

三维简化 Janbu 法分析边坡稳定性的扩展*

张均锋

(中国科学院力学研究所 北京 100080)

摘要 对三维简化的 Janbu 法进行了扩展,使得离散后在同一行上的各条块在水平横向的安全系数相等以及在同一列上的条块在水平纵向的安全系数相等,得到不同行(列)的安全系数,最后通过各条块底滑面的几何特性与受力分析给出其独立的安全系数以及各条块潜在的滑动方向。该方法拓展了传统极限平衡方法只给出坡体总体安全系数的思路,可对坡体局部稳定性和潜在滑动方向进行判定。该方法可适用于任意形状的滑面,还可分析包括考虑孔隙水压力、地质体分层、上覆载荷以及地震力等其他形式的外载。

关键词 岩土力学, 三维边坡分析, 稳定性分析, 极限平衡

分类号 TU 413.6⁺2

文献标识码 A

文章编号 1000-6915(2004)17-2876-06

EXTENSION OF THREE-DIMENSIONAL SIMPLIFIED JANBU'S METHOD FOR SLOPE STABILITY ANALYSIS

Zhang Junfeng

(Institute of Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080 China)

Abstract Two-dimensional Janbu's generalized procedure of slices is one of the rigorous methods for slope stability analysis. However, twice iterations must be carried out and the convergency problem may often be encountered in the computational process. Hence, a simplified Janbu's method is developed in which the interslice shear forces are assumed to be zero and only once iteration is needed. Generally, the result obtained by simplified Janbu's method is very close to that given by complete Janbu's method, therefore the former is adopted in a number of commercial programs. It is natural to extend the 2D method to conduct 3D slope stability analysis.

Compared with two-dimensional slope stability analysis, it is more difficult to conduct three-dimensional analysis, for the geometric shape of the sliding body may be asymmetric and the slope may also possess complicated slip surface, irregular boundaries, and multiple geological layers.

The method proposed in this paper extends the simplified Janbu's method for three-dimensional slope stability analysis. By setting the safety factors to be equal for discretized blocks on the same row/column and combining the geometric feature of the bottom slip surface, the local safety factor and potential sliding direction for each block can be obtained. This method extends traditional limit-equilibrium method in which only the total safety factor for a slope is given, thus it may be used to evaluate local stability and sliding direction for a slope. This proposed method may be applied to various types of potential slip surfaces, complicated geological boundaries and stratifications, water pressure, and earthquake loading.

Key words rock and soil mechanics, 3D slope analysis, stability analysis, limit equilibrium

2004年4月1日收到初稿,2004年5月18日收到修改稿。

* 国家自然科学基金(10372104)、国家重点基础研究发展规划(973)项目(2002CB412706)与中国科学院创新方向性重点项目(KJCX2-SW-L1)资助课题。

作者 张均锋 简介:男,37岁,博士,1987年毕业于复旦大学应用力学系,现任高级工程师,主要从事滑坡机理和砂土液化方面的研究工作,Email: zhangjf@imech.ac.cn.

1 引言

边坡稳定分析中的二维 Janbu 条分法^[1, 2]属于严格的计算方法之一, 并且已被多种商用程序所采用。但由于其计算过程需两重迭代且有时收敛性差等原因, 通常人们在使用该方法时进行一些简化: 假定各条块间的竖向剪切力为零。这样只需一重迭代即可得到坡体的安全系数, 且与完全的 Janbu 法得到的安全系数相差不大。因此更多的商用程序中采用简化的 Janbu 法。

由于坡体的滑面、边界、分层等较复杂的地质条件, 特别是几何形状的不对称性, 故三维边坡稳定性的分析要比二维复杂得多。人们很自然希望将较为成熟的二维分析方法在三维上进行拓展。几个经典的方法如 Bishop 法^[3]、Janbu 法^[1, 2]、Spencer 法^[4], 都是通过不同程度的简化扩展到了三维边坡稳定性分析中。其中文^[5, 6]的方法是三维简化的 Bishop 法, 文^[7~9]的方法是三维简化的 Spencer 法, 文^[10]综合论述了三维简化 Bishop 法、Janbu 法和 Spencer 法。国内学者也进行了类似的工作, 如: 文^[11, 12]采用的是一种简化的 Janbu 法。总的来说, 各种简化的三维边坡稳定分析方法给出的结果基本满足要求, 文^[13]对几种商用程序中采用的简化方法进行了比较。

