

粘性流动有限差分计算的新策略^{*}

高 智 申义庆

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 对粘性流动计算, 提出有限离散单元流动的流体分析(理论)和耦合离散流体理论(CDFT)的差分格式. 利用 CDFT 差分格式计算 Burgers 方程和计算激波边界层干扰流动的数值实验表明: 对计算精度和计算效率的提高, CDFT 格式比提高常用差分格式(即离散流体力学方程得到的格式)精度和改进常用格式形式等更有效, 且运算量小.

关键词 粘性流体力学 计算流体力学 有限差分格式 流动离散的流体理论 耦合离散流体理论算法 差分格式

近 30 多年来计算流体动力学得到了巨大的发展. 从力学的角度来看, 流动计算最常用的策略是求解某种流体运动微分方程组, 例如在连续介质近似下, 对全流场求解 Navier-Stokes (NS) 方程组或求解 Euler 方程组或求解扩散抛物化(DP)NS 方程组(亦称抛物化 PNS 方程组和简化 NS 方程组)^[1,2]. 另一种得到应用的策略是分区策略, 亦称区域分裂方法(Domain decomposition methods)^[3], 它把计算区域划分为彼此相邻或相互重叠的少数几个子区域, 在不同子区域既可求解不同的亦可求解同一个流体运动方程组.

由于粘性流动, 特别是高 Reynolds (Re) 数流动的非均匀和非线性特性, 因此对流场的任一空间离散划分, 不同离散单元的流动特征并不相同. 事实上, 在常见的以及可能的流动计算中, 不同单元步长 Re 数的大小相差悬殊, 同一单元在不同方向上(例如在边界层内离散单元的流向和法向方向上)的步长 Re 数的大小同样相差悬殊(参见本文表 1), 步长 Knudsen (Kn) 数亦有类似情况. 常用计算策略中对流动特征不同的单元使用同样的离散模型, 即作了笼统的处理, 在理论上和实践上都不能说最佳. 避免上述缺陷是分区策略的一个重要目标, 但分区策略又出现了不同子区域解在子区域交界面上必需很好匹配的难题. 因此需要研究离散尺度层次上的流动规律(或流体理论), 根据这种理论可构造与任一单元具体流动特征相匹配的该单元的离散模型, 从而在离散尺度层次上使计算恰到好处; 再把所有的单元离散模型综合在一起得到全域流场的离散模型. 我们进一步深化了“高智”提出的上述理论思想和流动计算策略^[4,5], 得到一些很有意义的结果.

1998-10-28 收稿, 1999-01-25 收修改稿

^{*}国家自然科学基金(批准号: 19772067; 19393100)、中国科学院高温气体动力学开放实验室、科学与工程计算国家重点实验室和中国科学院力学研究所所长择优基金资助项目

1 离散单元流动的流体理论

粘性流动最主要的一个物理过程是对流与扩散(即惯性力和粘性力)之间的竞争过程,为了阐明对流与扩散在离散单元尺度上的竞争特性,弄清楚竞争特性对网格间距(步长)大小、对步长 Re 数 R_x 以及对步长 Kn 数 R_y 数的依赖关系,我们考察不可压缩二维定常 NS 方程组动量方程的如下有限差分方程^[6]

$$\begin{aligned} & \frac{u_{ij}}{2u_{ij}} \frac{1}{x_i^2} \{ [1 + \alpha_1 + (1 - \alpha_1)e^{-R_x}] u_{i+1,j} - 2(1 + \text{ch} R_x + \alpha_1 \text{sh} R_x) u_{ij} + \\ & [1 - \alpha_1 + (1 + \alpha_1)e^{R_x}] u_{i-1,j} \} + \frac{v_{ij}}{2v_{ij}} \frac{1}{y_j^2} \{ [1 + \alpha_2 + (1 - \alpha_2)e^{-R_y}] u_{i,j+1} - \\ & 2(1 + \text{ch} R_y + \alpha_2 \text{sh} R_y) u_{ij} + [1 - \alpha_2 + (1 + \alpha_2)e^{R_y}] u_{i,j-1} \} = - D \left[\frac{1}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

其中 $D \left[\frac{1}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \right]$ 表示 $\left[\frac{1}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \right]$ 的差分近似, $R_x = \frac{u_{ij} x_i}{\mu}$, $x_i = |x_{i \pm 1} - x_i|$, $R_y = \frac{v_{ij} y_j}{\mu}$, $y_j = |y_{j \pm 1} - y_j|$, $\alpha_1 = \text{sign} u_{ij}$, $\alpha_2 = \text{sign} v_{ij}$, $\bar{u}_{ij} x_i = \text{sh} R_x + \alpha_1 (\text{ch} R_x - 1)$, $\bar{v}_{ij} y_j = \text{sh} R_y + \alpha_2 (\text{ch} R_y - 1)$. y 方向动量方程的差分方程与方程(1)类似. 在描述离散单元流动主要物理过程(对流扩散竞争)方面差分方程(1)很精确. 由方程(1)可知,离散单元内对流扩散竞争在 $x(y)$ 方向的消长特性与该方向的单元尺度 $x_i(y_i)$ 或步长 Re 数 $R_x(R_y)$ 成指数关系,对流(扩散)项的贡献随 $x_i(y_i)$ 或 $R_x(R_y)$ 的增加呈指数规律增大(减少). 当 $x_i = 2.3 \frac{\mu}{u_{ij}}$ 或

