

[文章编号] 1001-246X(2001)05-0390-07

Richtmyer-Meshkov 失稳的数值模拟

程军波¹, 傅德薰¹, 马延文²

(1. LNM, 中国科学院力学所, 北京 100080; 2. LHD, 中国科学院力学所, 北京 100080)

[摘 要] 利用五阶迎风紧致差分格式加群速度控制方法对激波与轻气体柱形界面的干扰问题进行直接数值模拟, 并研究了涡量的产生及其发展和界面的变形, 分析了柱形界面的失稳过程, 得知在线性发展阶段, 重气体以恒定的速度进入到轻气体中, 并形成尖钉结构; 在非线性发展阶段, 在尖钉头部的两侧形成一对旋转方向相反的涡结构. 同时证实了激波与界面的相互干扰有助于增加混合. 并将所得的数值解与实验结果进行了比较.

[关键词] 五阶迎风紧致差分格式; 群速度控制格式; Richtmyer-Meshkov 失稳; 轻气体柱形界面; 斜压效应

[中图分类号] O35

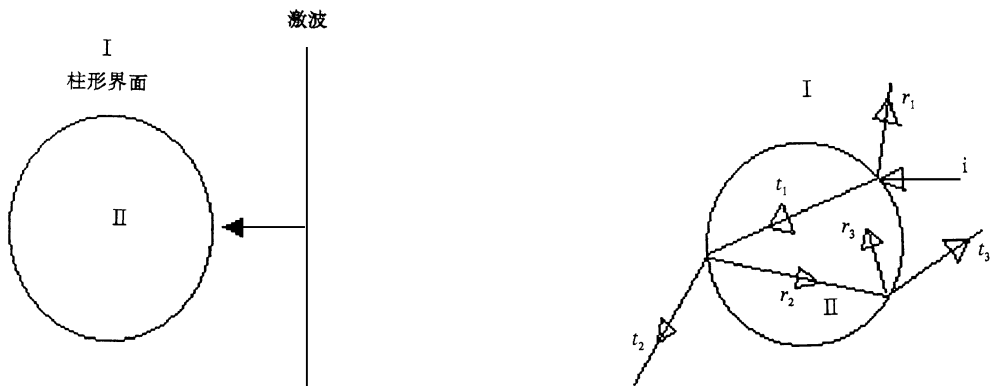
[文献标识码] A

0 引言

对于激波与密度界面相互干扰产生失稳后导致混合增加的问题, 早在 60 年代就由 Richtmyer 提出. 他发现, 当激波扫过密度界面后, 界面上的小扰动会随着时间增长而增长. 1969 年, Meshkov 对此进行了实验验证. 因此, 该问题被称为 Richtmyer-Meshkov (R-M) 失稳问题. 激波加速界面导致界面两边流体混合增加的机理可应用于增加航空发动机的燃料与空气的混合以提高效率; 而对界面失稳机理的研究则有助于增加对激光控制热核聚变的了解. 由于该问题在军事和民用上的巨大潜力, 美苏等国的科学家对其进行了详细的研究.

对平面密度界面的 R-M 失稳问题人们研究得较多, 而对于柱形界面上的 R-M 失稳问题, 人们研究得相对较少, 这是因为柱形界面上的折射和反射较平面界面上的折射和反射要复杂得多. 激波与柱形界面作用的示意图见图 1. 在气体 I 中传播的入射激波与柱形界面相遇, 产生进入气体 I 的折射波和重新返回到气体 I 中的反射波. 柱内的折射波在柱形界面上再次折射, 产生进入气体 II 中的二次折射波 (通常称为穿透波) 和返回到气体 I 中的反射波. 正由于其复杂性, 虽然人们对 R-M 失稳问题的研究已很多, 但对于激波-圆柱密度界面的干扰, 仍有很多问题有待研究.

本文将在 Euler 方程的基础上, 采用高精度差分



(a) The view of shock wave and interface when $t = 0$

(b) The view of shock wave and interface when $t > 0$

圆: 界面; i : 入射激波; r_1, r_2 和 r_3 : 第 1 次、第 2 次和第 3 次反射波; t_1, t_2 和 t_3 : 第 1 次、第 2 次和第 3 次折射波;
和 : 柱形界面外和内的流体)

图 1 激波与圆柱密度界面作用的示意图

Fig. 1 The view of interaction of shock waves with cylinder density interface

[收稿日期] 2001 - 02 - 21; [修回日期] 2001 - 05 - 17

[作者简介] 程军波(1972 -), 男, 湖北天门, 博士生, 从事计算流体力学方面的研究.

