度分布, 根据流场可得到自由面上的流体压强分布, 用法向压力平衡条件(1.9), 修正自由面的形状, 再重复上述计算过程, 最终可得到自由面形状和流场和温度分布耦合的定常解.

计算参数选择如下:

$$h_0 = 1 \text{ mm}, l = 50 \text{ mm}, u_0 = 64.2 \text{ mm/s}, u_s = 0.3 u_0, T_0 = 100^\circ\text{C}, \quad (2.1)$$

这时相应的 Reynolds 数和 Peclet 数为

$$Re = 0.642, Pe = 2.03.$$

将本程序的热毛细对流部分用于 Bradley 等人的方形容热毛细对流计算, 以校验本程序的正确性. 计算结果比较如表 1.

表 1 与 Bradley^[11]的计算结果比较

	网格数	Re	$-\psi_{\min}$	ω_{core}	x_c	z_c	$u(0.5, 1)$	$Nu_{x=0}$	$Nu_{x=1}$
$Pr = 1$									
A	64×64	1.0×10^4	3.23×10^{-3}	-6.97×10^{-2}	0.58	0.62	2.96×10^{-2}	4.36	4.40
B	64×64	1.0×10^4	3.20×10^{-3}	-7.10×10^{-2}	0.58	0.63	2.95×10^{-2}	4.34	4.32
$Pr = 10$									
A	64×64	1.0×10^3	2.60×10^{-3}	-10.0×10^{-2}	-	-	2.30×10^{-2}	3.79	3.83
B	64×64	1.0×10^3	2.75×10^{-3}	-9.56×10^{-2}	-	-	2.47×10^{-2}	3.97	3.89

A 为 Bradley 等人的结果, B 为本文的结果, 其中 $-\psi_{\min}$ 是流区中的最小流函数值, ω_{core} 是在点 (x_c, z_c) 处的涡度 $u(0.5, 1)$ 在 $x = 0.5, z = 1$ 处的速度, Nusselt 数定义为 $Nu(x) = \int_0^1 \left(Ma \frac{\partial \psi}{\partial z} T - \frac{\partial T}{\partial x} \right) dz$

从表 1 可以看出, 我们用分布杂交有限元方法进行的热毛细对流计算与 Bradley 等人的结果较一致, 证明我们的计算方法是可用的.

3 计算结果

相对不同的无量纲流变系数 α_2 值时的自由面形状如图 2 所示, 图中 $\eta = h(x)/H_0, \xi = x/l$. $\alpha_2 = 0$ 对应于热毛细对流的情况, 而流变效应对应于 $\alpha_2 < 0$, α_2 值越小, 流变效应越强. 从图 2 可以看出, 热毛细效应和流变效应都可使液体射流截面在喷口处增大, 而流变效应可使截面增大数倍. 图 3 给出了最大无量纲截面高度 η_{\max} 与无量纲流变系数 $-\alpha_2$ 的关系. 结果显示, Newton 流体时 ($\alpha_2 = 0$) 热毛细对流可使截面增大约 8%, 而流变效应可使流体的截面增大数倍.

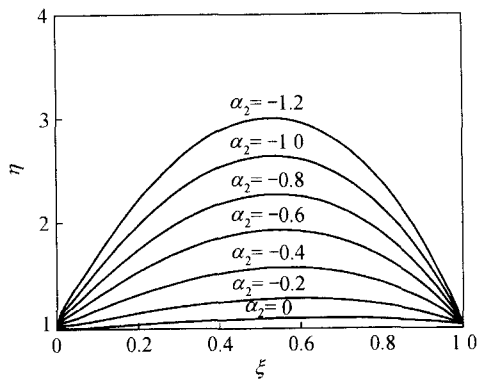


图 2 流变系数对射流剖面的影响
 $\alpha_2 = 0$ 对应于 Newton 液体

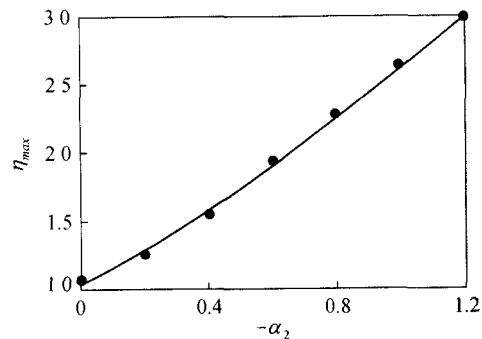


图 3 液体射流最大截面与流变系数 α_2 的关系

图 4 给出了 $\alpha_2 = 0$ 仅有热毛细对流效应((a), (c))和 $\alpha_2 = -0.8$ 热毛细效应和流变效应共同作用((b), (d))时的流场流线((a), (b))和温度分布((c), (d)), 结果表明, 当流变效应较强时, 大应力差时在模口区会产生一个回流.