$4.6 \frac{\mu}{u_{ij}}$ 或 $6.9 \frac{\mu}{u_{ij}}$ 时,在 x 方向上扩散项对计算节点物理量 u_{ij} 的贡献约为对流项贡献的十或百或千分之一. 因此当 $x_i = O\left(\frac{\mu}{u_{ij}}\right)$, 或 $x_i > R_c = O(1)$ 时,差分方程(1)的第 1 项简化为

$$\frac{u_{ij}}{2x_i} [(1 - \alpha_1) u_{i+1,j} - 2u_{ij} + (1 + \alpha_1) u_{i-1,j}]. \quad (2)$$

当 $x_i > R_c$, 且 $y_i > R_c$ 时,方程(1)简化为

$$\begin{aligned} & \frac{u_{ij}}{2x_i} [(1 - \alpha_1) u_{i+1,j} - 2u_{ij} + (1 + \alpha_1) u_{i-1,j}] + \\ & \frac{v_{ij}}{2y_j} [(1 - \alpha_2) u_{i,j+1} - 2u_{ij} + (1 + \alpha_2) u_{i,j-1}] = - D \left[\frac{1}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

这里 R_c 为扩散效应可忽略,确切地说扩散物理量在逆风方向下降到与它的初始值相比可近似忽略的步长临界 Re 数. 由于扩散物理量在逆风方向上随步长 Re 数 R_x 的增加呈指数规律下降,所以 R_c 的取值具有“渐近”意义, R_c 取得稍大或稍小一点对解的影响不大,本文研究表明取 $R_c = 2.3$ 比较合适,此时扩散量在逆风方向下降到初始值的 $1/10$. 根据上述分析和讨论,我们提出如下离散单元流动的流体理论.

理论 1 对离散流动满足连续介质假设的任一单元,若 3 个坐标方向上的步长大于或小

于中心格点物理量在各自方向上的迎风扩散特征距离,或者说 3 个坐标方向的步长 Re 数都大于或都小于步长临界 Re 数 R_c ,则该单元流动分别为对流效应或对流扩散竞争效应所支配. 因此 3 个坐标方向 $R_{x_i} > R_c$ 的单元简称为无粘单元,而 3 个 $R_{x_i} < R_c$ 的单元简称为粘性单元.

理论 2 对离散流动满足连续介质假设的任一单元,若 3 个坐标方向上的步长有的大于、有的小于中心网格点物理量在各自方向上的迎风扩散特征距离,或者说 3 个坐标方向上的步长 Re 数有的大于、有的小于步长临界 Re 数 R_c ,则该单元流动在 $R_{x_i} > R_c$ 的方向上为对流效应所支配,而在 $R_{x_i} < R_c$ 的方向上为对流扩散竞争效应所支配. 简称这种单元为部分无粘-粘性单元.

因此,对网格与流场特征相匹配(或相容)的任一空间离散划分,若所有单元的离散流动都满足连续介质假设(若有单元不满足此假设的情况将在另文讨论),则任一单元流动的质量、动量和能量守恒律可由定理 1 和 2 导出,不可压缩流质量和动量守恒律为

$$\int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dt + \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \rho \mathbf{u} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS, \tag{5}$$

这里 V 和 S 分别是任一单元的体积和表面, \mathbf{n} 为表面 S 的外法向单位矢量, \mathbf{p} 为作用在 S 表面的应力张量. 对所有 3 个坐标方向上步长 Re 数 $R_{x_i} > R_c$ ($R_c = 2.3, i = 1, 2, 3$) 的无粘单元

$$= 0. \tag{6}$$

对所有 $R_{x_i} < R_c$ ($i = 1, 2, 3$) 的粘性单元

$$= (\tau_{ij}), \quad \tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]; \tag{7}$$

对 $R_x > R_c, R_y < R_c$, 和 $R_z < R_c$ 的部分无粘-粘性单元

$$= \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}; \tag{8}$$

对 $R_x > R_c, R_z > R_c$, 和 $R_y < R_c$ 的部分无粘-粘性单元

$$= \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

应当指出,对气体流动,离散气流满足连续介质近似要求 3 个坐标方向上的步长 Kn 数都小于 1. 由于步长 Kn 数 $Kn_{x_i} = \sqrt{\frac{M_{x_i}}{2}} \frac{M_{x_i}}{R_{x_i}}$ ($i = 1, 2, 3$), 这里 γ 为比热比, M_{x_i} 是计算网格点在 x_i 方向的 Mach 数,因此对 M_{x_i}/R_{x_i} ($i = 1, 2, 3$) 不小于 1 的单元,需要计及离散分子运动的效应.