格式对激波与轻气体柱形界面的干扰问题进行直接数值模拟。在计算中,假设两种流体为完全气体,比热比均为 1.4,且二者之间没有化学反应发生。不考虑热传导、重力和浮力的影响,重点研究激波-界面干扰所产生的斜压导致涡量的产生、柱形界面的变形和失稳,以及界面失稳的线性发展阶段和非线性发展阶段,从而证实激波加速界面导致界面两边流体混合增加。最后同实验相比较,以验证方法和计算的正确性。用来作比较的实验是 Jacobs^[1]采用 PLIF 方法在激波管内完成的。

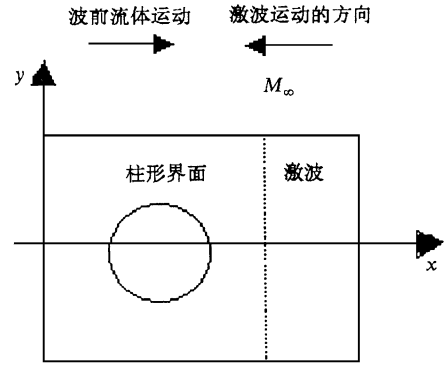


图 2 初始时刻流场示意图

Fig. 2 The view of flow field when $t = 0$

1 计算方程和方法

1.1 方程和坐标变换

本文采用 Euler 方程进行模拟,取激波运动方向为 x 的反方向,其垂直方向为 y 方向,并将坐标建立在初始时刻的波后气体上。该坐标较前人在数值模拟中所建立的坐标更有优点。Picone 与 Boris^[2], Cowperthwaite^[3] 等一般将坐标建立在初始时刻波前的圆柱面中心,这些坐标系中柱形界面的背景速度是较大的波后速度,而在本文的坐标系中该背景速度为零,这样可以极大地减少计算区域的长度,降低 CPU 的计算时间。这在激波强度较大时尤为明显,其流场如图 2 所示。另外,除 Euler 方程外,为描述界面两边流动混合特征,引入被动标量 g ,其输运守恒方程可写为

$$\frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho g u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho g v)}{\partial y} = 0.$$

g 表征单位体积内不同流体的比分。初始时,柱形界面内的流体取 $g = -1$,柱形界面外的流体取 $g = +1$,取 $g = 0$ 来表示两种流体的分界面。

1.2 计算方法

1.2.1 离散

对欧拉方程的对流项,首先采用流通量的正负

$$j = \frac{|\rho_{j+1} - 2\rho_j + \rho_{j-1}|}{(1 - \rho_j)(|\rho_{j+1} - \rho_j| + |\rho_j - \rho_{j-1}|) + |\rho_{j+1} - 2\rho_j + \rho_{j-1}|}.$$

其中, ρ 为密度, $0 < \rho < 1$,一般取 $\rho = 1/2$ 。

1.3 初始值和计算区域

坐标建立在初始时刻的波后流体上,初始时刻激波与柱形界面的右端相接触。对应于长度 l 、温度 T 、密度 ρ 和速度 (u, v) 的无量纲化参数分别为圆柱直径 d 、 T_1 、 ρ_1 和 u_1 ,下标 1 表示波前的来流参数。相应于时间的无量纲化参数是 d/u_1 。

分裂,然后利用五阶迎风紧致差分格式^[4]进行离散,沿时间方向的离散则采用三阶精度的 R-K 法。

1.2.2 边界条件

沿 y 方向和 x 方向的四边均采用无反射边界条件,以消除波在计算域边界上的反射。

1.2.3 群速度控制方法

对于流场中出现的间断,采用群速度控制方法^[4]来控制数值解中的群速度,以克服数值解中的非物理振荡,其具体的形式见文[4]。唯一与文[4]不同的是在原有的群速度格式中引入开关函数^[5]。这样既可以保持格式原有的精度,又能消除间断处的非物理振荡。其作法是在对角矩阵的元素后面加上一开关函数^[5],具体表示如下

$$M_{x,2}^{\pm} + M_{x,3}^{\pm} = x^5 \left\{ \frac{\left| \frac{\partial^5 f^{\pm}}{\partial x^5} \right| + \left| \frac{\partial^6 f^{\pm}}{\partial x^6} \right|}{\left| \frac{\partial f^{\pm}}{\partial x} \right|} \right\}^{j+1/2},$$

