

# 非理想界面对三相复合材料应力场的影响<sup>1)</sup>

吴永礼

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要** 对非理想界面的三相复合材料, 提出了计算弹性应力场的微观力学模型, 在适当的简化假设下, 对带界相的颗粒增强和纤维增强复合材料, 得到了应力场的计算公式. 以剪切载荷为例给出了数值例子. 给出的数值结果表明非理想界面对三相复合材料应力场的影响.

**关键词** 复合材料, 微观力学, 非理想界面, 界相

## 引 言

众所周知, 复合材料的增强相与基体之间的结合情况对复合材料的力学性能有很大的影响. 为了加强增强相与基体之间的结合, 经常在增强相外面复盖一层第三相材料, 这样就组成了三相复合材料. 这第三种材料称为界相, 它的厚度可以人为控制以达到最佳的复合材料总体性能. Walpole<sup>[1]</sup>, Benveniste, Dvorak 和 Chen<sup>[2]</sup>, Nemat-Nasser 和 Hori<sup>[3]</sup>, Nemat-Nasser, Yu 和 Hori<sup>[4]</sup> 等已经研究了理想界面条件下这一类材料的力学性能. 吴永礼和谌智法<sup>[5,6]</sup> 的数值计算也表明, 三相复合材料的界相附近局部应力场比较复杂, 它对复合材料的失效机理有一定的影响. 理想界面是指二种材料在变形过程中始终结合在一起的界面. 在三相复合材料中界面有二个: 增强相与界相之间的结合面和界相与基体之间的结合面. 实际上复合材料的界面不一定为理想界面, 所以, 研究非理想界面对复合材料性能的影响是很有意义的. Benveniste<sup>[7,8]</sup>, Achenbach 和 Zhu<sup>[9]</sup>, Qu<sup>[10]</sup> 和 Hashin<sup>[11]</sup> 研究了二相复合材料中非理想界面对复合材料性能的影响.

本文研究非理想界面对三相复合材料等效剪切模量和界面应力场的影响. 在分析中考虑界相与基体之间的界面为非理想界面, 即界面二边的位移可以不连续, 以球形颗粒和圆柱纤维为增强相的三相复合材料为例, 给出了数值计算结果, 本文的方法也能用于增强相与界相之间的结合为非理想界相的情况.

## 1 有非理想界面的三相复合材料中的应力场

考虑一个三相复合材料, 基体相, 增强相和界相的弹性常数张量分别为  $L_{ijkl}^m$ ,  $L_{ijkl}^f$  和  $L_{ijkl}^g$ , 各相的本构关系为

$$\sigma_{ij}^r = L_{ijkl}^r \varepsilon_{kl}^r \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}^r = M_{ijkl}^r \sigma_{kl}^r \quad (2)$$

1999-04-27 收到第一稿, 1999-07-13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (59872046).

其中  $\sigma_{ij}^r$  和  $\varepsilon_{ij}^r$  为应力和应变张量,  $r = f, g, m$ ,  $L_{ijkl}^r$  和  $M_{ijkl}^r = (L_{ijkl}^r)^{-1}$  也称材料刚度张量和柔度张量.

定义作用在体积为  $V$  和表面为  $S$  的复合材料上的边界条件为:

$$u_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad (3)$$

$$\sigma_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (4)$$

其中  $u_i(S)$  和  $\sigma_i(S)$  表示在  $S$  上的位移和表面力向量,  $\varepsilon_{ij}^0$  和  $\sigma_{ij}^0$  是作用的常应力和常应变场,  $n_i$  表示  $S$  的外法线,  $x_i$  是坐标系.

在基体和界相之间的界面假设是非理想的. 参照 Qu<sup>[12]</sup> 的假设, 用无厚度的弹簧层来描述非理想的界面. 在界面上, 界面的表面力是连续的, 但允许位移不连续的. 界面上表面力与位移之间的关系由界面(弹簧层)的柔度联系. 界面条件可表达为

$$\Delta\sigma_{ij}n_j \equiv [\sigma_{ij}(\Omega^+) - \sigma_{ij}(\Omega^-)]n_j = 0 \quad (5)$$

$$\Delta u_i \equiv [u_i(\Omega^+) - u_i(\Omega^-)] = \eta_{ij}\sigma_{jk}n_k \quad (6)$$