2 耦合离散流体理论(CDFT)的有限差分算法

如上所述,流动计算可通过求解离散守恒律(4), (5)式,同时利用粘性本构关系(6) ~ (9)

式来完成. 这样的离散方程已对不同单元的具体流动做到了具体处理, 因此离散方程与所有单元的具体流动特征均相一致. 故称这种算法为耦合离散流体理论 (CDFT) 的算法. CDFT 算法在离散尺度层次上使计算恰到好处. 另一方面, 若速度对空间变量 2 次可微, 由守恒律 (4), (5) 式可导出 NS 方程组. 对于这种情况, CDFT 算法可通过在 NS 离散方程 (即 NS 方程组的离散方程) 中增加开关函数 F_d 来实现, 我们以不可压定常 NS 方程组为例加以说明, 设 NS 方程组动量方程的差分格式为

$$D[(u \cdot) u] = -D(p) + D(\mu^2 u), \quad (10)$$

相应的加开关函数的 CDFT 差分格式即为

$$D[(u \cdot) u] = -D(p) + F_d D(\mu^2 u), \quad (11)$$

$$F_d D(\mu^2 u) = \begin{cases} D(\mu^2 u), & \text{若 } R_x, R_y, R_z \leq R_c, \\ D\left[\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right], & \text{若 } R_x > R_c; R_y, R_z \leq R_c, \\ D\left[\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right], & \text{若 } R_x, R_z > R_c, R_y \leq R_c, \\ 0, & \text{若 } R_x, R_y, R_z > R_c, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $D[(u \cdot) u]$, $D(p)$ 和 $D(\mu^2 u)$ 分别表示 $(u \cdot) u$, p 和 $\mu^2 u$ 项的差分近似. 应该指出, 加开关的 CDFT 算法以 NS 离散方程 (例如 NS 差分格式、NS 有限体积法等) 的丰硕成果为出发点, 既省事又简捷. 因此本文首先研究加开关函数 F_d 的 CDFT 算法. 关于离散守恒律 (4), (5) 式的计算将在另文给出. 此外, 在 CDFT 差分算法中, 数值解在相邻单元交界面上“自然”相匹配. 关于边界条件, 由于边界层内与流动特征相容的法向方向上的步长 Re 数总小于 1, 因此 CDFT 算法的固壁边界条件与 NS 方程或 DPNS 方程计算的固壁边界条件一致, 即固壁边界上为无滑移 ($u=0$) 条件. 在流向下游边界的邻域, 若流向步长 Re 数大于步长临界 Re 数 R_c , 则无需规定下游边界条件, 若流向步长 Re 数小于 R_c , 则流向下游边界条件的处理应与 NS 方程计算的处理一致.

3 理论的数值验证

今以 Burgers 模型方程和激波边界层干扰流动为算例检验上述理论的正确性. 采用加开关函数构造 CDFT 差分格式. 计算中步长临界 Re 数 $R_c = 2.3$. 利用一阶和二阶迎风差分格式、2 种二阶精度 TVD^[8]、三阶 ENO^[9,10] 和五阶 ENO 等 6 种差分格式 (参见附录) 以及它们的相应 6 种耦合离散流体理论 (CDFT) 差分格式数值计算了 Burgers 模型方程

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (13)$$

对所有格式计算采用了同一个均匀网格体系. 典型的数值结果见表 2, 3 和表 4, 主要结论是: 6 种 CDFT 差分格式均比原始 6 种差分格式的数值结果更靠近准确解, 且 CDFT 差分格式的运算量少. 6 种原始差分格式中, 精度最差和次差的一阶和二阶迎风格式之 CDFT 格式的数值结果分别比原始 2 种二阶精度 TVD 格式和最好的原始五阶 ENO 格式的数值结果更靠近准确解. 6 种 CDFT 格式数值结果之间的相对差异比原始 6 种差分格式数值结果之间的相对差异要小. 上述结果说明对计算精度和计算效率的提高, CDFT 格式比提高 Burgers 差分格式 (即

离散 Burgers 方程得到的差分格式)精度和改进 Burgers 差分格式形式更有效.