其中 $M_{x,2}^{\pm}$ 和 $M_{x,3}^{\pm}$ 为群速度控制格式中的对角矩阵, f^{\pm} 表示 Euler 方程中流通矢量的正负分裂, ρ_6 和 ρ_7 是正常数值,计算中取 $\rho_6 = \rho_7 = 1/64$ 或 $1/128$, $j+1/2 = \max(\rho_j, \rho_{j+1})$, 为正的小量, ρ_j 表示如下

初始条件如下:圆柱外波前的流体的速度 $u = 1, v = 0$,密度和温度值均为 1;圆柱内的流动参数由圆柱内外两边压力和速度相等的条件确定;激波后的速度 $u_2 = 0$,其它的物理参数(密度 ρ_2 、温度 T_2 等)由激波前后关系式确定。对于被动标量 g ,取柱形内流体的被动标量 $g = -1$,柱形外流体的被动标量 $g = +1$ 。

计算区域的长(沿 x 方向)宽(沿 y 方向)分别为 6 和 6, 初始时刻圆柱的中心在计算区域的中心.

为验证计算结果的正确性, 分别采用两种网格点数(151 \times 151 和 301 \times 301)进行计算. 经比较, 两种网格点数的计算结果基本相同, 证明结果是正确的, 最后采用的是网格点数为 301 \times 301 的计算结果. 另外, 在柱面所覆盖的地方沿 x 和 y 方向上加密, 其中, 最小网格间距为 0.01, 最大网格间距为 0.03.

2 计算结果

为了与实验^[1]进行比较, 采用文[1]中的相关参数: 激波的来流马赫数为 1.093, 圆柱内气体与周围气体的密度比为 0.138, 即圆柱内是轻气体, 圆柱外是重气体, 激波沿 x 的反方向走向柱形密度界面(图 2). 图 3 是涡量等值线图, 图 4 是密度等值线图, 是求解欧拉方程的直接数值模拟结果. 图 7 是与计算结果比较的实验图像. 分析和计算所得的结果均为无量纲化后的结果.

2.1 涡量的产生与发展

无粘涡量方程式

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}) = - \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{1}{\rho} \boldsymbol{p} \right),$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为涡量, \boldsymbol{v} 为速度, p 为压力, ρ 为密度, $-\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{1}{\rho} \boldsymbol{p} \right)$ 为涡量方程式的源项, 一般称之为斜压项. 当压力梯度和密度梯度不平行时, 斜压项存在, 根据涡量方程式, 涡量将产生.

当激波扫过密度界面时, 激波产生与 x 轴平行但方向相反的压力梯度, 界面将产生沿法向方向指向圆心的密度梯度. 由于二者不平行, 斜压项存在, 涡量产生. 由于柱内气体的密度小于其周围气体的密度, 所以激波扫过后, 柱内气体的速度要大于其周围气体的速度. 这样在与 x 方向平行的对称轴线(后面将其统称为对称轴线)之上的界面上会产生顺时针方向旋转的负涡量, 而在其下的界面上会产生逆时针方向旋转的正涡量.

由斜压项的表达式可知, 压力梯度和密度梯度的夹角与斜压项的大小, 即与涡量的大小直接相关. 当激波与界面刚开始接触时, 压力梯度与密度梯度平行, 二者的夹角为 0 或 180°, 斜压项为零, 涡量几乎没有产生. 随着激波向左运动(见图 3), 入射波、折射波与反射波所产生的压力梯度与界面的密度梯度不平行, 涡量方程式的斜压项增加, 将导致涡量迅速增加. 在二者的夹角为 90° 或 270° 时, 斜压项的绝

对值最大, 涡量也最大. 随着入射激波脱离界面, 压力梯度和密度梯度再次平行, 涡量也几乎为零. 这可以从涡量等值线图 3(a)、(b) 上看出, 在对称轴线处涡量几乎为零.