其中  $u_i(\Omega^+)$  和  $u_i(\Omega^-)$  是  $x$  在从基体和界相二个方向趋于界面时  $u_i(x)$  的值.  $\sigma_{ij}(\Omega^+)$  和  $\sigma_{ij}(\Omega^-)$  的意义与其相同. 张量  $\eta_{ij} = 0$  相应于理想界面. 而  $\eta_{ij} \rightarrow \infty$  表示界面完全脱开. 界面的这个本构关系可以用界面的法向柔度  $\alpha$  和切向柔度  $\beta$  表示.  $\eta_{ij}$  的形式可以写为

$$\eta_{ij} = \alpha\delta_{ij} + (\beta - \alpha)n_i n_j \quad (7)$$

其中  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 符号. 公式 (7) 也可写为

$$\Delta u_i(\delta_{ik} - n_i n_k) = \alpha\sigma_{ij}n_j(\delta_{ik} - n_i n_k) \quad (7a)$$

$$\Delta u_i n_j = \beta\sigma_{ij}n_i n_j \quad (7b)$$

当  $\beta = 0$  时, 这个界面本构关系表示二个表面之间可以相对滑移, 但不允许分开. 在  $\alpha \rightarrow \infty$  和  $\beta = 0$  时, 允许自由滑移. 因此, 对于小的  $\alpha$  值和  $\beta = 0$  的解可以近似完全自由滑移的界面. 在增强相和界相之间的界面假设是理想接合的, 也即这个界面上的表面力与位移是连续的.

考虑边界条件 (3) 情况下的复合材料, 每一相中的应变场可写为

$$\varepsilon_{ij}^r(x) = A_{ijkl}^r(x)\varepsilon_{kl}^0, \quad r = f, g, m \quad (8)$$

其中  $A_{ijkl}^r(x)$  是四阶张量. 本文用近似的方法确定张量  $A_{ijkl}^r(x)$ : 考虑无限大基体中有单个带界面的增强相, 基体在无限远处受应变  $\varepsilon_{ij}^m$  的作用, 该应变等于现在还不知道的基体中的平均应变.

现在考虑包围单个带界面和增强相的体积  $V$  中表面为  $S'$  的局部基体体积  $V'$ . 它的边界条件是

$$u_i(S') = \varepsilon_{ij}^m x_j \quad (9)$$

其中  $\varepsilon_{ij}^m$  是待定的平均基体应变. 界面条件与 (5) 和 (6) 相同. 增强相和界相的解可写为

$$\varepsilon_{ij}^r(x) = T_{ijkl}^r(x)\varepsilon_{kl}^m, \quad r = f, g \quad (10)$$

其中  $T_{ijkl}^r(x)$  与在无限大基体中的单个增强相有关, 它的相体积平均为  $T_{ijkl}^r$ .

为了确定  $\varepsilon_{ij}^m$ , 把总体平均应变  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  与局部平均应变  $\varepsilon_{ij}^r$  和非理想界面平均应变  $\varepsilon_{ij}^t$  联系起来

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \sum_r c_r \varepsilon_{ij}^r + \varepsilon_{ij}^t = \varepsilon_{ij}^0, \quad r = f, g, m \quad (11a)$$

$$\varepsilon_{ij}^t = \frac{1}{2V_\Omega} \int_\Omega (\Delta u_i n_j + \Delta u_j n_i) d\Omega \quad (11b)$$

其中  $c_r$  是相体积分数,  $c_f + c_g + c_m = 1$ ,  $\Omega$  是界面的外表面,  $V_\Omega$  为  $\Omega$  内的体积.

可以看出, 对于任意界面是很难计算积分 (11). 但是, 对于球形和圆柱形界面, 可以用下列方法计算出来. 对于有弱缺陷的界面, Qu<sup>[12]</sup> 引入了张量  $H_{ijkl}$ , 用界面条件 (6), 并在  $\Omega$  内的体积平均应力  $\sigma_{ij}^*$  来代替在  $\Omega$  内的应力分布

$$\varepsilon_{ij}^t = c_{fg} H_{ijkl} \sigma_{kl}^*, \quad c_{fg} = c_f + c_g \quad (12)$$

其中  $H_{ijkl}$  是四阶张量, 定义为

$$H_{ijkl} = \frac{1}{4V_\Omega} \int_\Omega (\eta_{ik} n_j n_l + \eta_{jk} n_i n_l + \eta_{il} n_j n_k + \eta_{jl} n_i n_k) d\Omega \quad (13)$$

应当指出,  $H_{ijkl}$  与界面 (弹簧层) 的性质和增强相的几何有关.  $\sigma_{ij}^*$  与  $\varepsilon_{ij}^m$  有关. 我们发现这种近似不能用于柔度大的界面, 只是对非常小的界面柔度给出合理的结果. 研究方程 (11b) 后, 可以假设  $\varepsilon_{ij}^t$  有下列形式

$$\varepsilon_{ij}^t = c_{fg} B_{ijkl} \varepsilon_{kl}^m \quad (14)$$

其中  $B_{ijkl}$  是应变集中因子. 把方程 (10) 在每个相的体积上平均, 将结果代入方程 (11), 再用方程 (14) 就可以得到待定的基体平均应变  $\varepsilon_{ij}^m$

$$\varepsilon_{ij}^m = \left[ \sum_r c_r T_{ijkl}^r + c_{fg} B_{ijkl} \right]^{-1} \varepsilon_{kl}^0, \quad r = f, g, m \quad (15)$$

因为只考虑在增强相和界相附近小体积基体中的应变状态, 因而合理地可以认为

$$T_{ijkl}^m \cong I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (16)$$

把式 (15) 代入式 (10) 就可以得到每一相的近似应变场  $\varepsilon_{ij}^r$ .

