

# 失重条件下对称充液陀螺的不稳定行为研究

朱如曾<sup>1</sup>, 周一峰<sup>2</sup>, 张正平<sup>3</sup>, 蔡 立<sup>1</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 非线性力学国家重点实验室, 北京 100080;

2. 中南大学, 土木建筑学院, 力学系, 长沙 410075;

3. 北京强度与环境研究所, 北京 100076)

摘 要: 对于质心固定的, 充满粘性均匀液体的旋转对称陀螺在失重条件下绕对称长轴旋转态的小扰动不稳定性及其极限行为进行了研究, 所给出的定理 3 比以往的不稳定定理 [4] 为强, 且反映的信息量多很多。关于初始大扰动后的渐近行为, 对文 [8] 已给出但未严格证明的两条定理给出了严格证明, 它由定理 1 和定理 2 所描述。

关键词: 失重; 对称; 充液陀螺; 不稳定性; 渐近行为

中图分类号: O3 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2003)02-0217-04

## 0 引言

充液陀螺的运动稳定性研究既有理论意义, 又有实际意义, 因而有关的研究工作很多<sup>[1-7]</sup>。近年来在非线性的研究方面十分活跃<sup>[6]</sup>。对于这种具有非孤立的平衡转动态的系统, 即使是局部渐近稳定性和局部不稳定性都是不能用鲁米扬采夫的定理<sup>[1]</sup>来加以判断的, 而本文定理 3 却能判定其主轴的取向不稳定性, 并给出它在有限扰动下的渐近行为。此外, 对于在初始大扰动之后的行为研究, 文 [8] 给出了比著名的茹科夫斯基定理更强的两条定理, 但未给出证明, 本文则巧妙地给予了严格证明。本文的研究除去理论意义外, 对目前最活跃的微重力科学、宇航控制也有实用价值。

## 1 坐标系和预备定理

为了定义距离的需要, 本文所有量都采用最简单的无量纲量, 即直接扣除单位。设主转动惯量为  $A, A, C$ , 并充满了粘性液体(密度为  $\rho_1$ , 动力粘性系数为  $\mu$ )的腔体, 在失重条件下绕重心  $O$  转动。并设外壳与液体的总质量为  $M$ 。

现引进二个直角右旋标架: 1) 固定标架  $\{0, \vec{i}_1^0, \vec{i}_2^0, \vec{i}_3^0\}$ , 空间点的坐标为  $(x^0, y^0, z^0)$ ; 2) 腔体固联标架  $\{0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$ ,  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  分别为沿壳液总体的三个主方向, 系统关于  $\vec{i}_3$  的转动惯量为  $C$ , 空间点的坐

标为  $(x', y', z')$ 。基矢之间满足关系  $\vec{i}_j' = \sum_{k=1}^3 \gamma_{jk}' \vec{i}_k^0$

( $j = 1, 2, 3$ )。标架 2 相对于标架 1 的角速度  $\vec{\omega}$  为

$\vec{\omega} = \sum_{k=1}^3 \omega_k \vec{i}_k^0$ 。液体关于标架 1 和 2 的速度分布分

别为  $\vec{v}$  和  $\vec{v}_\gamma$ , 并记  $\rho_{\vec{v}} = \iiint \vec{v}^2 d\tau$  和  $\rho_{\vec{v}_\gamma} = \iiint \vec{v}_\gamma^2 d\tau$ , 其中积分遍及全部液体。

根据系统的运动方程可证明动能的耗散关系<sup>[9]</sup>

$$dT/dt = -\varphi = -(1/2) \sum_{i,j=1}^3 \iiint_{\tau} \mu T_{ij}^2 d\tau \quad (1)$$

$\tau$  为液体所占有的区域。根据平衡转动轨道的充要条件  $\varphi = 0$ , 文献 [4] 已在附录中对这种系统给出平衡转动轨道的解集。由此得:

引理 1 充液腔体绕重心转动的平衡转动轨道集合由绕任一主轴以常角速度  $\vec{\omega}_e$  作整体刚性转动的轨道  $\mathcal{R}_e$  构成。

利用文献 [4] 引理 1 结合本文引理 1 立即得到如下引理  $\alpha$  (即茹科夫斯基定理<sup>[1]</sup>):

引理 2 对于定点与质心重合的充满粘性液体旋转对称的腔, 不管它从什么初态  $p_0$  出发, 其极限轨道  $\mathcal{R}_{ep0}$  是绕它一个主轴  $a$  以常角速度  $\vec{\omega}_{ep0}$  作整体刚性转动,  $a$  的取向与初始角动量  $\vec{L}(p_0)$  方向一致, 并且极限角速度为

$$\vec{\omega}_{ep0} = \begin{cases} \vec{L}(p_0)/C & \text{当关于 } a \text{ 的转动惯量为 } C \\ \vec{L}(p_0)/A & \text{当关于 } a \text{ 的转动惯量为 } A \end{cases}$$