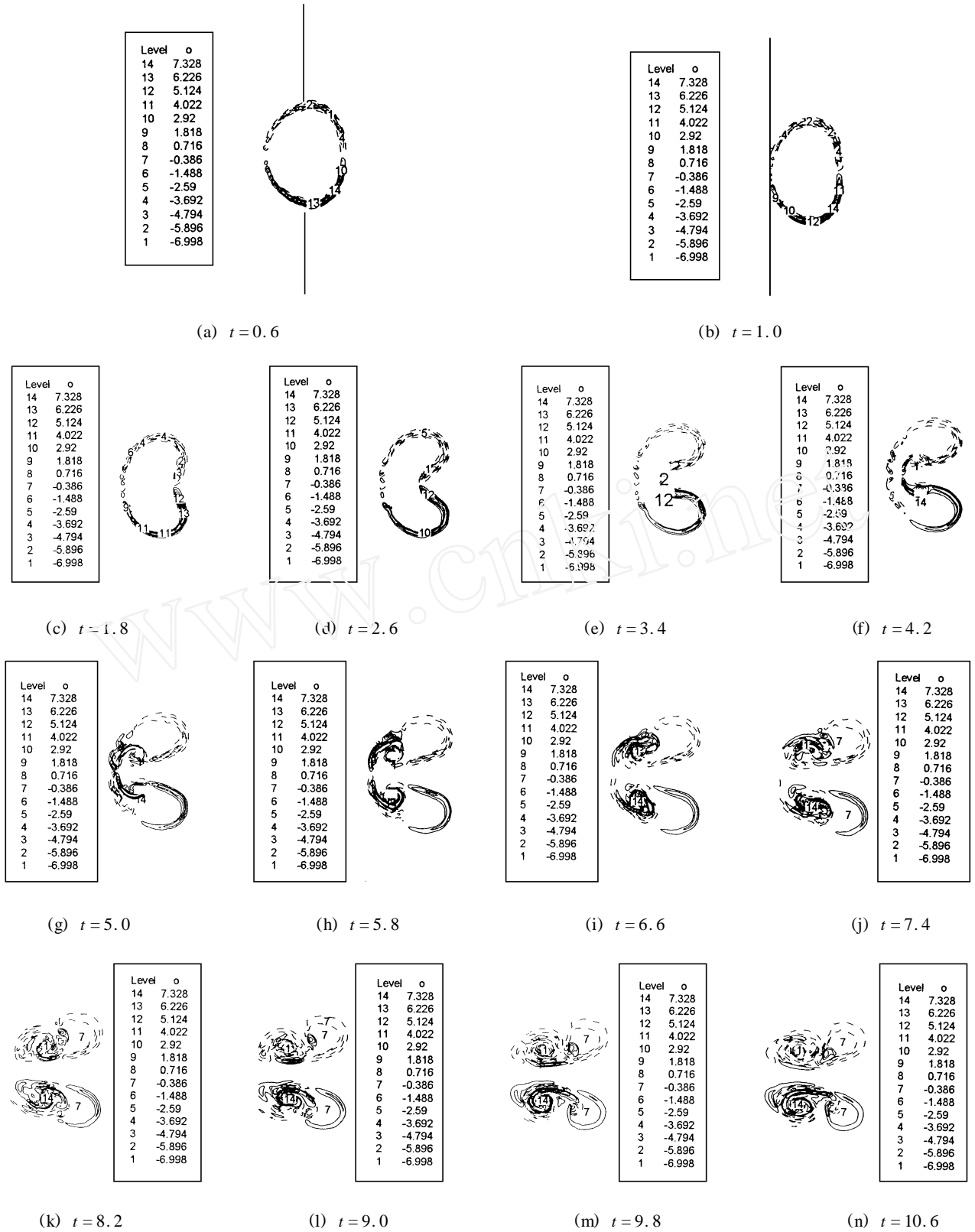
在入射激波还没有穿过柱形界面时, 入射波、折射波对涡量的产生都有贡献. 将密度等值线图 4(a) 与涡量等值线图 3(a) 相比较可发现, 有一部分的左边界面, 尽管入射激波还没有扫过, 但已经布满了涡量. 这充分说明了折射波对涡量的贡献. 入射波对涡量的贡献是很显然的. 因为入射波所产生的压力梯度与大部分的界面所产生的密度梯度不平行.