同样的方法可以用于应力边界条件 (4) 的情况. 与式 (8) 相似可以写出每一相应力场的解

$$\sigma_{ij}^r(x) = D_{ijkl}^r(x) \sigma_{kl}^0, \quad r = f, g, m \quad (17)$$

其中  $D_{ijkl}^r$  是  $D_{ijkl}^r(x)$  的体积平均值, 并称为应力集中因子. 在包围单个带界相的增强相的体积  $V'$  内, 它的表面为  $S'$ , 解可以假设为下列形式

$$\sigma_{ij}^r(x) = W_{ijkl}^r(x) \sigma_{kl}^m, \quad r = f, g \quad (18)$$

根据方程 (1), (2), (10), 张量  $W_{ijkl}^r(x)$  可表示为

$$W_{ijkl}^r(x) = L_{ijpq}^r T_{pqst}^r(x) M_{stkl}^m, \quad r = f, g, m \quad (19)$$

与方程 (16) 相似, 可以认为

$$W_{ijkl}^r \cong I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (20)$$

为了确定  $\sigma_{ij}^m$ , 先把总体平均应力  $\bar{\sigma}_{ij}$  用局部平均应力  $\sigma_{ij}^r$  表示

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_r c_r \sigma_{ij}^r = \sigma_{ij}^0, \quad r = f, g, m \quad (21)$$

再用方程 (19) 可得

$$\sigma_{ij}^m = \left[ \sum_r c_r W_{ijkl}^r \right]^{-1} \sigma_{kl}^0 \quad (22)$$

把式 (20) 代入式 (18), 可得到在每一相中的近似应力场  $\sigma_{ij}^r(x)$ .

## 2 例 题

### 2.1 颗粒增强三相复合材料的应力场

考虑边界受外力作用的带界相颗粒增强三相复合材料. 三种材料均为各向同性材料. 首先考虑无限大基体中有单个带界相的球形颗粒问题. 该复合材料在无限远处受纯剪力作用. 边界条件可以写为

$$\sigma_{xx} |_{r \rightarrow \infty} = \sigma_0, \quad \sigma_{yy} |_{r \rightarrow \infty} = -\sigma_0, \quad \sigma_{zz} |_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (23)$$

设位移场有下列形式<sup>[13]</sup>

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U_r \sin \theta \cos 2\phi \\ u_\theta &= U_\theta \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi \\ u_\phi &= U_\phi \sin \theta \sin 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中  $(r, \theta, \phi)$  是一般的球坐标,  $U_r, U_\theta$  和  $U_\phi$  只是  $r$  的函数, 对颗粒、界相和基体这三个相的位移  $U_r, U_\theta$  和  $U_\phi$  有下列形式

$$\left. \begin{aligned} U_r^f &= A_1 r - \frac{6\nu_f}{1-2\nu_f} A_2 r^3 \\ U_\theta^f &= A_1 r - \frac{7-4\nu_f}{1-2\nu_f} A_2 r^3 \\ U_\phi^f &= -U_\theta^f \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq r \leq a \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} U_r^g &= B_1 r - \frac{6\nu_g}{1-2\nu_g} B_2 r^3 + \frac{3}{r^4} B_3 + \frac{5-4\nu_g}{1-2\nu_g} \frac{1}{r^2} B_4 \\ U_\theta^g &= B_1 r - \frac{7-4\nu_g}{1-2\nu_g} B_2 r^3 - \frac{2}{r^4} B_3 + \frac{2}{r^2} B_4 \\ U_\phi^g &= -U_\theta^g \end{aligned} \right\} \quad a \leq r \leq b \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} U_r^m &= D_1 r + \frac{3}{r^4} D_3 + \frac{5-4\nu_m}{1-2\nu_m} \frac{1}{r^2} D_4 \\ U_\theta^m &= D_1 r - \frac{2}{r^4} D_3 + \frac{2}{r^2} D_4 \\ U_\phi^m &= -U_\theta^m \end{aligned} \right\} \quad r \geq b \quad (27)$$