这里的“极限”是关于 $|\Delta T|$ 、 $|\Delta\omega_1|$ 、 $|\Delta\omega_2|$ 、 $|\Delta\omega_3|$ 和 $|\Delta\theta|$ 的,此处 $|\Delta\omega_1|$ 是指腔体实际的 $\omega_1$ 与 $\mathcal{R}_{ep_0}$ 的 $\omega_{ep_0}$ 之差的绝对值,余类推,但 $|\Delta\theta|$ 是 $\eta$ 的表示式中的 $|\Delta\theta|$ 。

我们引进由初扰态 $p_0$ 决定的新匀速转动辅助标架3,即 $(O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ (见图1),此系相对于固定标架1以匀角速度 $\vec{\Omega}(p_0) = \vec{L}(p_0)/D$ 旋转,  $\vec{i}_3 // \vec{\Omega}(p_0)$ ,  $D$ 是根据情况任意选取的常数。

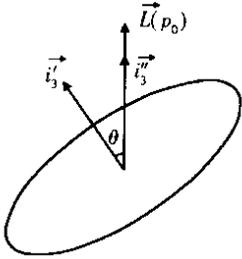


图1  
Fig.1

2  $C - A > 0$  的情况

定理 [8] 对定点与质心重合的充满粘性液体旋转对称且具有性质  $C - A > 0$  的陀螺,在标架1中观察,如果初始扰动态 $p_0$ 的 $\vec{i}_3$ 与 $\vec{L}(p_0)$ 的夹角 $\theta(0) = \theta(p_0) < \pi/2$ ,并且初始动能 $\mathcal{T}(p_0)$ 满足关系

$$\mathcal{T}(p_0) < \vec{L}^2(p_0)/2A \quad (2)$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0 \quad (3)$$

这里 $\theta(t)$ 是 $\vec{i}_3$ 与 $\vec{L}(p_0)$ 之间的夹角(见图1)。

证明 设系统关于标架1的动能为 $T$ ,角动量为 $\vec{L}$ ,系统关于 $\vec{i}_3$ 的瞬时转动惯量为 $I$ ,关于标架3的动能为 $T_R$ ,则我们有[11]

$$T = T_R + \vec{\Omega}(p_0)\vec{L}(p_0) - I\vec{\Omega}^2(p_0)/2 \quad (4)$$

根据引理2,对于极限态 $\mathcal{R}_{ep_0}$ ,腔的某一主轴必定与 $\vec{L}(p_0)$ 一致,因此 $\theta$ 的极限值必定只能取 $0, \pi/2, \pi$ 。因为 $\theta(p_0) < \pi/2$ ,所以如果 $\theta \rightarrow \pi$ ,则必然在某一时刻 $t_1$ 经过 $\theta(t_1) = \pi/2$ 。此时 $\mathcal{K}(t_1) = A$ 。当 $t = t_1$ 时,将 $\mathcal{K}(t_1) = A$ 和 $\vec{\Omega}(p_0) = \vec{L}(p_0)/D$ 代入(4)式,并取 $D = A$ ,得 $\mathcal{T}(t_1) \geq \vec{L}^2(p_0)/(2A)$ 。由(1)式得 $T(p_0) \geq \mathcal{T}(t_1)$ ,故 $\mathcal{T}(p_0) \geq \vec{L}^2(p_0)/(2A)$ 。这与假设条件(2)矛盾,故在条件(2)下,我们得出 $\theta$ 不可能经过 $\pi/2$ ,也不趋于 $\pi/2$ ,故 $\theta$ 只可能趋于0。容易看出,对于 $C - A > 0$ ,条件(2)是可能实现的。

3  $C - A < 0$  的情况

定理 [8] 对定点与质心重合的充满粘性液体旋转对称且具有性质  $C - A < 0$  的陀螺,在标架1中观察,如果初始扰动态 $p_0$ 有

$$\mathcal{T}(p_0) < \vec{L}^2(p_0)/2C \quad (5)$$

或虽然 $\mathcal{T}(p_0) = \vec{L}^2(p_0)/2C$ ,但初始时腔中并不处处成立 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ,则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \pi/2 \quad (6)$$