本文的方法就是对三维简化 Janbu 法作进一步的扩展。考虑坡体的边界效应, 对离散后的各条块, 令其同一行上在水平横向的安全系数相同, 或同一列上的水平纵向的安全系数相同, 最后根据底滑面的几何特性和受力分析确定各条块独立的安全系数。

2 三维简化 Janbu 法的扩展

2.1 离散化与基本假定

整个边坡被离散为垂直的条块, 各条块的受力情况见图 1。图中上标 i 和 j 分别表示第 i 行和第 j 列; 下标 x, y 和 z 代表相应的坐标方向; 下标 xz 和 yz 分别表示平行于 $x-z$ 和 $y-z$ 平面; $W^{i,j}$ 为编号 (i, j) 条块的重量; $P^{i,j}$ 为条块上表面的载荷, $N^{i,j}$ 为底滑面的法向力; $S_{xz}^{i,j}$ 和 $S_{yz}^{i,j}$ 为底滑面上的剪力在平行于 $x-z$ 和 $y-z$ 平面上的分量; $E_x^{i,j}$ 和 $E_y^{i,j}$ 为条块侧面上的水平推力; $H_x^{i,j}, H_y^{i,j}, T_x^{i,j}$ 和 $T_y^{i,j}$ 分

别为侧面上的垂向和水平方向的剪力; r_u 为孔隙系数; $\alpha_{xz}^{i,j}$ 和 $\alpha_{yz}^{i,j}$ 为底滑面与 x, y 轴的夹角; $\Delta x, \Delta y$ 为条块在 x, y 方向的宽度。

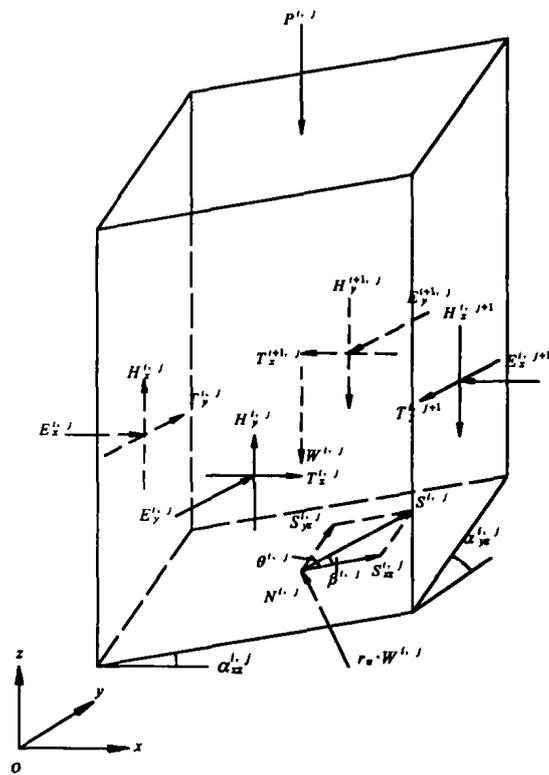


图 1 作用于条块上的力
Fig.1 Schematic diagram of the forces on a slice

根据简化 Janbu 法的要求, 为使问题由静不定变为静定可解, 作如下假设:

- (1) 条块底滑面法向由拟合的平面法向替代, 滑面上的力作用点为底滑面的几何中心;
- (2) 各条块 4 个垂直侧面上的横向、竖向剪力都为零, 即 $H_x^{i,j}, H_y^{i,j}, T_x^{i,j}$ 和 $T_y^{i,j}$ 为零;
- (3) 边界上的水平推力已知。

2.2 三维简化 Janbu 法扩展的原理

根据以上受力分析假设, 对每一条块, 3 个方向的力平衡方程为

$$S_{xz}^{i,j} \cos \alpha_{xz}^{i,j} + (W^{i,j} + r_u W^{i,j}) n_x^{i,j} - K_x W^{i,j} + E_x^{i,j} - E_x^{i+1,j} = 0 \quad (1)$$

$$S_{yz}^{i,j} \cos \alpha_{yz}^{i,j} + (N^{i,j} + r_u W^{i,j}) n_y^{i,j} - K_y W^{i,j} + E_y^{i,j} - E_y^{i,j+1} = 0 \quad (2)$$

$$S_{xz}^{i,j} \sin \alpha_{xz}^{i,j} + S_{yz}^{i,j} \sin \alpha_{yz}^{i,j} + (N^{i,j} + r_u W^{i,j}) n_z^{i,j} - W^{i,j} - P^{i,j} = 0 \quad (3)$$

