

黏弹性体界面裂纹的冲击响应¹⁾

魏培君 吴永礼 张双寅

(非线性连续介质力学国家重点实验室, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 研究两半无限大黏弹性体界面 Griffith 裂纹在反平面剪切突加载荷下, 裂纹尖端动应力强度因子的时间响应. 首先, 运用积分变换方法将黏弹性混合边值问题化成变换域上的对偶积分方程. 通过引入裂纹位错密度函数进一步化成 Cauchy 型奇异积分方程. 运用分片连续函数法数值求解奇异积分方程, 得到变换域内的动应力强度因子. 再用 Laplace 积分变换数值反演方法, 将变换域的解反演到时间域内. 最终求得动应力强度因子的时间响应, 并对黏弹性参数的影响进行了分析.

关键词 黏弹性, 界面裂纹, 应力强度因子, 积分逆变换, 奇异积分方程

引 言

有关弹性材料界面裂纹的动态响应已有广泛的研究. Kundu^[1] 用 Betti 互等定理研究了界面裂纹在冲击载荷下的动应力强度因子. Li^[2] 用奇异积分方程方法研究了多层板界面裂纹的动应力强度因子. 王晓东^[3] 进一步将界面裂纹动态响应问题的研究扩展到带裂尖接触区的修正 Griffith 界面裂纹, 通过引入裂纹尖端无摩擦接触区, 消除了界面裂纹的振荡奇性. 关于含裂纹黏弹性材料, Georgiadis^[4,5] 对均匀黏弹性体中有限长中心裂纹和币型裂纹在冲击载荷下的动态响应进行了研究. 而关于不同黏弹性材料界面裂纹的动态响应问题的研究还未见有文章发表. 本文首先运用 Laplace 积分变换方法将黏弹性材料卷积型运动方程变换成变换域上的代数型运动方程, 并进而将黏弹性界面裂纹混合边值问题归结为变换域内的奇异积分方程. 运用 Kurtz^[6] 的分片连续函数法数值求解奇异积分方程, 再利用 Dubner 与 Abate^[7] 和 Crump^[8] 提出的 Laplace 积分变换数值反演方法进行数值反演, 最终得到时间域上的动应力强度因子, 并就黏弹性参数的影响进行了分析.

1 问题的数学描述

考虑图 1 所示二种黏弹性介质的连接界面上存在一个长度为 $2a$ 的 Griffith 裂纹. 取直角坐标系如图 1 所示. 材料密度分别为 ρ_1, ρ_2 , 黏弹性介质取标准线性固体模型, 其剪切模量分别为 $G_1(t), G_2(t)$

$$G_i(t) = \mu_{\infty i} \left[1 + f_i \exp \left(-\frac{t}{\tau_i} \right) \right] \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

其中: $f_i = \frac{\mu_{0i}}{\mu_{\infty i}} - 1$, μ_0, μ_{∞} 分别为材料瞬态和平衡态剪切模量, τ_i 为材料松弛时间. 图 2 表示黏弹性材料参数 f 固定时, 不同松弛时间 τ 对 $G(t)-t$ 曲线的影响.

1998-11-23 收到第一稿, 1999-09-08 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(19772064)和中国科学院科学基金(951-1-201)资助项目.

裂纹面作用反平面剪切冲击载荷 $\tau_0 H(t)$ 时, 问题的初边值条件可写为:

$$\sigma_{yz}(x, 0, t) = \tau_0 H(t), \quad |x| < a \tag{2}$$

$$\sigma_{yz}(x, 0^+, t) = \sigma_{yz}(x, 0^-, t), \quad -\infty \leq x \leq \infty \tag{3}$$

$$w(x, 0^+, t) = w(x, 0^-, t), \quad |x| > a \tag{4}$$

$$w(x, y, t) = 0, \quad x, y \rightarrow \infty \tag{5}$$

$$\sigma_{yz}(x, y, 0) = w(x, y, 0) = \dot{w}_t(x, y, 0) = 0 \tag{6}$$

式中: σ 表示应力, w 表示 z 向位移, $H(t)$ 是 Heaviside 函数.

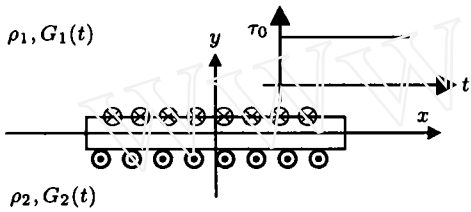


图 1 反平面剪切荷载作用下的黏弹性界面裂纹
Fig.1 Interface crack between two dissimilar viscoelastic bodies under anti-plane sudden load