当入射激波穿过界面后, 将不再影响到界面上涡量的大小和分布. 但入射激波在界面上产生的进入到气体中的折射波在柱形界面内所产生的折射和反射(如图 1 中的 r_2 和 r_3) 将直接引起涡量的变化. 但在柱形界面内的折射和反射较弱, 且在界面内几次折射和反射后其强度迅速降低, 因此对涡量的产生和分布影响不大. 但涡量本身的自旋则对涡量在界面的分布有很大的影响. 在界面上涡量的作用下右边界面凹陷, 涡量等值线图的形状发生了很大的改变. 在图 3(b) 中其形状为椭圆形, 随着时间的发展, 右边界面凹陷, 其形状逐渐演变为一对带子相连的双肺叶形(图 3(c)、(d) 和 (e)). 另外, 在 Kelvin-Helmholtz 失稳的作用下, 已经凹陷下去的右边界面上出现了一对大小相等, 旋转方向相反, 上下对称的涡, 该涡不断将周围的涡量卷进去, 从而不断变大, 且二者的间距也逐渐拉大. 在图 3(i) 时该对涡的大小和二者之间的间距远大于图 3(f) 的涡和间距. 因此激波扫过后界面上涡量的变化主要归因于两个方面: 其一是激波扫过时由于斜压项效应所产生的涡量的自身作用; 其二是 Kelvin-Helmholtz 的失稳的作用.

2.2 密度等值线图

下面将根据图 4 的密度等值线图来详细地描述激波与圆柱界面的相互作用. 从图 4(a) 上可以清晰地看出圆柱外呈两段直线的入射激波、弯曲的反射波和弯曲的穿透波. 入射激波在界面上折射后形成进入圆柱内的折射激波, 该激波重新在界面上折射形成进入柱形界面外的第二次折射波, 即穿透波. 反射波和穿透波弯曲的原因是由于界面的弯曲使得入射的平面激波各部分到达界面的时间不同.