式中: $n_x^{i,j}, n_y^{i,j}, n_z^{i,j}$ 分别为底滑面的单位法向矢量分量; K_x, K_y 为地震力系数。

根据极限平衡理论, 底滑面上的抗剪力为

$$S_r^{i,j} = c^{i,j} A^{i,j} + N^{i,j} \tan \varphi^{i,j} \quad (4)$$

式中： $c^{i,j}$ 、 $\varphi^{i,j}$ 和 $A^{i,j}$ 分别为第 (i,j) 条块底滑面的粘聚力、摩擦角和面积。滑体在 x,y 方向的安全系数定义与文[6]中的定义一样：

$$\left. \begin{aligned} F_x^{i,j} &= \frac{S_x^{i,j}}{S_{xz}^{i,j}} \\ F_y^{i,j} &= \frac{S_y^{i,j}}{S_{yz}^{i,j}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由式(3)，底滑面上的法向力为

$$N^{i,j} = [(W^{i,j} + P^{i,j} - n_z^{i,j} r_u W^{i,j}) - c^{i,j} A^{i,j} + (\frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}} + \frac{\sin \alpha_{yz}^{i,j}}{F_y^{i,j}})] / [n_z^{i,j} + \tan \varphi^{i,j} (\frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}} + \frac{\sin \alpha_{yz}^{i,j}}{F_y^{i,j}})] \quad (6)$$

由式(6)结合式(4)，(5)，得到 $S_{xz}^{i,j}$ 与 $S_{yz}^{i,j}$ 为

$$S_x^{i,j} = \{ \frac{1}{F_x^{i,j}} [n_z^{i,j} C^{i,j} A^{i,j} + \tan \varphi^{i,j} (W^{i,j} + P^{i,j} - n_z^{i,j} r_u W^{i,j})] \} / [n_z^{i,j} + \tan \varphi^{i,j} (\frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}} + \frac{\sin \alpha_{yz}^{i,j}}{F_y^{i,j}})] \quad (7)$$

$$S_y^{i,j} = \{ \frac{1}{F_y^{i,j}} [n_z^{i,j} C^{i,j} A^{i,j} + \tan \varphi^{i,j} (W^{i,j} + P^{i,j} - n_z^{i,j} r_u W^{i,j})] \} / [n_z^{i,j} + \tan \varphi^{i,j} (\frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}} + \frac{\sin \alpha_{yz}^{i,j}}{F_y^{i,j}})] \quad (8)$$

因此，可知底滑面上达到抗剪强度的抗剪力为

$$S_j^{i,j} = [n_z^{i,j} C^{i,j} A^{i,j} + \tan \varphi^{i,j} (W^{i,j} + P^{i,j} + \Delta H_x^{i,j} + \Delta H_y^{i,j} - n_z^{i,j} r_u W^{i,j})] / [n_z^{i,j} + \tan \varphi^{i,j} (\frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}} + \frac{\sin \alpha_{yz}^{i,j}}{F_y^{i,j}})] \quad (9)$$

由式(1)，(2)以及关系式 $\Delta E_x^{i,j} = E_x^{i,j+1} - E_x^{i,j}$ 和 $\Delta E_y^{i,j} = E_y^{i,j+1} - E_y^{i,j}$ 得

$$\Delta E_x^{i,j} = S_j^{i,j} \left[\frac{\cos \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}} - \frac{n_x^{i,j}}{n_z^{i,j}} (\frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}} + \frac{\sin \alpha_{yz}^{i,j}}{F_y^{i,j}}) \right] + \frac{n_x^{i,j}}{n_z^{i,j}} (W^{i,j} + P^{i,j}) - K_{\alpha} W^{i,j} \quad (10)$$

$$\Delta E_y^{i,j} = S_j^{i,j} \left[\frac{\cos \alpha_{yz}^{i,j}}{F_y^{i,j}} - \frac{n_y^{i,j}}{n_z^{i,j}} (\frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}} + \frac{\sin \alpha_{yz}^{i,j}}{F_y^{i,j}}) \right] + \frac{n_y^{i,j}}{n_z^{i,j}} (W^{i,j} + P^{i,j}) - K_{\beta} W^{i,j} \quad (11)$$