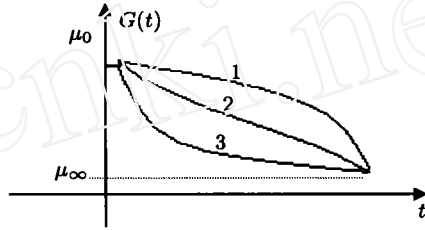


图 2 黏弹性材料松弛曲线
1. 松弛时间很大, 2. 松弛时间适中, 3. 松弛时间很小
Fig.2 Relaxation curve of viscoelastic material
1. Large relaxation time, 2. Moderate relaxation time, 3. Small relaxation time

2 奇异积分方程的导出及数值求解

2.1 关于裂纹张开位移的对偶积分方程

定义

$$w(x, 0^+, t) - w(x, 0^-, t) = \begin{cases} \Delta w(x, t), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \tag{7}$$

位移 $w(x, y, t)$ 满足下列黏弹性卷积型运动方程

$$G_i(t) * \nabla^2 w(x, y, t) = \rho_i \ddot{w}(x, y, t) \tag{8}$$

其中: $*$ 表示 Stieltjes 卷积积分.

对上式中时间 t 作 Laplace 变换, 对坐标 x 作 Fourier 变换, 并利用式 (6) 和 (5) 可解得

$$\tilde{w}(s, y, p) = \begin{cases} a(y) e^{-y\sqrt{K_{T1}^2 + s^2}}, & y > 0 \\ b(y) e^{y\sqrt{K_{T1}^2 + s^2}}, & y < 0 \end{cases} \tag{9}$$

其中: $\tilde{w}(x, y, p) = \{F[L[w(x, y, t)]], t \rightarrow p, x \rightarrow s\}$, $F[]$ 表示 Fourier 变换算子; $L[]$ 表示 Laplace 变换算子. $K_{Ti}^2(p) = \frac{\rho_i p}{G_i(p)}$, $G_i(p) = L[G_i(t)]$.

式 (3) 和式 (7) 可以确定系数

$$a(y) = \frac{\beta}{\beta+1} \Delta \tilde{w}, \quad b(y) = -\frac{1}{\beta-1} \Delta \tilde{w} \quad (10)$$

其中

$$\beta(s, p) = \frac{\bar{G}_2(p) \sqrt{K_{T2}^2 + s^2}}{\bar{G}_1(p) \sqrt{K_{T1}^2 + s^2}} \quad (11)$$

式 (4) 和 (2) 联立构成关于 $\Delta w(x, t)$ 的对偶积分方程

$$\left. \begin{aligned} F^{-1}[\Delta \tilde{w}] &= 0, & |x| > a \\ F^{-1}\left[-pG_1(p) \frac{\beta}{\beta+1} \sqrt{K_{T1}^2 + s^2} \Delta \tilde{w}\right] &= \frac{\tau_0}{p}, & |x| < a \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中: $F^{-1}[\]$ 表示 Fourier 逆变换算子

2.2 关于裂纹位错密度函数的奇异积分方程

定义: 裂纹位错密度函数

$$\Phi(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \Delta w(x, t) \quad (13)$$

显然

$$\int_{-a}^a \Phi(x, t) dx = 0 \quad (14)$$

对 (13) 式两边分别作 Laplace 和 Fourier 积分变换得: $\tilde{\Phi}(s, p) = (is) \Delta \tilde{w}(s, p)$, 代入式 (12) 得

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} pG_1(p) \frac{\beta}{\beta+1} \sqrt{K_{T1}^2 + s^2} \frac{1}{s} \left[\int_{-a}^a \tilde{\Phi}(u, p) e^{isu} du \right] e^{-isx} ds = \frac{\tau_0}{p} \quad (15)$$

注意到

$$\lim_{s \rightarrow \infty} pG_1(p) \frac{\beta}{\beta+1} \sqrt{K_{T1}^2 + s^2} \frac{1}{s} = \frac{pG_1(p)G_2(p)}{G_1(p) + G_2(p)} \text{sign}(s) \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(u-x)} \text{sign}(s) ds = \frac{2i}{u-x} \quad (17)$$

若令

$$K(u, x, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[pG_1(p) \frac{\beta}{\beta-1} \sqrt{K_{T1}^2 + s^2} \frac{1}{s} \frac{pG_1(p)G_2(p)}{G_1(p) + G_2(p)} \text{sign}(s) \right] e^{-is(u-x)} ds \quad (18)$$

则 (15) 式化为

$$-\frac{pG_1(p)G_2(p)}{G_1(p) + G_2(p)} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Phi(u, p)}{u-x} du + \int_{-a}^a K(u, x, p) \Phi(u, p) du = \frac{\tau_0}{p} \quad (19)$$

上式为第 I 类 Cauchy 型奇异积分方程 (SIE).