表 1 激波边界层干扰流动计算(TVD 格式)的步长 Re 数 R_y 和 R_x

y	$x = 0.534\ 98$		$x = 1.069\ 96$		$x = 1.316\ 87$	
	R_y	R_x	R_y	R_x	R_y	R_x
2.277 2 $\times 10^{-4}$	2.746 67 $\times 10^{-5}$	130.092 0	1.844 78 $\times 10^{-5}$	85.718 99	7.161 35 $\times 10^{-5}$	8.639 522
1.428 6 $\times 10^{-3}$	9.554 91 $\times 10^{-4}$	837.549 3	5.635 64 $\times 10^{-4}$	548.483 4	2.307 14 $\times 10^{-3}$	111.814 4
3.275 3 $\times 10^{-3}$	8.615 27 $\times 10^{-3}$	2 138.001	4.092 31 $\times 10^{-3}$	1 336.993	1.916 56 $\times 10^{-2}$	456.627 4
6.112 6 $\times 10^{-3}$	5.965 09 $\times 10^{-2}$	5 136.930	2.184 51 $\times 10^{-2}$	2 919.547	0.107 30	1 410.622
1.046 6 $\times 10^{-2}$	0.220 39	8 906.021	0.109 82	6 531.263	0.511 76	3 680.890
1.713 4 $\times 10^{-2}$	0.365 99	9 276.611	0.274 54	9 173.983	1.759 2	8 766.472
2.169 0 $\times 10^{-2}$	0.457 42	9 283.391	0.340 47	9 265.353	2.220 0	9 411.724
2.731 6 $\times 10^{-2}$	0.572 72	9 288.878	0.414 69	9 273.523	2.565 8	9 453.478
3.425 2 $\times 10^{-2}$	0.718 66	9 295.452	0.504 22	9 279.521	2.859 3	9 443.521
4.279 3 $\times 10^{-2}$	0.903 89	9 297.031	0.613 05	9 281.052	3.074 5	9 424.580
5.329 0 $\times 10^{-2}$	1.141 6	9 299.096	0.746 38	9 281.158	3.160 9	9 399.714
6.616 0 $\times 10^{-2}$	1.451 0	9 302.421	0.911 74	9 282.509	3.071 1	9 374.920
8.189 8 $\times 10^{-2}$	1.863 1	9 305.510	1.115 6	9 282.745	2.775 8	9 350.687
0.101 0	2.438 5	9 310.595	1.363 6	9 283.453	2.282 0	9 332.409
0.112 1	2.826 8	9 314.052	1.506 9	9 283.807	1.953 0	9 326.233
0.124 3	3.325 9	9 318.652	1.666 6	9 284.220	1.557 4	9 323.276
0.137 7	4.005 1	9 325.478	1.842 4	9 284.976	1.038 4	9 323.759
0.152 4	4.981 9	9 335.786	2.035 4	9 286.049	0.347 79	9 328.511
0.168 5	6.381 1	9 350.557	2.241 8	9 287.847	0.661 03	9 338.252
0.205 4	9.070 9	9 369.164	2.651 7	9 292.413	4.445 8	9 381.431
0.249 1	10.119	9 362.371	2.784 1	9 302.298	13.824	9 472.586
0.300 4	6.422 9	9 312.703	1.586 0	9 327.588	32.464	9 611.922
0.360 2	1.613 7	9 263.827	4.384 1	9 396.148	49.550	9 706.289
0.428 7	0.254 77	9 252.116	25.264	9 576.689	62.547	9 754.487
0.506 2	6.783 83 $\times 10^{-2}$	9 250.821	52.248	9 750.683	71.466	9 781.236
0.592 3	0.988 22	9 256.077	74.253	9 781.244	75.160	9 811.669
0.686 3	9.498 5	9 301.968	93.368	9 743.705	82.636	9 807.203
0.786 9	60.562	9 537.860	103.36	9 722.801	95.665	9 761.245
0.892 2	104.13	9 691.162	108.12	9 709.118	106.51	9 718.011
1.000 0	110.37	9 729.432	110.37	9 729.432	110.37	9 729.432

y	$x = 1.604\ 94$		$x = 1.851\ 85$		$x = 2.098\ 77$	
	R_y	R_x	R_y	R_x	R_y	R_x
2.277 2 $\times 10^{-4}$	6.441 70 $\times 10^{-5}$	10.106 72	8.090 51 $\times 10^{-6}$	30.617 18	4.564 71 $\times 10^{-5}$	9.937 086
1.428 6 $\times 10^{-3}$	4.784 48 $\times 10^{-4}$	59.721 32	1.772 50 $\times 10^{-4}$	160.386 8	1.412 44 $\times 10^{-3}$	20.394 21
3.275 3 $\times 10^{-3}$	1.564 87 $\times 10^{-3}$	104.567 6	3.612 44 $\times 10^{-4}$	258.600 1	1.006 89 $\times 10^{-2}$	98.138 38
6.112 6 $\times 10^{-3}$	9.911 80 $\times 10^{-4}$	88.717 18	4.976 15 $\times 10^{-3}$	201.270 8	4.564 76 $\times 10^{-2}$	555.277 6
1.046 6 $\times 10^{-2}$	3.863 58 $\times 10^{-2}$	152.156 0	6.311 36 $\times 10^{-2}$	266.616 7	0.179 35	1 747.374
1.713 4 $\times 10^{-2}$	0.318 95	1 142.250	0.432 50	1 857.157	0.906 68	6 476.253
2.169 0 $\times 10^{-2}$	1.123 49	3 762.446	1.387 6	4 695.698	1.562 5	8 770.020
2.731 6 $\times 10^{-2}$	3.220 2	7 917.601	3.068 4	8 308.229	2.233 5	9 572.673
3.425 2 $\times 10^{-2}$	4.713 7	9 557.988	4.441 6	9 630.725	2.967 4	9 986.661
4.279 3 $\times 10^{-2}$	5.724 3	9 782.932	5.663 0	9 826.449	3.887 8	10 009.57
5.329 0 $\times 10^{-2}$	6.591 4	9 826.441	6.980 0	9 855.720	5.120 2	9 998.879
6.616 0 $\times 10^{-2}$	7.180 0	9 862.795	8.405 1	9 872.445	6.802 9	9 983.176
8.189 8 $\times 10^{-2}$	7.078 4	9 905.324	9.756 9	9 903.490	9.108 4	9 962.316
0.101 0	5.736 0	9 954.338	10.670	9 943.644	12.233	9 935.944
0.112 1	4.465 1	9 976.690	10.774	9 969.670	14.099	9 922.592
0.124 3	2.677 8	9 993.755	10.486	9 999.972	16.140	9 909.870
0.137 7	0.275 09	10 005.01	9.848 4	10 033.98	18.201	9 901.701