对位于同一行上的每一条块，令 $F_x^{i,j}$ 相等，利

用坡体 x 方向的力边界条件：

$$\sum_j \Delta E_x^{i,j} = E_r^i - E_l^i \quad j=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

式中： E_r^i 和 E_l^i 分别为第 i 行右、左端边界上的水平推力。将式(10)代入式(12)，得到 x 方向的安全系数为

$$F_x^{i,j} = \sum_j [S_r^{i,j} (\frac{n_x^{i,j}}{n_z^{i,j}} \sin \alpha_{xz}^{i,j} - \cos \alpha_{xz}^{i,j})] / \{ E_r^i - E_l^i - \sum_j K_{\alpha} W^{i,j} + \sum_i [\frac{n_y^{i,j}}{n_z^{i,j}} (W^{i,j} + P^{i,j} - S_r^{i,j} \frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}})] \} \quad (13)$$

同样，对于同一列上的每一条块，令 $F_y^{i,j}$ 相等，利用坡体 y 方向的力边界条件，得 y 方向的安全系数为

$$F_y^{i,j} = \{ \sum_i [S_r^{i,j} (\frac{n_y^{i,j}}{n_z^{i,j}} \sin \alpha_{yz}^{i,j} - \cos \alpha_{yz}^{i,j})] \} / \{ E_b^i - E_u^i - \sum_j K_{\beta} W^{i,j} + \sum_i [\frac{n_x^{i,j}}{n_z^{i,j}} (W^{i,j} + P^{i,j} - S_r^{i,j} \frac{\sin \alpha_{xz}^{i,j}}{F_x^{i,j}})] \} \quad (14)$$

当 $F_x^{i,j}$ 、 $F_y^{i,j}$ 求出后，由式(7)，(8)可分别得到各条块底滑面上的两个剪力 $S_{xz}^{i,j}$ 和 $S_{yz}^{i,j}$ ，那么就可得到底滑面上的总剪力为

$$S_r^{i,j} = \sqrt{(S_{xz}^{i,j})^2 + (S_{yz}^{i,j})^2 + 2 S_{xz}^{i,j} S_{yz}^{i,j} \sin \alpha_{xz}^{i,j} \sin \alpha_{yz}^{i,j}} \quad (15)$$

该条块的安全系数可相应得到为

$$F^{i,j} = \frac{S_r^{i,j}}{S_r^{i,j}} \quad (16)$$

根据底滑面上 $S_{xz}^{i,j}$ 、 $S_{yz}^{i,j}$ 和 $S_r^{i,j}$ 构成的力三角形，得到 $F_x^{i,j}$ 、 $F_y^{i,j}$ 和 $F^{i,j}$ 之间的关系^[6]。由正弦定理，可确定第 (i,j) 条块的滑动方向为

$$\sin \beta^{i,j} = \frac{F^{i,j}}{F_y^{i,j}} \sin \theta^{i,j} \quad (17)$$

式中： $\theta^{i,j}$ 为 $S_{xz}^{i,j}$ 与 $S_r^{i,j}$ 之间的夹角(由底滑面的几何关系确定)。

至此，每一条块的安全系数和滑动方向都已确定，这样就可判断坡体最容易滑动的位置。将坡体作为整体，与传统的二维、三维分析一样，可给出整个坡体的安全系数为

$$F = \frac{\sum_i \sum_j S_r^{i,j}}{\sum_i \sum_j S_r^{i,j}} \quad (18)$$

3 程序设计与实现

该方法的计算步骤与已有简化三维 Janbu 法一致,只是在边界条件的使用时,已有三维简化 Janbu 法分别利用坡体左、右、前、后边界上的水平推力之和,而该方法则利用各行左、右条块上的水平推力以及各列前、后条块上的水平推力,因此,对每行、每列的安全系数都要独立计算。各条块的滑动方向是最后计算的,而在文[6]的方法中表明方向的夹角 $\beta^{i,j}$ 也要参与迭代。

在对坡体进行离散化时,将整个潜在滑动区域离散为 $m \times n$ 块垂直的条块,也就是说,用 $m \times n$ 的矩阵覆盖坡体,若该矩阵中有滑体的条块,则令该元素为 1,否则该元素为 0,整个计算过程由该矩阵控制。