其中  $\nu_f, \nu_g, \nu_m$  是各相的泊松比,  $a, b$  是颗粒和界相的外径.  $A's, B's$  和  $D's$  是待定的积分常数, 可以用界面的位移和应力连续条件及边界条件 (23) 来确定. 界面连续条件为

$$\left. \begin{aligned} U_r^f(a) &= U_r^g(a) \\ U_\theta^f(a) &= U_\theta^g(a) \\ \sigma_{rr}^f(a) &= \sigma_{rr}^g(a) \\ \sigma_{r\theta}^f(a) &= \sigma_{r\theta}^g(a) \\ U_r^m(b) - U_r^g(b) &= \alpha \sigma_{rr}^m(b) \\ U_\theta^m(b) - U_\theta^g(b) &= \beta \sigma_{r\theta}^m(b) \\ \sigma_{rr}^m(b) &= \sigma_{rr}^g(b) \\ \sigma_{r\theta}^m(b) &= \sigma_{r\theta}^g(b) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

其中  $\alpha, \beta$  已在 (7) 式中定义. 引入  $\bar{A}_1 = A_1, \bar{A}_2 = a^2 A_2, \bar{B}_1 = B_1, \bar{B}_2 = b^2 B_2, \bar{B}_3 = B_3/b^5, \bar{B}_4 = B_4/b^3, \bar{D}_3 = D_3/b^5, \bar{D}_4 = D_4/b^3, c = a/b$  和界面缺陷参数  $\alpha_1 = 2\alpha\mu_m/b, \beta_1 = 2\beta\mu_m/b$ , 将方程 (25)~(27) 代入 (28) 就可以将界面条件写成矩阵形式

$$E_{4 \times 4} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \\ \bar{B}_4 \end{bmatrix} = F_{4 \times 2} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

其中

$$E_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & -6\nu_g c^2 / (1 - 2\nu_g) & 3/c^5 & (5 - 4\nu_g) / [(1 - 2\nu_g)c^3] \\ 1 & -(7 - 4\nu_g)c^2 / (1 - 2\nu_g) & -2/c^5 & 2/c^3 \\ 1 & 3\nu_g c^3 / (1 - 2\nu_g) & -12/c^5 & -2(5 - \nu_g) / [(1 - 2\nu_g)c^3] \\ 1 & -(7 + 2\nu_g)c^2 / (1 - 2\nu_g) & 8/c^5 & 2(1 + \nu_g) / [(1 - 2\nu_g)c^3] \end{bmatrix}$$

和

$$F_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -6\nu_f / (1 - 2\nu_f) \\ 1 & -(7 - 4\nu_f) / (1 - 2\nu_f) \\ \mu_f / \mu_g & 3\nu_f \mu_f / [(1 - 2\nu_f)\mu_g] \\ \mu_f / \mu_g & -(7 + 2\nu_f)\mu_f / [(1 - 2\nu_f)\mu_g] \end{bmatrix}$$

$$G_{2 \times 4} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \\ \bar{B}_4 \end{bmatrix} = P_{2 \times 2} \begin{bmatrix} \bar{D}_3 \\ \bar{D}_4 \end{bmatrix} + N_{2 \times 1} D_1 \quad (30)$$

其中

$$G_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & -(7 + 2\nu_g) / (1 - 2\nu_g) & 8 & 2(1 + \nu_g) / (1 - 2\nu_g) \\ -1 & (7 - 4\nu_g) / (1 - 2\nu_g) & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8\mu_m / \mu_g & 2(1 + \nu_m)\mu_m / [(1 - 2\nu_m)\mu_g] \\ 8\beta_1 + 2 & -2(1 + \nu_m)\beta_1 / (1 - 2\nu_m) - 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \mu_m / \mu_g \\ \beta_1 - 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{2 \times 4} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \\ \bar{B}_4 \end{bmatrix} = L_{2 \times 2} \begin{bmatrix} \bar{D}_3 \\ \bar{D}_4 \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中

$$K_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 2(7 + 5\nu_g)/(1 - 2\nu_g) & -40 \\ \alpha_1 - \beta_1 & 6\nu_g(\beta_1 - 1) - (7 - 4\nu_g)(\alpha_1 - 1)/(1 - 2\nu_g) & 5 - 3\beta_1 - 2\alpha_1 \\ & -24/(1 - 2\nu_g) \\ & (5 - 4\nu_g)(1 - \beta_1)/(1 - 2\nu_g) + 2(\alpha_1 - 1) \end{bmatrix}$$

$$L_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -40\mu_m/\mu_g \\ 3(4\alpha_1 + 1)(1 - \beta_1) + 2(4\beta_1 + 1)(1 - \alpha_1) \\ & -24\mu_m/[(1 - 2\nu_m)\mu_g] \\ [2\alpha_1(5 - \nu_m) + 5 - 4\nu_m](1 - \beta_1)/(1 - 2\nu_m) + 2[(1 + \nu_m)\beta_1/(1 - 2\nu_m) - 1](1 - \alpha_1) \end{bmatrix}$$