在图 4(b) 中, 入射激波已完全脱离界面, 此时界面的形状已由原来直径为 D 的圆形变形为现在的类椭圆形, 该类椭圆形的大径为 D . 界面由圆形



直线表示入射激波的位置, 椭圆表示界面, 涡量分布在界面上

图 3 涡量等值线图

Fig. 3 Contours of vorticities

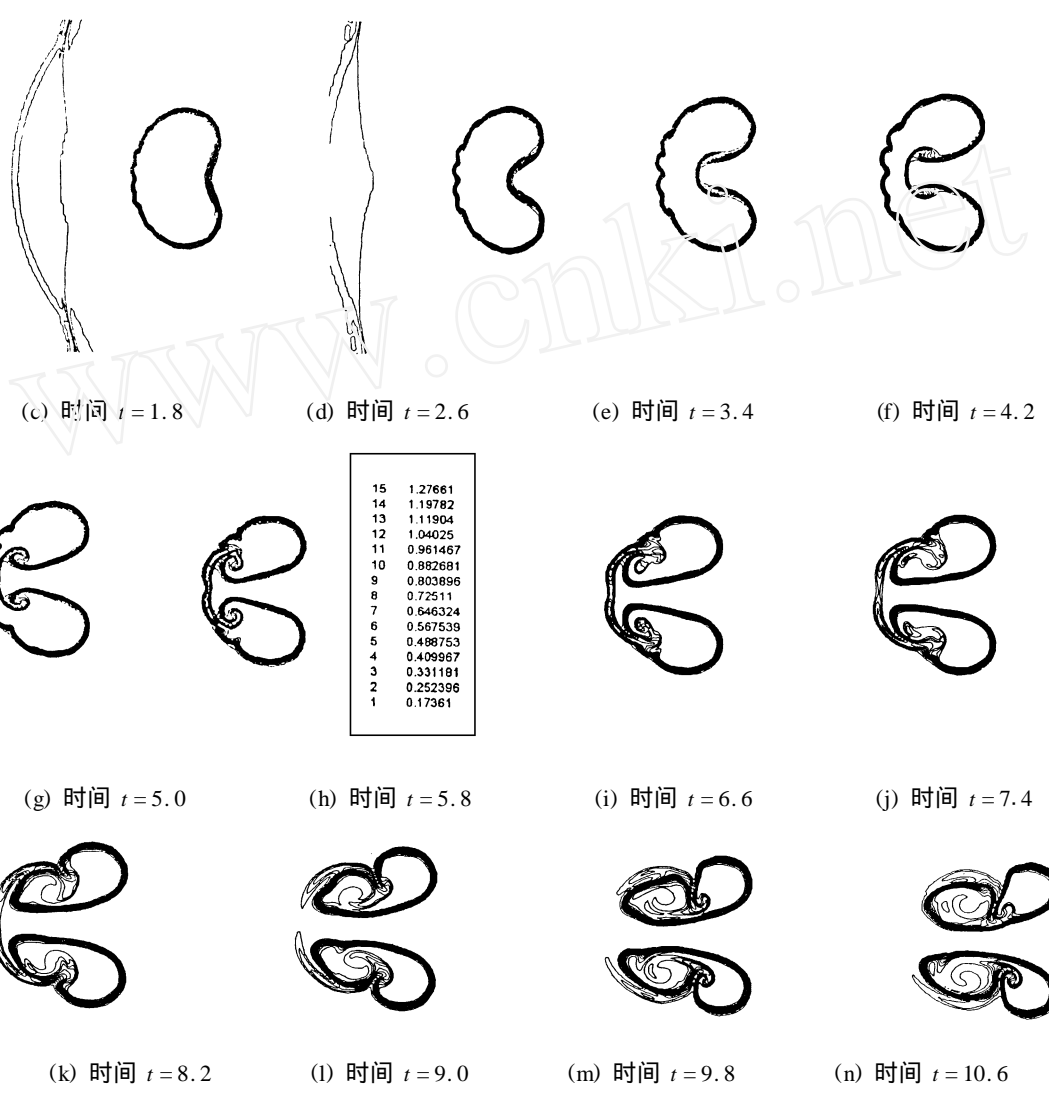
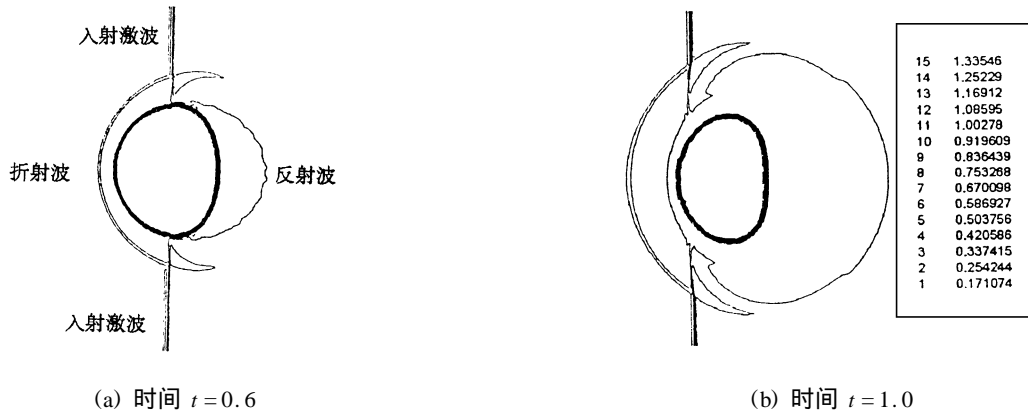


图 4 密度等值线图

Fig. 4 Contours of density

变为椭圆形的原因,是因为激波扫过后对其法向方向的流体有压缩作用,而对其切向方向的流体则无任何压缩作用.

在图 4(a)、(b)上,在界面的上方和下方出现了四重激波相互作用,这与 Hass & Sturtevant^[6]的实验

相符.在图 4(a)上二次穿透激波还不明显,但在图 4(b)上则十分明显.在图 4(c)中,激波完全脱离了界面,而在图 4(d)时,在流场中已经看不到入射激波了.激波与界面的干扰导致界面的失稳,随着时间的发展,圆柱的右边界面逐渐向内凹陷(图 4(c)、

(d), 重气体进入到轻气体中并形成尖钉状的结构(图 4(e)). 此时界面的形状已经由图 4(b)的椭圆型变为一条带子相连的双肺叶形. 随着时间的继续发展, 在尖钉头部的两侧出现了一对旋涡形状的结构(图 4(f)). 在随后的发展过程中该结构不断变大, 同时其位置由肺叶的头部(图 4(h))向肺叶的腰部移动(图 4(i)、(j)和(k)), 同时尖钉的头部不断向左移动, 与两肺叶相连的带子也越来越细, 最终从中间断裂(图 4(l)、(m)). 界面发展到最后已经变成一对旋涡形状的结构. 另外, 从图 4 上还可以看出, 激波与界面的干扰有助于增加混合.