该方法不考虑力矩的平衡,整个计算过程只需一重迭代,可以很方便地在 SPREADSHEET 中得到实现。

4 算例

4.1 对称问题

图 2, 3 所示为文[7]中的算例,曾被文[14, 15]引用。该算例是对称问题,滑体上表面为一斜平面,底滑面是椭球面,可用方程表示为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

式中: $y_0 = 36.6$ m 和 $z_0 = 27.4$ m 为椭球体的中心点坐标值; $a = 46$ m 和 $b = 24.4$ m 分别为椭球在 x , y 和 z 方向的半轴长。

表 1 给出了 6 种条件下用本文的方法求得的安全系数以及文[7]中的计算结果,而在文[15]中得到的简单情况下坡体整体的安全系数上限解为 2.262。图 4 为根据式(17)确定的潜在滑动方向(顶视)。由于该问题的对称特征和滑动方向的一致性,计算获得各条块的安全系数与条块所在列的安全系数一致,滑动方向平行于对称面。

为便于同二维 Janbu 法的结果进行比较,表 2 给出了图 2 中各列 A-A, B-B 以及各列间的纵剖面(二维)的安全系数值。

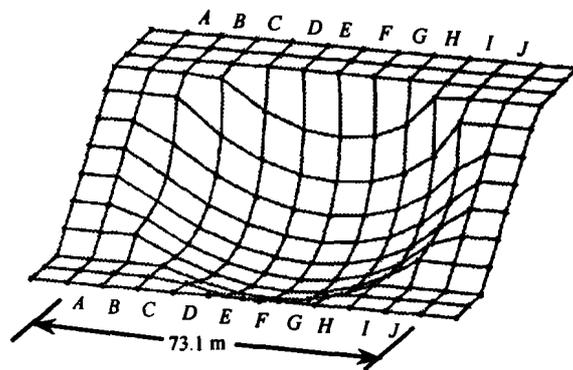


图 2 滑体底滑面 1

Fig.2 Ellipsoidal slip surface of slope 1

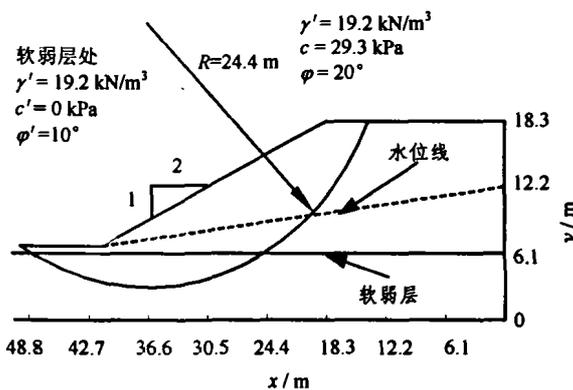


图 3 滑体纵剖面

Fig.3 Longitudinal section of slope 1

表 1 6 种情况下的安全系数

Table 1 Safety factors under six conditions

算例	本文方法	文[7]方法	
简单滑面 坡体	无水压力	2.096	2.122
	孔压系数 $r_u = 0.25$	1.835	1.790
	水位线	1.911	1.831
具有软弱 夹层坡体	无水压力	1.581	1.548
	孔压系数 $r_u = 0.25$	1.370	1.278
	水位线	1.487	1.441

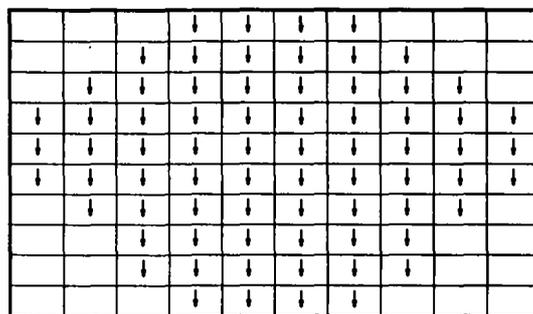


图 4 潜在滑动方向(顶视)

Fig.4 Potential sliding direction on x-y plane view

表2 三维与二维分析的安全系数比较

Table 2 Comparison of safety factors by 3D and 2D analyses

列	方法	
	3DS	2DJ
A-A	3.449	
B-B	2.088	3.279
C-C	2.006	2.152
D-D	2.057	1.979
E-E	2.057	1.941
F-F	2.057	1.934
G-G	2.057	1.941
H-H	2.006	2.152
I-I	2.008	3.279
J-J	3.449	