表 1(续)

y	x = 1.604 94		x = 1.851 85		x = 2.098 77	
	R _y	R _x	R _y	R _x	R _y	R _x
0.152 4	2.897 2	10 000.68	8.866 5	10 068.64	20.213	9 897.896
0.168 5	7.089 4	9 986.535	7.667 2	10 100.33	22.134	9 897.644
0.205 4	19.183	9 912.457	6.371 1	10 136.83	25.689	9 906.099
0.249 1	34.654	9 821.048	7.838 0	10 135.70	25.777	9 954.709
0.300 4	47.889	9 775.915	14.648	10 090.91	18.095	10 059.35
0.360 2	58.204	9 764.468	37.995	9 933.579	14.073	10 108.94
0.428 7	67.202	9 763.828	61.772	9 804.446	18.629	10 092.80
0.506 2	73.350	9 767.161	74.878	9 769.745	44.867	9 954.524
0.592 3	82.037	9 773.356	83.436	9 764.286	76.926	9 798.374
0.686 3	85.144	9 792.019	89.736	9 765.243	89.123	9 761.579
0.786 9	88.316	9 795.940	91.775	9 772.344	94.545	9 750.910
0.892 2	94.382	9 776.321	91.688	9 783.306	95.953	9 763.785
1.000 0	110.37	9 729.432	110.37	9 729.432	110.37	9 729.432

表 2 CDFT 差格式和原始一阶迎风(1-UW)、二阶迎风(2-UW) 差格式数值结果及相对误差
(Re = 10⁴, Rc = 2.3)

x _i ×1 000	CDFT(1-UW)		1-UW		CDFT(2-UW)		2-UW	
	u _i	R. E.	u _i	R. E.	u _i	R. E.	u _i	R. E.
- 5.00	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.75	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.50	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.25	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.00	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.75	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.50	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.25	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 9	0.000 000 1	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.00	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 6	0.000 000 4	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 2.75	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 998 8	0.000 001 2	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 9	0.000 000 1
- 2.50	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 995 7	0.000 004 3	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 6	0.000 000 4
- 2.25	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 984 9	0.000 015 1	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 998 2	0.000 001 8
- 2.00	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 947 3	0.000 052 7	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 992 0	0.000 008 0
- 1.75	1.000 000 0	- 0.000 000 1	0.999 815 6	0.000 184 4	1.000 000 0	- 0.000 000 1	0.999 964 3	0.000 035 7
- 1.50	1.000 000 0	- 0.000 000 6	0.999 354 5	0.000 645 3	1.000 000 0	- 0.000 000 6	0.999 840 4	0.000 159 0
- 1.25	1.000 000 0	- 0.000 007 5	0.997 741 4	0.002 256 3	1.000 000 0	- 0.000 007 5	0.999 286 6	0.000 706 4
- 1.00	1.000 000 0	- 0.000 090 8	0.992 101 2	0.007 870 1	1.000 000 0	- 0.000 090 8	0.996 812 4	0.003 106 7
- 0.75	1.000 000 0	- 0.001 105 5	0.972 432 4	0.027 212 2	1.000 000 0	- 0.001 105 6	0.985 779 6	0.013 304 1
- 0.50	0.999 999 9	- 0.013 385 6	0.904 463 8	0.090 827 8	1.000 000 0	- 0.013 385 7	0.937 010 8	0.052 938 0
- 0.25	0.762 049 7	0.113 160 5	0.677 032 7	0.252 943 3	0.799 999 9	0.060 354 7	0.729 801 3	0.162 348 7
0.00	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0

对激波边界层二维干扰流动计算,采用可压缩二维 NS 方程组^[1]. 为了反映薄边界层和提高计算精度,把物理坐标(x, y)变换到(ξ, η),

$$\xi = x, \quad \eta = 1 - \frac{\ln\left(\frac{+1 - y_1}{-1 + y_1}\right)}{\ln\frac{+1}{-1}}, \quad (14)$$

其中 y₁ = y/h, h 为计算区域高度, 1 < y₁ < ∞, 越接近于 1, 壁面附近的法向网格越密. 图 1 和图 2 分别给出壁面摩阻和压力分布, 实验^[11]条件是 M = 2.0, Re = 2.96 × 10⁵, T = 293 K, 激波入射角 = 32.585°; 原始 Roe 形式 TVD 格式^[8]之数值结果以及相应 CDFT 差格式的

数值结果均与实验点较好相符,CDFT 格式所需计算时间约是原始 Roe TVD 格式计算时间的 1/3 ~ 1/2. 表1给出 x 方向6个位置上流向和法向步长 Re 数 R_x 和 R_y 随法向坐标 y 的变