利用边界条件 (23), 在  $r \rightarrow \infty$  的时候

$$2\mu_m D_1 = \sigma_0, \quad D_1 = \sigma_0/2\mu_m \quad (32)$$

由方程 (29)~(32) 一起, 常数可以确定如下

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = R_{2 \times 2}^{-1} N_{2 \times 1} D_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \sigma_0/2\mu_m \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \\ \bar{B}_4 \end{bmatrix} = E_{4 \times 4}^{-1} F_{4 \times 2} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \sigma_0/2\mu_m \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_3 \\ \bar{D}_4 \end{bmatrix} = L_{2 \times 2}^{-1} K_{2 \times 4} E_{4 \times 4}^{-1} F_{4 \times 2} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \sigma_0/2\mu_m \quad (35)$$

其中

$$R_{2 \times 2} = (G_{2 \times 4} - P_{2 \times 2} L_{2 \times 2}^{-1} K_{2 \times 4}) E_{4 \times 4}^{-1} F_{4 \times 2} \quad (36)$$

所有常数与远处应力  $\sigma_0$  有关, 现在计算每一相中的平均应力, 可以用下列积分来计算

$$\bar{\sigma}_{ij}^l = \frac{3}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{ij}^l r^2 dr, \quad l = f, g, m \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} R_1 &= 0, \quad R_2 = a, \quad \text{对于 } l = f \\ R_1 &= a, \quad R_2 = b, \quad \text{对于 } l = g \\ R_1 &= b, \quad R_2 = \infty, \quad \text{对于 } l = m \end{aligned}$$

经过复杂的数学运算后,可以得到在直角坐标系下每一相的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}^f &= \frac{\mu_f}{\mu_m} \left[ a_1 - \frac{21}{5(1-2\nu_f)} a_2 \right] \sigma_0 = W_f \sigma_0 \\ \bar{\sigma}_{xx}^g &= \frac{\mu_g}{\mu_m} \left[ b_1 - \frac{21}{5(1-2\nu_g)} b_2 \frac{1-c^5}{1-c^3} \right] = W_g \sigma_0 \\ \bar{\sigma}_{xx}^m &= \sigma_0 \\ \bar{\sigma}_{yy}^l &= -\bar{\sigma}_{xx}^l, \quad l = f, g, m \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

其他应力分量均为零.

注意到

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \quad (39)$$

从式 (20) 可以得到

$$\sigma_{xx}^m = (c_m + c_f W_f + c_g W_g)^{-1} \sigma_0 \quad (40)$$

以  $\sigma_{xx}^m$  代替上述问题中的外力  $\sigma_0$ , 那么用同样的方法可以得到带界相的颗粒复合材料中的近似应力场.

现在考虑非理想界面的平均应变  $\varepsilon_{ij}^t$ , 利用积分 (11) 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^t &= c_{fg}(2\Delta U_r + 3\Delta U_\theta)/5b = c_{fg} W_t \sigma_0, \quad c_{fg} = c_f + c_g \\ \varepsilon_{yy}^t &= -\varepsilon_{xx}^t, \quad \text{others} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

其中,  $\Delta U_i = U_i^m - U_i^g$ , ( $i = r, \theta$ ) 是在  $r = b$  处的位移跳跃.

## 2.2 带界相圆柱纤维增强复合材料的应力场

现在研究带界相的纤维增强复合材料. 先考虑单个带界相纤维在无限大基体中的问题, 该复合材料在无限远处受纯剪切载荷作用

$$\sigma_{xx} |_{r \rightarrow \infty} = \sigma_0, \quad \sigma_{yy} |_{r \rightarrow \infty} = -\sigma_0, \quad \sigma_{zz} |_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (42)$$

采用文献 [13] 中的位移解形式

$$\left. \begin{aligned} u_r^l &= U_r^l \cos 2\theta \\ u_\theta^l &= U_\theta^l \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad l = f, g, m \quad (43)$$

在纤维, 界相和基体中的位移为

$$\left. \begin{aligned} u_r^f &= \frac{b\sigma_0}{4\mu_f} \left[ a_1(\eta_f - 3) \left(\frac{r}{b}\right)^3 + d_1 \frac{r}{b} \right] \cos 2\theta \\ u_\theta^f &= \frac{b\sigma_0}{4\mu_f} \left[ a_1(\eta_f + 3) \left(\frac{r}{b}\right)^3 + d_1 \frac{r}{b} \right] \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq r \leq a \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^g &= \frac{b\sigma_0}{4\mu_g} \left[ a_2(\eta_g - 3) \left(\frac{r}{b}\right)^3 + d_2 \frac{4}{b} + c_2(\eta_g + 1) \frac{b}{r} + b_2 \left(\frac{b}{r}\right)^3 \right] \cos 2\theta \\ u_\theta^g &= \frac{b\sigma_0}{4\mu_g} \left[ a_2(\eta_g + 3) \left(\frac{r}{b}\right)^3 - d_2 \frac{r}{b} - c_2(\eta_g - 1) \frac{b}{r} + b_2 \left(\frac{b}{r}\right)^3 \right] \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad a \leq r \leq b \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^m &= \frac{b\sigma_0}{4\mu_m} \left[ 2\frac{r}{b} + a_3(\eta_m + 1)\frac{b}{r} + c_3\left(\frac{b}{r}\right)^3 \right] \cos 2\theta, \\ u_\theta^m &= \frac{b\sigma_0}{4\mu_m} \left[ -2\frac{r}{b} - a_3(\eta_m - 1)\frac{b}{r} + c_3\left(\frac{b}{r}\right)^3 \right] \sin 2\theta, \end{aligned} \right\} r \geq b \quad (46)$$