2.3 奇异积分方程的数值求解

根据 Muskhelishvili^[9] 的奇异积分方程理论, 奇异积分方程的解可表示成

$$\Phi(x, p) = \varphi(x, p)W(x) \quad (20)$$

其中, $\varphi(x, p)$ 是连续函数, $W(x) = (a-x)^{-0.5}(a+x)^{-0.5}$ 是奇异积分方程基本解.

由于积分核 $K(u, x, p)$ 的复杂性, 式 (19) 的求解只能采用数值方法. 本文采用了 Kurtz^[6] 的分片连续函数法, 其中分片连续函数采用了二次 Lagrange 插值多项式.

3 Laplace 积分变换数值反演

在 Laplace 变换域内用数值方法求出裂纹位错密度 $\Phi(x, p)$ 之后, 可进一步求出应力 $\bar{\tau}_{yz}(x, 0, p)$ 和应力强度因子

$$\bar{K}_{III}(p) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \bar{\tau}_{yz}(x, 0, p) \quad (21)$$

为方便分析, 引入无量纲时间 $t_d = \frac{t}{t_0}$, 其中 $t_0 = \min\{a/\sqrt{\mu_{i0}/\rho}, i=1, 2\}$, 以及无量纲动应力强度因子

$$\bar{m}(p) = \frac{\bar{K}_{III}}{\tau_0 \sqrt{\pi a}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x-a)}}{\tau_0 \sqrt{a}} \bar{\tau}_{yz}(x, 0, p) \quad (22)$$

为了求出时间域上 $m(t_d)-t_d$ 的关系, 尚需对式 (22) 进行 Laplace 积分逆变换. 由于 $\bar{\tau}_{yz}(x, 0, p)$ 是数值型的, 所以只能进行数值反演. 本文采用了文献 [11, 12] 发展的基于 Fourier 变换的数值反演方法.

4 数值结果及讨论

对于双材料界面裂纹问题, 共有 6 个黏弹性材料参数: $\mu_{01}, \mu_{\infty 1}, \tau_1, \mu_{02}, \mu_{\infty 2}, \tau_2$. 此外, 还有材料密度参数 ρ_1, ρ_2 . 为便于分析黏弹性效应, 引入无量纲参数 $\lambda = \frac{\mu_{01}}{\mu_{02}}, \gamma = \frac{\tau_1}{\tau_2}, f_1 = \frac{\mu_{01}}{\mu_{\infty 1}} - 1, f_2 = \frac{\mu_{02}}{\mu_{\infty 2}} - 1$, 计算中, 固定的材料参数取值: $\rho_1 = \rho_2 = 1200 \text{ kg/m}^3, \mu_{01} = 2890 \text{ MN/m}^2, \tau_1 = 2t_0$.

图 3 是 $f_1 = f_2 = 2.0$ 时, 相应 $\gamma = 0.1, 2.0, 10.0$ 的 $m(t_d)-t_d$ 曲线. 当 $\gamma = 0.1$ 时, $\tau_2 = 10\tau_1$, 由于材料 2 松弛时间长, 其短时材料行为特征接近弹性材料 (参考图 2), 因此曲线峰值较大, 波动明显. 当 $\gamma = 10.0$ 时, $\tau_2 = 0.1\tau_1$, 材料 2 松弛时间短, 其短时材料行为黏性特征明显 (参考图 2), 因此曲线不仅峰值下降, 而且峰值时间点明显滞后.

图 4 是 $f_1 = f_2 = 10.0$ 时, 相应 $\gamma = 0.1, 2.0, 10.0$ 的 $m(t_d)-t_d$ 曲线. 与图 4 相比, 可见当 γ 保持不变, 反映黏弹性材料初终态模量差的参数 f 增加时, 曲线过冲击峰值明显降低, 峰值点后移. 黏性效应特别大时, 甚至不出现过冲击现象.

从上述数值计算结果可以得出几点结论:

(1) 黏弹性材料界面裂纹裂尖 $m(t_d)-t_d$ 曲线, 同弹性材料一样短时具有动态过冲击现象, 长时趋于静态 SIF. 过冲击峰值点在 $t_d \approx 2$ 附近. 由于存在动态过冲击现象, 对黏弹性材料考察裂纹失稳扩展进行动态分析是必要的.

(2) 黏弹性双材料界面与弹性双材料界面相比, 界面裂纹裂尖 $m(t_d)-t_d$ 曲线峰值降低, 峰值点后移. 黏性效应越大, 这种现象越明显.

(3) 黏弹性材料参数 f, τ 对 $m(t_d)-t_d$ 曲线影响明显, 当 f 较大, τ 较小时, 材料黏性效应明显, $m(t_d)-t_d$ 曲线过冲击峰值下降, 过冲击峰值点后移. 黏性效应特别大时, 过冲击现象可能不出现.