表 3 CDFT 差分格式和原始 2 种二阶 TVD 差分格式数值结果及相对误差
($Re = 10^4, R_c = 2.3$)

x_i ×1 000	CDFT(TVD-1)		TVD-1		CDFT(TVD-2)		TVD-2	
	u_i	R. E.	u_i	R. E.	u_i	R. E.	u_i	R. E.
- 5.00	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.75	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.50	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.25	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.00	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.75	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.50	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.25	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.00	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 2.75	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 9	0.000 000 1	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 9	0.000 000 1
- 2.50	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 6	9.000 000 4	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 6	0.000 000 4
- 2.25	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 998 1	0.000 001 9	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 998 4	0.000 001 6
- 2.00	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 991 3	0.000 008 7	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 992 8	0.000 007 2
- 1.75	1.000 000 0	- 0.000 000 1	0.999 961 1	0.000 038 9	1.000 000 0	- 0.000 000 1	0.999 967 7	0.000 032 2
- 1.50	1.000 000 0	- 0.000 000 6	0.999 826 0	0.000 173 4	1.000 000 0	- 0.000 000 6	0.999 855 6	0.000 143 8
- 1.25	1.000 000 0	- 0.000 007 5	0.999 222 5	0.000 770 7	1.000 000 0	- 0.000 007 5	0.999 354 8	0.000 638 2
- 1.00	1.000 000 0	- 0.000 090 8	0.996 526 7	0.003 394 3	1.000 000 0	- 0.000 090 8	0.997 116 3	0.002 800 9
- 0.75	1.000 000 0	- 0.001 105 6	0.984 520 7	0.014 599 7	1.000 000 0	- 0.001 105 6	0.987 124 6	0.011 923 3
- 0.50	1.000 000 0	- 0.013 385 7	0.931 743 0	0.058 891 0	1.000 000 0	- 0.013 385 7	0.942 752 5	0.046 525 3
- 0.25	0.788 514 8	0.075 799 3	0.712 681 5	0.190 270 4	0.814 916 4	0.040 945 6	0.750 210 0	0.130 728 2
0.00	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0

表 4 CDFT 差分格式和原始三阶 ENO (3-ENO) 和五阶 ENO (5-ENO) 差分格式数值结果及相对误差
($Re = 10^4, R_c = 2.3$)

x_i ×1 000	CDFT(3-ENO)		3-ENO		CDFT(5-ENO)		5-ENO	
	u_i	R. E.	u_i	R. E.	u_i	R. E.	u_i	R. E.
- 5.00	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.75	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.50	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.25	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 4.00	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.75	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.50	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.25	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 3.00	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 2.75	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 2.50	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 9	0.000 000 1	1.000 000 0	0.000 000 0	1.000 000 0	0.000 000 0
- 2.25	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 5	0.000 000 5	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 999 8	0.000 000 2
- 2.00	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 997 2	0.000 002 7	1.000 000 0	0.000 000 0	0.999 998 8	0.000 001 2
- 1.75	1.000 000 0	- 0.000 000 1	0.999 986 1	0.000 013 8	1.000 000 0	- 0.000 000 1	0.999 993 3	0.000 006 7
- 1.50	1.000 000 0	- 0.000 000 6	0.999 930 2	0.000 069 2	1.000 000 0	- 0.000 000 6	0.999 962 4	0.000 037 0
- 1.25	1.000 000 0	- 0.000 007 5	0.999 648 5	0.000 344 2	1.000 000 0	- 0.000 007 5	0.999 789 3	0.000 203 3
- 1.00	1.000 000 0	- 0.000 090 8	0.998 229 8	0.001 682 3	1.000 000 0	- 0.000 090 8	0.998 819 7	0.001 090 8
- 0.75	1.000 000 0	- 0.001 105 6	0.991 090 7	0.007 873 9	1.000 000 0	- 0.001 105 6	0.993 391 2	0.005 539 9
- 0.50	1.000 000 0	- 0.013 385 7	0.955 304 1	0.032 775 1	1.000 000 0	- 0.013 385 7	0.963 059 4	0.024 458 4
- 0.25	0.839 087 9	0.010 959 2	0.779 422 3	0.088 349 2	0.848 649 5	- 0.000 431 2	0.791 271 6	0.072 051 2
0.00	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0

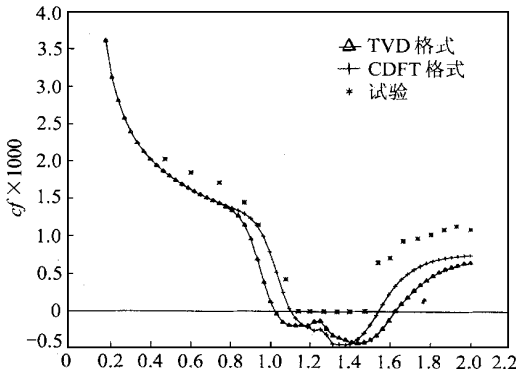


图 1 激波边界层干扰问题的壁面摩擦分布

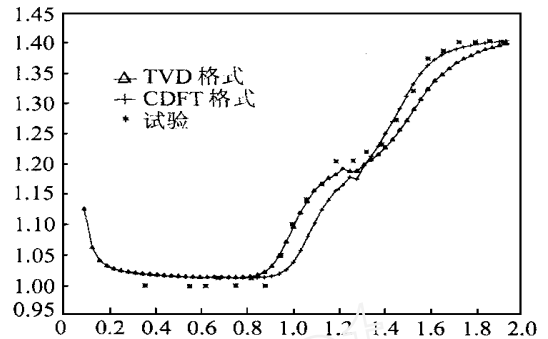


图 2 激波边界层干扰问题的壁面压力分布

化, 网格加密 10 倍, 即取 650×650 时, 表 4 中的 R_x 和 R_y 分别约减少 10 倍. 表 1 数据进一步数值地说明离散流体理论在粘性流动计算中的意义和采用 CDFT 算法的必要性. 值得指出在 NS 离散方程中加开关的 CDFT 算法, 不仅实施方便, 精度好, 且可大大节省机时. 此外, 不论对 Burgers 方程计算还是对激波边界层干扰流动计算, CDFT 格式的实际计算均没有出现区域分裂算法^[3]中的边界匹配问题.