对于三种材料均有

$$u_z^l = 0, \quad l = f, g, m$$

其中  $a$  和  $b$  为纤维和界相外径,  $a_1, d_1, a_2, d_2, c_2, b_2, a_3$  为待定常数,  $\mu_l$  为各相的剪切模量,  $r, \theta, z$  为一般的圆柱坐标, 此外还有

$$\eta_l = 1 + 2\mu_l^{23}/K_l^{23}, \quad l = f, g, m$$

其中  $\mu_l^{23}$  是横向剪切模量, 是  $K_l^{23}$  平面应变体积模量<sup>[14]</sup>.

界面连续条件与式 (28) 相同, 也能写成矩阵形式, 由式 (28) 的第一个条件可得:

$$E_{4 \times 4} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} + F_{4 \times 2} \begin{bmatrix} a_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (47)$$

其中

$$E_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 1/c^6 & 1/c^4 & 0 \\ 0 & 3/c^4 & 4/c^2 & -1 \\ \mu_f(\eta_g - 3) - \mu_g(\eta_f - 3) & (\mu_f + \mu_g\eta_f)/c^6 & [\mu_f(\eta_g + 1) + \mu_g(\eta_f + 1)]/c^4 & (\mu_f - \mu_g)/c^2 \\ \mu_f(\eta_g + 3) - \mu_g(\eta_f + 3) & (\mu_f + \mu_g\eta_f)/c^6 & -[\mu_f(\eta_g - 1) - \mu_g(\eta_f - 1)]/c^4 & -(\mu_f - \mu_g)/c^2 \end{bmatrix}$$

$$F_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中  $c = a/b$ .

从式 (28) 的最后四个方程可以得到

$$K_{2 \times 2} \begin{bmatrix} a_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = Q_{2 \times 4} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$2N_{2 \times 2} + U_{2 \times 2} \begin{bmatrix} a_3 \\ c_3 \end{bmatrix} + V_{2 \times 4} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (49)$$



其中

$$K_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 + \eta_m(\alpha_1 - \beta_1) + 3\alpha_1 + \beta_1 - 12\alpha_1\beta_1 & 1 + 2(\alpha_1 + \beta_1) - 12\alpha_1\beta_1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \mu_m[-3(\alpha_1 - \beta_1) & \frac{\mu_m}{\mu_g}(1 - \alpha_1 - \beta_1) & \mu_m[\eta_g(\alpha_1 - \beta_1) & \frac{\mu_m}{\mu_g}(\alpha_1 - \beta_1)] \\ +\eta_g(1 - \alpha_1 - \beta_1)]/\mu_g & & +1 - \alpha_1 - \beta_1)/\mu_g & \end{bmatrix}$$

$$N_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 2\beta_1 \end{bmatrix}, \quad U_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \eta_m - 1 - 4\beta & -(1 + 6\beta_1) \end{bmatrix}$$

$$V_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 & -1 \\ \mu_m(\eta_g + 3)/\mu_g & \mu_m/\mu_g & \mu_m(1 - \eta_g)/\mu_g & -\mu_m/\mu_g \end{bmatrix}$$

其中  $\alpha_1 = \mu_m \alpha / b$ ,  $\beta = \mu_m \beta / b$  是界面缺陷参数, 待定常数的解可以写为

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = 2R_{2 \times 2}^{-1} N_{2 \times 1} \quad (50a)$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = -E_{4 \times 4}^{-1} F_{4 \times 2} \begin{bmatrix} a_1 \\ d_1 \end{bmatrix}, \quad (50b)$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ d_3 \end{bmatrix} = K_{2 \times 2}^{-1} Q_{2 \times 4} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}. \quad (50c)$$

其中

$$R_{2 \times 2} = 2(V_{2 \times 4} + U_{2 \times 2} K_{2 \times 2}^{-1} Q_{2 \times 4}) E_{4 \times 4}^{-1} F_{4 \times 2}$$

与前面相同可以得到每一相在直角坐标系下的平均应力

$$\bar{\sigma}_{xx}^f = \frac{1}{2}(d_1 - 3a_1 c^2) \sigma_0 = W_f \sigma_0 \quad (51a)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^g = \frac{1}{2} \left( d_2 - 3a_2 \frac{1 - c^4}{1 - c^2} \right) \sigma_0 = W_g \sigma_0 \quad (51b)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^m = \sigma_0 \quad (51c)$$

$$\bar{\sigma}_{yy}^l = -\bar{\sigma}_{xx}^l, \quad l = f, g, m \quad (51d)$$

其他应力分量均为零. 利用式 (22), 并注意到

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \quad (52)$$

就可以得到

$$\sigma_{xx}^m = (c_m + c_f W_f + c_g W_g)^{-1} \sigma_0 \quad (53)$$

在上述问题中用  $\pm\sigma_0 = \pm\sigma_{xx}^m$  来代替, 用同样的方法可以得到带界相纤维增强复合材料中的近似应力场.