2.3 界面的变形率

当激波扫过界面后, 重气体进入到轻气体中形成尖钉结构. 尖钉头部运动速度直接反映了重气体进入到轻气体中的快慢程度.

本文利用对称轴上前后界面的距离(见图 5 的 x_1)来反映重气体进入到轻气体的程度. x_1 随时间变化的图形见图 6. 从图 6 可以看出, x_1 的变化分为 3 个阶段(a、b 和 c). 阶段 a 的时间范围为 0~0.9. 阶

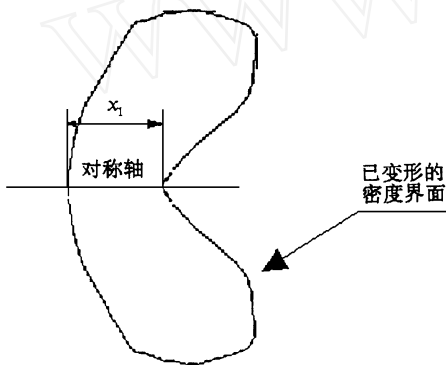


图 5 已经变形的界面示意图

Fig. 5 The view of interface distorted

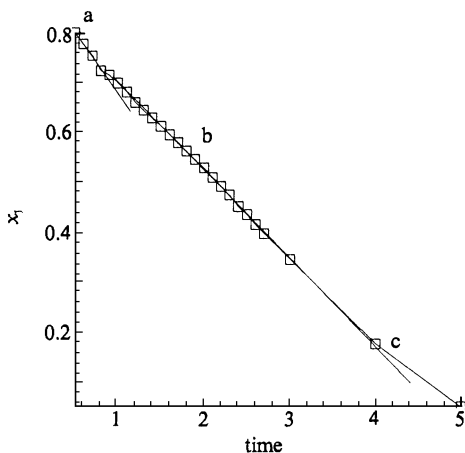


图 6 x_1 随时间变化

Fig. 6 x_1 versus time

段 b 的时间范围为 1.2~3.0 之间. 从阶段 a 和阶段 b 时间变化的图形来看, 重气体是以恒定的速度进入到轻气体中的.

另外, 从图 6 可看出, 阶段 a 的斜率要大于阶段 b 的斜率. 阶段 a 处的 x_1 的变化归因于两个方面: R-M 失稳的作用和入射激波对其法向界面的压缩作用. 在阶段 a 的时间达到 0.9, 激波正好脱离界面, 其后入射激波不再对界面施加影响. 因此阶段 b 处 x_1 的变化只反映了 R-M 失稳的作用, 阶段 a 的斜率要大于阶段 b 的斜率.

2.4 柱形界面扰动的线性和非线性发展阶段

首先参照 R-T 失稳的 4 个阶段的划分来划分柱形界面 R-M 失稳的线性阶段和非线性阶段. R-M 失稳的 4 个阶段分别是线性发展阶段、弱非线性发展阶段、强非线性发展阶段和湍流阶段. 弱非线性发展阶段的主要特征是重气体以恒定的速度进入到轻气体中并形成尖钉, 而轻气体进入到重气体中形成气泡. 强非线性发展阶段的主要特征是在尖钉附近出现细胞微结构并形成蘑菇状的结构.

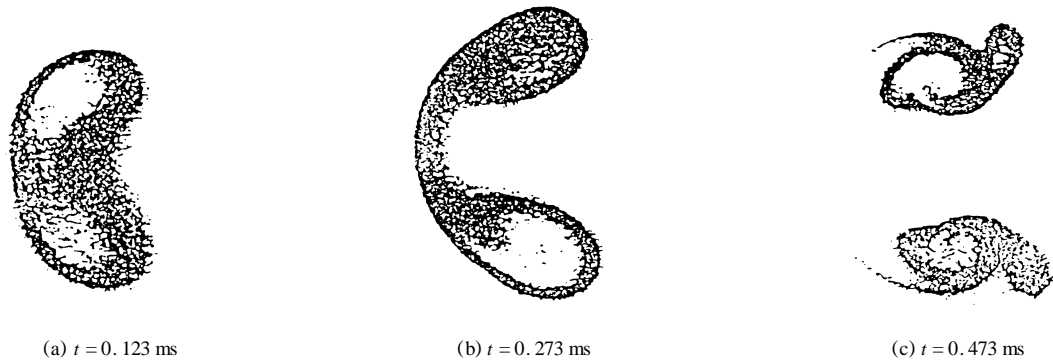
从图 4(f) ($t = 4.2$) 可看出, 此时重气体进入到轻气体中形成了尖钉结构, 而在图 4(g) ($t = 5.0$) 可看出, 在尖钉的头部两侧出现了涡结构. 根据 R-T 失稳阶段的划分, 在时间 $t = 5$ 之前, 是线性发展阶段, 而在其后为非线性发展阶段.