最后指出, 流动计算的 CDFT 算法提出了不少值得进一步研究的课题, 例如粘性本构关系的完善化, 部分单元满足、部分单元不满足连续介质近似的问题以及湍流问题等.

参 考 文 献

- 1 Anderson D A, Tannehill J D, Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. New York: Hemisphere, 1984
- 2 Ecer A, Periaux J, Satofuka N, et al. Parallel Computational Fluid Dynamics. North-Holland. Elsevier Science, 1996
- 3 Gowinski R, eds. In: Proceedings of the First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations Philadelphia, USA, 1988
- 4 高 智. 流场计算中数值近似与力学近似相结合的几个问题. 中国学术期刊文摘(科技快报), 1997, 3(5): 615 ~ 617
- 5 高 智. 流场离散单元流动的流体理论和耦合离散流体理论的算法. 中国学术期刊文摘(科技快报), 1998, 4(4): 474 ~ 477
- 6 Cao Z. A higher-order accurate upwind compact difference scheme for the convective diffusion equation. In: Proceedings of Asia Workshop on Computational Fluid Dynamics, Sept. Sichuan, China, 1994, 18 ~ 24
- 7 高 智. 简化 Navier-Stokes 方程的层次结构及其力学内涵和应用. 中国科学, A 辑, 1988, (6): 625 ~ 640
- 8 Roe P L. Some contributions to the modelling of discontinuous flows. In: Lectures in Applied Mathematics, 1985, 22: 163 ~ 189
- 9 Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes III. J Comp Phys, 1987, 71: 231 ~ 303
- 10 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II. J Comp Phys, 1989, 83: 32 ~ 78
- 11 Hakkinen R J, Greber I, Trilling L, et al. The interaction of an oblique shock wave with a laminar boundary layer. In: NASA Memo 2-18-59w March, 1959

附录 A 文中使用的诸差分格式

考虑如下双曲守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \tag{A1}$$

其中 $f(u)$ 为通量函数, 可分裂为两部分, $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$, $\frac{df^+(u)}{du} \geq 0, \frac{df^-(u)}{du} < 0$. 对方程 (A1), 半离散化的守恒型差分格式如下:

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}})}{x} = 0, \tag{A2}$$

数值通量可分解为 $h_{j+\frac{1}{2}} = h_{j+\frac{1}{2}}^+ + h_{j+\frac{1}{2}}^-$. 本文中, 我们使用了以下差分格式:

(1) 一阶迎风格式

$$\begin{cases} h_{j+\frac{1}{2}}^+ = f_j^+, \\ h_{j+\frac{1}{2}}^- = f_{j+1}^-. \end{cases} \tag{A3}$$

(2) 二阶迎风格式

$$\begin{cases} h_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{3}{2}f_j^+ - \frac{1}{2}f_{j-1}^+, \\ h_{j+\frac{1}{2}}^- = -\frac{1}{2}f_{j+2}^- + \frac{3}{2}f_{j+1}^-. \end{cases} \tag{A4}$$

(3) TVD 格式 1

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[f_j + f_{j+1}] + \frac{1}{2}[\bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\phi}_{j-\frac{1}{2}}] u_{j+\frac{1}{2}}, \tag{A5}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}} &= |\phi_{j+\frac{1}{2}}|, \quad \bar{\phi}_{j-\frac{1}{2}} = |\phi_{j-\frac{1}{2}}|, \\ \phi_{j+\frac{1}{2}} &= \begin{cases} \frac{f_{j+1} - f_j}{u_{j+\frac{1}{2}}}, & u_{j+\frac{1}{2}} > 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_j, & u_{j+\frac{1}{2}} < 0, \end{cases} \\ \phi(z) &= \begin{cases} |z|, & |z| \geq 1, \\ \frac{2+z^2}{2}, & |z| < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$\bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}} = \phi(r)$ 为限制器函数, $\phi(z)$ 是 z 的修正函数.

$$r = \frac{u_{j+1} - u_j}{u_{j+\frac{1}{2}}}, \quad \phi(z) = \text{sgn}(z),$$

$$\phi(r) = \min(\text{mod}(1, r), r).$$

(4) TVD 格式 2

$$\begin{cases} h_{j+\frac{1}{2}}^+ = f_j^+ + \frac{1}{2} ms\left(f_{j+\frac{1}{2}}^+, f_{j-\frac{1}{2}}^+\right), \\ h_{j+\frac{1}{2}}^- = f_{j+1}^- - \frac{1}{2} ms\left(f_{j+\frac{3}{2}}^-, f_{j+\frac{1}{2}}^-\right), \end{cases} \tag{A6}$$

$$ms(a, b) = \begin{cases} a & |a| \leq |b|, \\ b & |a| > |b|. \end{cases}$$

(5) 三阶 ENO 格式

$$h_{j+\frac{1}{2}}^+ = \begin{cases} f_j^+ + \frac{1}{2} f_{j+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{6} ms(D_j^+, D_{j+1}^+), & |f_{j+\frac{1}{2}}^+| < |f_{j-\frac{1}{2}}^+|, \\ f_j^+ + \frac{1}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^+ + \frac{1}{3} ms(D_j^+, D_{j-1}^+), & |f_{j+\frac{1}{2}}^+| > |f_{j-\frac{1}{2}}^+|, \end{cases} \quad (A7)$$