应用积分 (11b), 可以得到非理想界面的平均应变  $\bar{\varepsilon}_{ij}^t$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^t &= c_{fg}(\Delta U_r - \Delta U_\theta)/2b = c_{fg}W_i\sigma_0, & c_{fg} &= c_f + c_g \\ \bar{\varepsilon}_{yy}^t &= -\bar{\varepsilon}_{xx}^t, & \text{others} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

其中  $\Delta U_i = U_i^m - U_i^g$ , ( $i = r, \theta$ ) 是在  $r = b$  处的位移跳跃.

### 3 数值结果和讨论

为了说明非理想界面对带界相复合材料的影响, 计算球形颗粒和圆形纤维增强的二种复合材料的情况, 增强相材料为 SiC, 界相为碳, 基体相为钛铝合金. 各相的材料常数为<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} \mu_f &= 172.0 \text{ GPa}, & \nu_f &= 0.253, & c_f &= 0.4 \\ \mu_g &= 14.34 \text{ GPa}, & \nu_g &= 0.2, & c_g &= 0.01 \\ \mu_m &= 37.10 \text{ GPa}, & \nu_m &= 0.2, & c_m &= 0.59 \end{aligned}$$

对于颗粒  $a/b = 0.9918$ , 对于纤维  $a/b = 0.9877$ .

图 1, 图 2 给出了沿界相和基体的界面上应力的分布, 在颗粒复合材料中, 当界面缺陷参数  $\alpha_1$  和  $\beta_1$  增加时, 应力  $\sigma_{rr}$  和  $\sigma_{\theta\theta}$  的幅值增加, 而  $\sigma_{r\theta}$  的幅值减小. 这表明法向位移跳跃的变化变大, 切向位移跳跃变化较小, 因为法向界面位移跳跃是沿界相和基体的界面成波形变化, 大于界相厚度的负的位移跳跃意味着颗粒与基体材料互相侵入, 这是与实际情况不符的, 为了克服这种不正确现象, 应当采用拉和压不相同的法向界面缺陷参数. 但是, 对于带界相的纤维增强复合材料, 当界面缺陷参数  $\alpha_1$  和  $\beta_1$  增加时,  $\sigma_{rr}$  和  $\sigma_{r\theta}$  的幅值均减小, 而  $\sigma_{\theta\theta}$  的幅值增加.

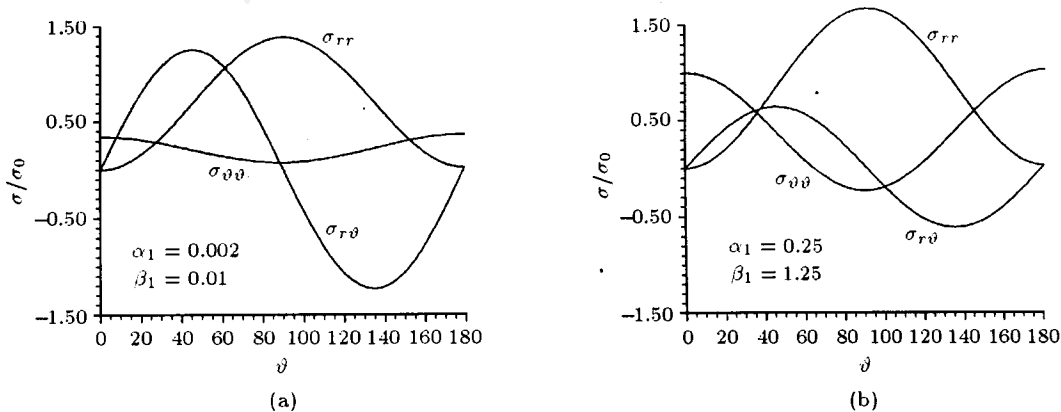


图 1 在 XY 平面剪切载荷下应力沿界相和基体之间的界面上的变化 (颗粒复合材料)  
Fig.1 Stress distributions along the interface between coating and matrix for the shear loading in XY plane (particle-reinforced composite)