注：3DS——本文的方法，2DJ——二维完全 Janbu 法。

表3 各条块的安全系数

Table 3 The safety factors of slices

行 i	列 j									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	—	—	—	2.127	2.076	2.118	2.142	2.164	2.161
2	—	—	1.922	1.867	1.783	1.833	1.904	1.952	1.993	2.027
3	—	1.903	1.808	1.854	1.902	1.875	1.919	1.949	1.977	2.000
4	2.225	1.896	1.931	1.922	1.947	1.904	1.939	1.960	1.981	1.997
5	2.247	2.003	2.003	1.975	1.990	1.936	1.965	1.982	1.999	2.010
6	2.395	2.087	2.070	2.028	2.036	1.974	1.999	2.013	2.026	2.034
7	—	2.171	2.140	2.088	2.090	2.019	2.043	2.054	2.065	2.071
8	—	—	2.208	2.146	2.144	2.065	2.087	2.097	2.106	2.110
9	—	—	—	2.201	2.201	2.115	2.136	2.144	2.153	2.155
10	—	—	—	—	—	—	2.188	2.197	2.206	2.209

4.2 不对称问题

与上面的算例类似，该算例中坡体上表面仍然为斜平面(26.5°)，底滑面为椭球面的一半，如图5。椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \quad (20)$$

式中：y₀=9.6 m 和 z₀=31.22 m；椭球体半轴长为 a=65 m, b=55.26 m 及 c=31.22 m。

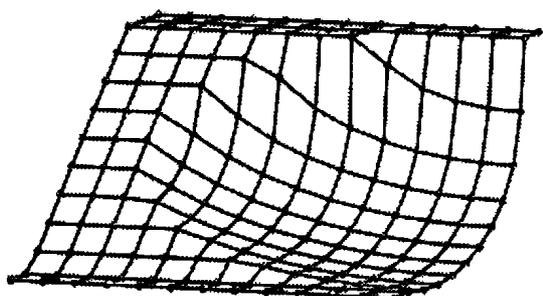


图5 滑体底滑面2

Fig.5 Ellipsoidal slip surface of slope 2

用本文的方法计算获得的坡体总的安全系数为 2.007；当孔压系数取 r_v = 0.25 时安全系数为 1.530。表 3 给出了不考虑孔隙水压力时各条块的安全系数，图 6 表示安全系数的等值线，表 4 为潜在的滑动方向在 x-y 平面上的投影与 x 轴正向之间的夹角，图 7 为坡体潜在的滑动方向示意图(顶视)。

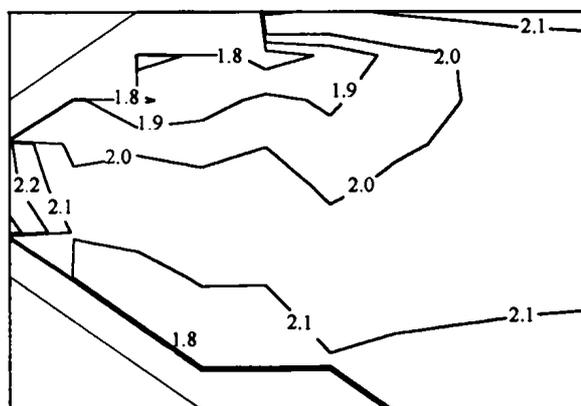


图6 安全系数等值线

Fig.6 Contours of safety factors

表4 滑动方向在 x-y 平面的投影与水平向夹角

Table 4 The angles of x direction and projection of potential slip on x-y plane (°)

行 i	列 j									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	—	—	—	100.7	105.4	108.2	110.0	111.0	111.2
2	—	—	120.3	126.5	120.8	119.3	119.0	118.7	118.6	118.6
3	—	122.5	119.4	118.7	118.7	117.6	117.8	117.9	118.0	118.0
4	122.5	117.4	117.4	117.0	117.1	116.3	116.6	116.8	116.9	116.9
5	119.2	115.6	115.6	115.3	115.5	114.7	115.1	115.2	115.4	115.4
6	117.1	113.5	113.6	113.2	113.4	112.7	113.1	113.3	113.4	113.5
7	—	110.8	110.8	110.5	110.7	110.1	110.4	110.5	110.7	110.7
8	—	—	107.6	107.4	107.5	107.0	107.3	107.4	107.5	107.5
9	—	—	—	103.3	103.1	102.7	102.9	103.0	103.1	103.1
10	—	—	—	—	—	—	93.62	93.58	93.44	93.57