其中 $\theta$ 为 $\vec{L}(p_0)$ 与 $\vec{i}_3$ 的夹角(见图2)。

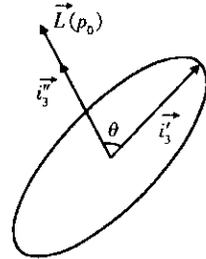


图2  
Fig.2

证明 根据引理2,极限态 $\mathcal{R}_{ep_0}$ 中,必有某一主轴与 $\vec{L}(p_0)$ 重合,因此在 $\mathcal{R}_{ep_0}$ 中,必有 $\theta = 0, \pi$ ,或 $\pi/2$ 。如果 $\theta(\infty) = 0$ 或 $\pi$ ,则 $\mathcal{K}(\infty) = C$ ,在(4)式中取 $D = C$ 得 $\mathcal{T}(\infty) \geq \vec{L}^2(p_0)/(2C)$ 。又由(1)式, $T(\infty) \leq \mathcal{T}(p_0)$ ,将(5)式代入此式得 $\mathcal{T}(\infty) < \vec{L}^2(p_0)/2C$ 。于是导致矛盾,所以只可能有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \pi/2$ 。如果初始扰动态中,有 $\mathcal{T}(p_0) = \vec{L}^2(p_0)/2C$ ,但 $\vec{v} \neq \vec{\omega} \times \vec{r}$ ,则初始时刻应有 $dT/dt = -\varphi < 0$ 。于是存在一有限时间 $\Delta t$ ,使当 $t' = \Delta t$ 时有 $\mathcal{T}(t') < \mathcal{T}(p_0)$ 。于是 $\mathcal{T}(t') < \vec{L}^2(p_0)/2C$ 。选 $t'$ 为时间的起点,定理仍成立。定理证毕。

定理3 对定点与质心重合的充满粘性液体旋转对称且具有性质  $C - A < 0$  的陀螺, $\theta'$ 必不稳定,并且对满足

$$\mathcal{T}(p_0) < \vec{L}^2(p_0)/2C \quad (7)$$

的初始扰动态集合 $\{p_0\}$ ,有

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \theta'(p_0, t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \overline{\lim_{t \rightarrow \infty} \theta'(p_0, t)} = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

此处 $\eta' = \text{Max}\{|\vec{\omega}_e - \vec{\omega}(p_0)|, |\theta'(p_0)|, |\vec{v}_i(\vec{r}, p_0)|\}$ ,并且 $\vec{\omega}(p_0), \theta'(p_0), \vec{v}_i(\vec{r}, p_0)$ 分别是初始扰动态的角速度 $\vec{i}_3$ 与 $\vec{\omega}_e$ 的夹角及液体相对于壳体的速

度分布(见图3),还有  $\theta'(p_0, 0) = \theta'(p_0)$

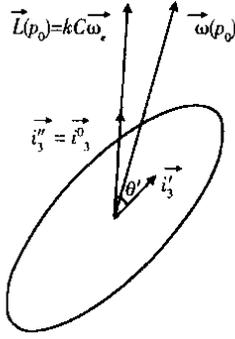


图3  
Fig.3

证明 显然在未扰轨道  $\mathcal{R}_e$  以  $\eta'$  为尺度的任意小邻域内总可选择初扰态为整体刚性转动态  $p_0$ ,  $\theta'(p_0) \neq 0$ , 且角动量  $\vec{L}(p_0)$  与  $\mathcal{R}_e$  的角动量  $C\vec{\omega}_e$  同方向,  $\vec{L}(p_0) = kC\vec{\omega}_e$ . 由于  $\theta'(p_0) \neq 0$ , 故  $\vec{i}_3'$  与  $\vec{\omega}(p_0)$  不重合, 又由于  $C$  是最小转动惯量, 所以

$$K(p_0) > C \tag{9}$$

这里  $K(p_0)$  是系统绕  $\vec{\omega}(p_0)$  的转动惯量, 于是初始扰动态的动能为

$$T(p_0) = K(p_0)\omega^2(p_0)/2 = [K(p_0)\omega(p_0)]^2 / (2K(p_0))$$

将  $K(p_0) > C\omega^2(p_0)$  及(9)式代入上式得(7)式。所以在  $\eta'$  为尺度的任意小邻域内都存在满足(7)式的状态, 故令  $\eta' \rightarrow 0$  是有意义的。对任意小扰动初态  $p_0$  显然存在下式

$$\theta(p_0, t) - \alpha < \theta'(p_0, t) < \theta(p_0, t) + \alpha \tag{10}$$

其中  $\alpha$  为  $\vec{L}(p_0)$  与  $\vec{\omega}_e$  之间的夹角。下面限定  $p_0$  满足条件(7), 此时由定理2得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(p_0, t) = \pi/2$ 。

结合(10)式得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta'(p_0, t) \geq (\pi/2) - \alpha$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta'(p_0, t) \leq (\pi/2) + \alpha$ 。在此两式中取  $\eta' \rightarrow 0$ , 并利用  $\lim_{\eta' \rightarrow 0} \alpha = 0$  得(9)式。证毕。