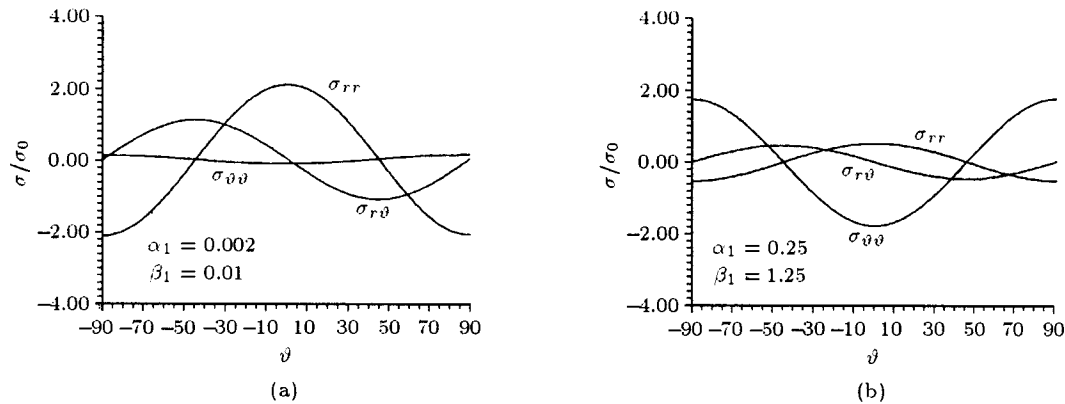


图 2 在  $XY$  平面剪切载荷下应力沿界面和基体之间的界面上的变化 (纤维复合材料)

Fig.2 Stress distributions along the interface between coating and matrix for the shear loading in  $XY$  plane (fiber-reinforced composite)

这表明法向和切向位移跳跃随界面缺陷参数增加而减小, 因此, 对纤维增强复合材料, 本模型合理地估计了非理想界面复合材料的性能。

### 参 考 文 献

- 1 Walpole LJ. A coated inclusion in an elastic medium. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1978, 83: 495~506
- 2 Benveniste Y, Dvorak GJ, Chen T. Stress fields in composite coated inclusions. *Mech Mater*, 1989, 7: 305~317
- 3 Nemat-Nasser S, Hori M. *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous material*. Elsevier, 1993
- 4 Nemat-Nasser S, Yu N, Hori M. Bound and estimates of overall moduli of composites with periodic microstructure. *Mech Mater*, 1993, 15: 103~121
- 5 Wu Yongli, Dong Zhifa. Three-dimensional finite element analysis of composites with coated spherical inclusions. *Mater Sci & Engng A*, 1995, 203: 314~323
- 6 Dong Zifang, Wu Yongli. Micromechanical analysis of particulate-reinforced composites and their failure mechanics. *Journal of Material Science*, 1996, 31: 4401~4405
- 7 Benveniste Y. On the effect of debonding on the overall behavior of composite materials. *Mech Mater*, 1984, 3: 349~368
- 8 Benveniste Y. The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mech Mater*, 1985, 4: 197~208
- 9 Achenbach JD, Zhu H. Effect of interfacial zone mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J Mech Phys Solids*, 1989, 37: 381~393
- 10 Qu J. Eshelby tensor for an elastic inclusion with a slightly weakened interfaces. *J Appl Mech*, 1993, 60: 1048~1050
- 11 Hashin Z. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. *J Mech Phys Solids*, 1991, 39: 745~762
- 12 Qu J. Effects of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials. *Mech Mater*, 1993, 14: 269~281
- 13 Christensen RM, Lo KH. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J Mech Phys Solids*, 1979, 27: 315~329
- 14 Christensen RM, Lo KH. Erratum: Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J Mech Phys Solids*, 1986, 34: 639

## THE EFFECT OF IMPERFECT INTERFACE ON THE STRESS FIELD OF THREE-PHASE COMPOSITES<sup>1)</sup>

Wu Yongli

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

**Abstract** A micromechanical model is presented for the prediction of the stress field in the three-phase composite with imperfect interface between the interphase and the matrix. The method is based on the concept of the average stress in matrix of Mori and Tanaka. The imperfect interface is modeled by a linear spring-layer of vanishing thickness. Based on a reasonable assumption the solution for calculating stress field of the particle and fiber reinforced composites with interphase is obtained. Those found when the coated inclusion is embedded in unbounded matrix medium subjected to the average matrix stresses at infinity approximate the local stress fields in a coated inclusion. The advantage of this approach is that the local fields in the coating and inclusion, and in the adjacent matrix can be evaluated by using the solution of a single coated inclusion in an infinite matrix and inclusion interaction is take into account through the yet unknown average matrix stress. The numerical examples of three-phase composite under shear loading are given. The numerical results show that imperfect interface has the larger effect on the stresses of the composites.

**Key words** Composite, micromechanics, imperfect interface, interphase

---

Received 27 April 1999, revised 13 July 1999.

<sup>1)</sup> The project supported by the National Natural Science Foundation of China (59872046).