$$h_{j+\frac{1}{2}}^- = \begin{cases} f_{j+1}^- - \frac{1}{2} f_{j+\frac{3}{2}}^- + \frac{1}{3} ms(D_{j+1}^-, D_{j+2}^-), & |f_{j+\frac{3}{2}}^-| < |f_{j+\frac{1}{2}}^-|, \\ f_{j+1}^- - \frac{1}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{6} ms(D_j^-, D_{j+1}^-), & |f_{j+\frac{3}{2}}^-| > |f_{j+\frac{1}{2}}^-|, \end{cases} \quad (A8)$$

其中 $D_j^\pm = f_{j+\frac{1}{2}}^\pm - f_{j-\frac{1}{2}}^\pm$.

(6) 五阶 ENO 格式

由(A7)式中 2 式分别得到 2 个四阶通量

$$h_{j+\frac{1}{2}}^{1+} = f_j^+ + \frac{1}{2} f_{j+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{6} (c_1^+ D_j^+ + c_2^+ D_{j+1}^+), \quad (A9)$$

$$h_{j+\frac{1}{2}}^{2+} = f_j^+ + \frac{1}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^+ + \frac{1}{3} (c_3^+ D_j^+ + c_4^+ D_{j-1}^+), \quad (A10)$$

其中

$$c_1^+ = \frac{1}{1 + c_2^+}, \quad c_2^+ = \frac{2}{1 + c_2^+}, \quad c_3^+ = \frac{3}{3 + c_4^+}, \quad c_4^+ = \frac{4}{3 + c_4^+},$$

$$c_1^1 = \frac{C_1^1}{(c_1^1 + W_1)}, \quad c_2^1 = \frac{C_2^1}{(c_2^1 + W_2)}, \quad c_3^1 = \frac{C_1^2}{(c_3^1 + W_3)}, \quad c_4^1 = \frac{C_2^2}{(c_4^1 + W_4)}.$$

再由(A9), (A10) 式得五阶 ENO 格式

$$h_{j+\frac{1}{2}}^+ = c_1^+ h_{j+\frac{1}{2}}^{1+} + c_2^+ h_{j+\frac{1}{2}}^{2+}, \quad (A11)$$

其中

$$c_1^+ = \frac{1}{1 + c_2^+}, \quad c_2^+ = \frac{2}{1 + c_2^+},$$

$$c_1^1 = \frac{C_1}{(c_1^1 + W_3^1)}, \quad c_2^1 = \frac{C_2}{(c_2^1 + W_3^2)},$$

这里

$$\begin{cases} IS_0 = \frac{13}{12} (f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 + \frac{1}{4} (f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2, \\ IS_1 = \frac{13}{12} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 + \frac{1}{4} (f_{j-1} - f_{j+1})^2, \\ IS_2 = \frac{13}{12} (f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{1}{4} (3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2, \end{cases} \quad (A12)$$

$$W_1 = IS_1, \quad W_2 = IS_2, \quad W_3 = IS_1, \quad W_4 = IS_0,$$

$$W_5^1 = IS_2, \quad W_5^2 = IS_0,$$

$$C_1^1 = \frac{1}{2}, \quad C_2^1 = \frac{1}{2}, \quad C_1^2 = \frac{3}{4}, \quad C_2^2 = \frac{1}{4},$$

$$C_1 = \frac{3}{5}, \quad C_2 = \frac{2}{5}.$$

为一小参数, 本文取 $\epsilon = 10^{-20}$. $h_{j+\frac{1}{2}}^-$ 与 $h_{j+\frac{1}{2}}^+$ 关于 $j + \frac{1}{2}$ 对称, 这里不再给出.

附录 B 可压缩二维 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y}, \quad (\text{B1})$$

其中

$$\begin{aligned} U &= (\quad, u, v, e_t)^T, & F &= (u, u^2 + p, uv, (e_t + p)u)^T, \\ G &= (v, uv, v^2 + p, (e_t + p)v)^T, \\ G_v &= (0, \quad_{xy}, \quad_{yy}, u_{xy} + v_{yy} + q_y)^T, & e_t &= e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \\ \quad_{xx} &= \frac{\mu}{Re} \cdot \frac{2}{3}(2u_x - v_y), & \quad_{xy} &= \frac{\mu}{Re} \cdot (u_y + v_x), \quad_{yy} = \frac{\mu}{Re} \cdot \frac{2}{3}(2v_y - u_x), \\ q_x &= \frac{\mu}{Re} \cdot \frac{1}{(- 1) M^2 P_r} \cdot T_x, & q_y &= \frac{\mu}{Re} \cdot \frac{1}{(- 1) M^2 P_r} \cdot T_y. \end{aligned}$$

状态方程

$$T = \frac{M^2 P}{\quad}, \quad (\text{B2})$$

粘性系数采用 Sutherland 公式

$$\mu = T^{\frac{3}{2}} \frac{1+C}{T+C}, \quad C = \frac{110.4}{T}. \quad (\text{B3})$$