由图 6 可看出, 在 $t = 0 \sim 4$ 范围内, x_1 随时间的变化为线性发展状态. 因为 x_1 的变化直接表示了重气体进入到轻气体的程度, x_1 的线性变化表明重气体以恒定的速度进入到轻气体中.

从上面的分析可看出, 柱形界面失稳的线性发展阶段的特征是重气体以恒定的速度进入到轻气体中, 其非线性发展阶段的主要特征是在尖钉结构头部的两侧出现了一对大小相等、旋转方向相反的涡结构.

2.5 与实验图象比较

将计算所得的密度等值线图(图 4(d)、(f)、(l))分别与实验图象(图 7(a)、(b)、(c))相比较, 可发现二者较为一致. 当激波扫过后, 轻气柱的圆截面被扭曲和变形. 开始时圆柱的右边界面向内凹陷, 并逐渐向圆柱的左边界面靠拢, 从而形成了一条带子连着两片肺叶的形状. 该带子逐渐变细以致从中断开并最后消失. 而两片肺叶随着时间的发展越离越开, 最后形成一对旋转方向相反的涡对.

图 7 Jacobs^[1]的实验图象Fig. 7 The experimental shadowgraph by Jacobs^[1]

3 结论

激波所产生的压力梯度和界面所产生的密度梯度的不平行将直接导致涡量的产生、界面的变形和失稳. 柱形界面失稳的线性发展阶段, 重气体以恒定的速度进入到轻气体中, 并形成尖钉结构; 在非线性发展阶段, 在尖钉头部的两侧形成一对旋转方向相反的涡结构, 导致界面两边流体混合. 通过将计算所得的密度等值线图与相关的实验图象进行比较, 可以证明本文的模拟是成功的.

[参 考 文 献]

[1] Jacobs J W. Shock-induced mixing of a light-gas cylinder [J]. *J Fluid Mech*, 1992, **234**: 629 - 649.

[2] Picone J M, Boris J P. Vorticity generation by shock propagation through bubbles in a gas [J]. *J Fluid Mech*, 1988, **189**: 23 - 51.

[3] Cowperthwaite N. The interaction of a plane shock and a dense spherical inhomogeneity [J]. *Physica D*, 1989, **37**: 264 - 269.

[4] Fu Dexun, Ma Yanwen. A High Order Accurate Difference Scheme For Complex Flow Fields [J]. *J Comput Phys*, 1997, **134**: 1 - 15.

[5] Swanson R C. On central-difference and upwind schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, **101**: 292 - 306.

[6] Haas J -F, Sturtevant B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities [J]. *J Fluid Mech*, 1987, **181**: 41 - 76.

NUMERICAL SIMULATION OF RICHTMYER-MESHKOV INSTABILITY OF DENSITY-STRATIFIED INTERFACE OF LIGHT-GAS CYLINDER

CHENG Jurr-bo¹, FU De-xun¹, MA Yan-wen²

(1. LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China;

2. LHD, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)

[**Abstract**] An approach combining the fifth Upwind Compact Difference Scheme and Group Velocity Control is applied to simulate directly the interaction of shocks and the density stratified interface of light-gas cylinder. Some research about the generation and development of vorticity and the distortion of edge of cylinder is done. The instability of cylinder density-interface is analyzed. Main character of the linear developing phase is that the gas of higher density goes into the one of lower density at a constant velocity and the spike structure is formed and the character of the nonlinear developing phase is that a pair of vortex structures rotating adversely are formed on both sides of the top of the spike. The numerical solution accords with the experiment.

[**Key words**] fifth upwind compact difference scheme; group velocity control; Richtmyer-Meshkov instability; density-stratified interface of light-gas cylinder; baroclinic effect

[**Received date**] 2001 - 02 - 21; [**Revised date**] 2001 - 05 - 17