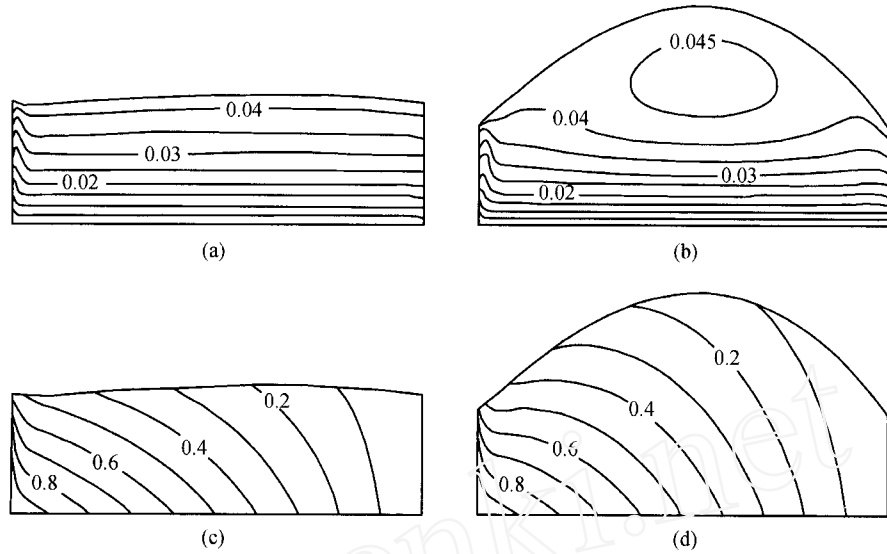


图 4 Newton 流体 $\alpha_2 = 0$ ((a), (c))和非 Newton 流体 $\alpha_2 = -0.8$ ((b), (d))时的流线((a), (b))和相对应的温度分布(c)和(d)

要注意的是, 解依赖于模口 $x = 0$ 处的膨胀角 $dh(0)/dx$. 膨胀角只能由同时求解容器区域和液体薄膜问题获得, 它依赖于法向应力差. 一般而言, 大的法向应力差对应于大的膨胀角. 数值计算表明, 对于给定的系数 α_2 存在一个临界膨胀角, 当膨胀角小于此临界值时将无解. 图 5 给出了临界膨胀角 $\eta'(0)$ 与系数 α_2 之间的关系, 对于固定的流变系数 α_2 在计算中选用临界膨胀角. 因此, 本文图 5 给出的是流变流体对模口膨胀的最小影响.

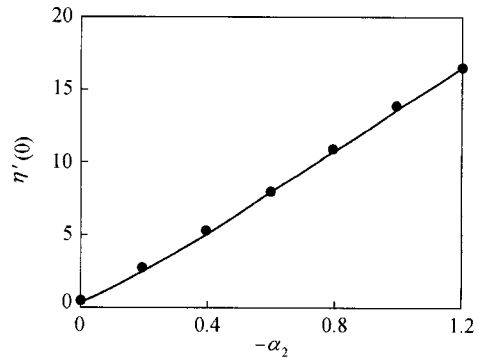


图 5 临界膨胀角与流变系数 α_2 的关系

4 讨论

用数值方法求解非 Newton 流体的液膜射流问题, 其中温度场与流体动力学过程耦合. 结果表明, 由于热量由固体边界向熔体、并通过自由面向环境气体中传递而产生热毛细作用, 它使液体射流的截面增大. 进一步, 压强分布主要由非 Newton 流体的流变性质决定, 它也使液体射流的截面增大. 本文结果给出热毛细效应及非 Newton 流体流变效应对截面变化的影响机制, 而流变效应比热毛细效应更为重要.

本文选用了非 Newton 流体的二阶流体模型, 这显然有局限性. 但是, 聚合物是多种多样的, 某些聚合物甚致可用 Newton 流体来描述. 本文的讨论只用于可用二阶流体模型描述的那

些聚合物. 本文的结果表明, 与 Newton 流体类似, 热传递可产生热毛细流动并增大液体射流截面, 但是非 Newton 流体效应更重要.

Barus 效应可造成大的截面变化, 可比容器出口大两三倍; 本文结果对此给予了解释. 还应该进行更多的研究, 特别是结合制造过程的研究, 应更加关注于研究与聚合物应用实际情况相关联的流变流体.

参 考 文 献

- 1 Tucker C L. Computer Modeling for Polymer Processing. New York: Hanser, 1989, 370 ~ 372
- 2 Silagy D, Demay Y, Agassant J F. Stationary and stability analysis of the film casting process. *J Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1998, 79: 563 ~ 570
- 3 Tanner R I. A theory of Die-Swell. *J Polymer Science: Part A-2*, 1970, 3: 2067 ~ 2072
- 4 Bohme G. Die Swell. In: Böhme G, ed. *Non-Newtonian Fluid Mechanics*. Amsterdam: North-Holland, 1987, § 4.3
- 5 Agassant J F, Avenas P, Sergant J P H, et al. Extrudate swell. In: Agassant J F, Avenas P, Sergant J P H, et al, ed. *Polymer Processing*. New York: Hanser, 1991, 273 ~ 276
- 6 Hu W R, Imaishi N. Thermocapillary flow in a jet of liquid film painted on a moving boundary. *Langmuir*, 2000, 16: 4632 ~ 4638
- 7 Hu W R, Imaishi N. Thermocapillary flow in an annular liquid layer painted on a moving fiber. *International J Heat and Mass Transfer*, 2000, 43: 4457 ~ 4466
- 8 胡文瑞, 许为厚. 喷涂于运动边界上液体薄膜射流的流变效应. *中国科学, A 辑*, 2002, 32(4): 289 ~ 298
- 9 Ramdaul O O, Quere D. Thickening factor in Marangoni coating. *Langmuir*, 1997, 13: 2911 ~ 2914
- 10 吴江航. 数值模拟水环境污染的一种 L₂稳定的分步杂交方法. *水动力学研究与进展*, 1985, 1: 27 ~ 36
- 11 Carpenter Bradley M, Homsy G M. High Marangoni number convection in a square cavity: part II. *Phys Fluids A*, 1990, 2(2): 137 ~ 149