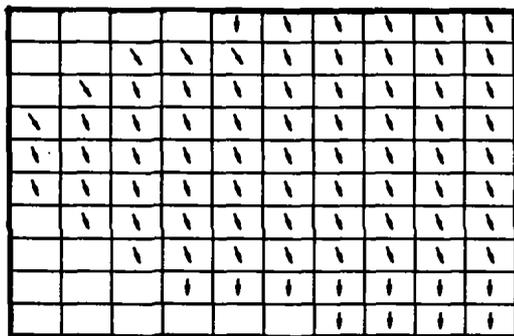


图7 坡体潜在滑动方向(顶视)

Fig.7 Potential sliding direction on x-y plane view

5 结 语

对简化 Janbu 法进行了扩展, 考虑到三维的边界效应, 对离散化后的每一行/列进行分析, 同时考虑了各行/列间的水平推力, 拓展了传统的极限平衡法分析坡体稳定性时只给出一个整体的安全系数的思路, 可对坡体局部稳定性和潜在滑动方向进行判定。在本文的方法中, 对每一条块在相互垂直的两个方向进行分析, 考虑到各条块底滑面上剪力及其分量的关系和底滑面的几何特性, 可以进一步分析得到各条块独立的安全系数与潜在的滑动方向。无论对坡体离散化时几何的处理还是计算安全系数和条间力的迭代, 该方法可统一在程序 MATHCAD 或 SPREADSHEET 中实现。

此外, 通过该方法可以给出各行(横向)、列(纵向)的安全系数, 这样就可以与二维分析的结果进行比较。应注意的是: 二维分析是相应于两行(或列)之间的平面进行的。

参 考 文 献

- 1 Janbu N. Earth pressure and bearing capacity by generalized procedure of slices[A]. In: Glanviller W H ed. Proceedings of the 4th Int. Conf. of Soil Mechanics and Foundation Engineering[C]. London: Butterworths Scientific Publications, 1957, 2: 207~212
- 2 Janbu N. Slope stability computations[A]. In: Hirschfeld R C, Poulos S J ed. Embankment-Dam Engineering, Casagrande Volume[C]. Florida: Krieger Pub. Co., 1973, 47~86
- 3 Bishop A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes[J]. Geotechnique, 1955, 5(1): 7~17
- 4 Spencer E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces[J]. Geotechnique, 1967; 17(1): 11~26
- 5 Hungr O. An extension of Bishop's simplified method of slope stability analysis to three dimensions[J]. Geotechnique, 1987, 37(1): 113~117
- 6 Huang C C, Tsai C C. New method for 3D and asymmetrical slope stability analysis[J]. J. of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(10): 917~927
- 7 Zhang X. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plane view[J]. J. of Geotechnical Engineering, 1988, 114(6): 658~671
- 8 Chen R H, Chameau J L. Three-dimensional limit equilibrium analysis of slope[J]. Geotechnique, 1982, 32(1): 31~40
- 9 Chen Zuyu, Mi Hongliang, Zhang Faming, et al. A simplified method for 3D slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(3): 675~683
- 10 Ugai K, Hosobori K. Extension of simplified Bishop method, simplified Janbu method and spencer method to three-dimensions[A]. In: Proceeding of Japanese Society of Civil Engineers[C]. Tokyo: [s. n.], 1988, 21~26(in Japanese)
- 11 冯树仁, 丰定祥, 葛修润等. 边坡稳定性的三维极限平衡分析方法及应用[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(6): 657~661
- 12 姜清辉, 王笑海, 丰定祥等. 三维边坡稳定性极限平衡分析系统软件 SLOPE^{3D}的设计及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(7): 1121~1125
- 13 Stark T D, Eid H T. Performance of three-dimensional slope stability methods in practice[J]. J. of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1998, 124(11): 1 049~1 060
- 14 Lam L, Fredlund D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30(6): 905~919
- 15 Chen Z, Wang X, Haberfield C, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem, part I: theory and methods[J]. Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, 38(3): 369~378