参考文献:

- [ 1 ] Moiseev N N, Rumyantsev V V. Dynamic stability of bodies containing fluid[ M ]. Berlin Springer, 1968
- [ 2 ] Parks P C. Stability of liquid-filled spinning spheroids via Liapunov's second method[ J ]. Trans ASME J Appl Mech, 1979, 46: 259-262
- [ 3 ] 李 骊. 旋转充液腔体的有限扰动稳定问题[ J ]. 应用数学和力学, 1983, 4: 609-620
- [ 4 ] 朱如曾. 充液腔体旋转运动的稳定性理论[ J ]. 中国科学, 1984, 7: 624-633
- [ 5 ] 朱如曾. 平面上旋转充液腔体稳定性问题的谱分析及状态空间算子的势理论[ J ]. 中国科学, 1987, 11: 1161-1168
- [ 6 ] Zhu R Z. Distribution, stability, bifurcations and catastrophe of steady rotation of a symmetric heavy gyroscope with viscous-liquid-filled cavity. Int. J. Nonlinear Mech, 1992, 27: 477-488
- [ 7 ] Liu Y Z. The stability of a fluid-filled top rotating on a horizontal plane. Archive. Appl. Mech, 1992, 62: 487-494
- [ 8 ] 朱如曾, 张正平, 蔡立. 失重条件下对称充液陀螺渐近行为研究[ J ]. 力学学报, 增刊, 2002, 34: 75-78
- [ 9 ] 朗道 Л. Д. 连续介质力学, 第一册[ M ]. 北京: 高等教育出版社, 1958: 68



作者简介 朱如曾(1941-),男,研究员,博士生导师,从事纳米物理力学研究,包括纳米材料的结构与性质;固体的细观物理力学问题;分子动力学和第一原理分子动力学。  
通讯地址:中国科学院力学研究所,非线性力学国家重点实验室(LNM)100080)  
电话:010-62545533-2108

## Instability of symmetric gyroscope with liquid-filled cavity under zero-gravitation

ZHU Ru-zeng<sup>1</sup> ZHOU Yi-feng<sup>2</sup> ZHANG Zheng-ping<sup>3</sup> ,Cai Li<sup>1</sup>

( 1. LNM Institute of Mechanics ,Chinese Academy of Sciences ,Beijing 100080 ,China ;

2 Central South University ,Changsha 410000 ,China ;

3 Beijing Institute of Structure and Environment ,Beijing 100076 ,China )

**Abstract** For a rotationally symmetric zero-gravity gyroscope with a cavity completely filled with homogeneous viscous liquid and with the mass center fixed the instability of the rotation about the longer axis under small disturbance and the limit behavior is discussed. Theorem 3 we got is stronger than the previous instability theorem and includes much more information. Theorems 1 and 2 given by the author and others with no proofs describe the asymptotic behaviors of the motion of this gyroscope starting from arbitrary initial condition. The both theorems 1 and 2 are proved skillfully.

**Key words** : Zero-gravity ; Symmetric ; Liquid-filled gyroscope ; Instability ; Asymptotic behavior

( 上接第 197 页 ) 了足够的信息。

### 参考文献 :

- [ 1 ] 刁海南. 新型毫米波定向自适应引信浅析[ A ]. 9411 制导与引信学术会议[ C ], 1994
- [ 2 ] Stephen E Linsky. Microwave Passive Direction Finding[ M ]. John Wiley & Sons ,Inc. ,1987
- [ 3 ] 李思超,等. 弹体共形微波主动引信天线研究[ A ]. 中国宇航学会特装委员会第六次学术交流会议[ C ], 1991



作者简介 :刁海南( 1968- ),男,研究室副主任,在读博士,高工,专业:信号与信息处理,研究方向:雷达探测及信号处理。  
通讯地址:河南省洛阳市 030 信箱 8 分箱 ( 471009 )  
电话 0379-3383344

## Doppler amplitude comparison algorithm for miss-distance direction identification

DIAO Hai-nan , MAO Er-ke

( Department of E. E. , Beijing Institute of Technology , Beijing 100081 , China )

**Abstract** : Missile radar fuze can obtain near-field target miss-distance direction by switching beams and comparing echo Doppler amplitude. The direction information can offer the explosive azimuth for directional warhead and is key parameter of fuse ignition. The purpose of radar fuze detecting and identifying the miss-distance direction was analyzed. The information characteristics of miss-distance azimuth were described. Some testing Doppler signals from 4 detection beams are given. Two practicable algorithms of Doppler amplitude comparison are presented and the experimental result is given.

**Key words** : Radar fuze ; Miss-distance direction ; Doppler amplitude comparison