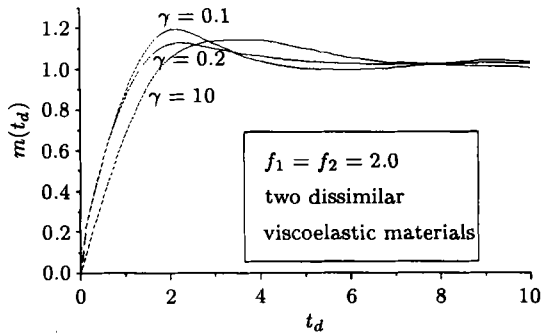


图 3 当 $f_1 = f_2 = 2.0$ 时, 对应不同 γ 值黏弹性材料界面裂纹裂尖 $m(t_d)-t_d$ 曲线

Fig.3 $m(t_d)-t_d$ curve of interface crack between two dissimilar viscoelastic materials of various γ when $f_1 = f_2 = 2.0$

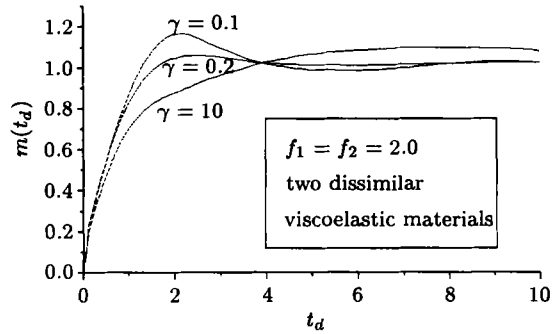


图 4 当 $f_1 = f_2 = 10.0$ 时, 对应不同 γ 值黏弹性材料界面裂纹裂尖 $m(t_d)-t_d$ 曲线

Fig.4 $m(t_d)-t_d$ curve of interface crack between two dissimilar viscoelastic material of various γ when $f_1 = f_2 = 10.0$

参 考 文 献

- 1 Kundu T. Transient response of an interface-crack in a layered plate. *J Appl Mech*, 1986, 53: 579~586
- 2 Li DH, Tai WH. Elastodynamic response of an interface crack in a layered composite under anti-plane shear impact load. *Eng Fract Mech*, 1991, 39: 687~693
- 3 王晓东等. 有限长界面裂纹对冲击载荷的响应. *爆炸与冲击*, 1991, 11: 193~205 (Wang Xiaodong. Impact response of a finite interface crack. *Explosion and Shock Wave*, 1991, 11: 193~205 (in Chinese))
- 4 Georgiadis HG. Plane impact of a cracked viscoelastic body. *Int J Eng Sci*, 1991, 29: 171~177
- 5 Georgiadis HG. Shear and torsional impact of a cracked viscoelastic body. *Int J Solids Struct*, 1993, 30: 1891~1906
- 6 Kurtz RD. The numerical solution of Cauchy singular integral equations with application to fracture. *Int J Fract*, 1994, 66: 139~154
- 7 Dubner H, Abate J. Numerical inversion of Laplace transformations by relating them to the finite Fourier cosine transform. *J Assoc Comp Machin*, 1968, 15: 115~123
- 8 Crump KS. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation. *J Assoc Comp Machin*, 1976, 23: 89~96
- 9 Muskhelishvili IN. *Singular Integral Equations*. Groningen: Noordhoff, 1953

THE SHOCK RESPONSE OF INTERFACE CRACK BETWEEN DISSIMILAR VISCOELASTIC BODIES

Wei Peijun Wu Yongli Zhang Shuangyin

(*Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract In this paper, the dynamic stress intensity factor(DSIF) at crack-tip of Griffith interface crack along two dissimilar half-infinite isotropic viscoelastic bodies under anti-plane sudden load is considered. First, integral transformation method is used to transform the convolution motion equation of viscoelastic materials into algebraic version in transformation domain. The viscoelastic mixed boundary problem in transformation domain is reduced to dual integral equations of crack open displacement (COD) which is furthermore changed into Cauchy-typed singular integral equation by the introduction of crack dislocation density function. Next, the numerical method based on piecewise continuous function given by Kurtz is used to solve the singular integral equation. After the numerical results of crack dislocation density function are obtained, the numerical results of dynamic stress intensity factor can be computed from them. At last, the numerical inverse integral transformation method—DAC method is used to reconvert the numerical results of dynamic stress intensity factor in transformation domain to that in time domain. In order to show the effects of viscoelastic material parameter, the dynamic stress intensity factors of Griffith crack in the interface of two elastic materials, two viscoelastic materials and elastic and viscoelastic materials and for various viscoelastic material parameter as well are evaluated in the numerical example. The characteristics of response curve of DSIF are discussed and the affection of viscoelastic material parameter to it is analyzed based on numerical results.

Key words viscoelastic, interface crack, dynamic stress intensity factor, integral transformation, inverse integral transformation, singular integral equation

Received 23 November 1998, revised 8 September 1999.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19772064) and by the Project of CAS (951-1-201).