

非传播孤立波和表面张力¹⁾

周显初

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 讨论关于表面张力的实验与理论分析之间的矛盾. 把表面张力的能量当作高阶小量、导出了非传播孤立波的基本方程, 得到的解与实验结果相符.

关键词 非传播孤立波, 表面张力, 立方 Schrodinger 方程, 孤立波

自从非传播孤立波在 1984 年由美国访美的访问学者吴君汝博士报道后^[1], 引起了各方面的注意. 因为该孤立波的横向振动的波长较短, 所以很多学者讨论了表面张力对非传播孤立波的影响^[2,3]. 在这些讨论文章中都把表面张力的影响当作一阶量, 对水波的频率和波长关系进行修正, 并把修正的结果带入到后面的高阶项中去. 按照这种考虑方法, 周显初等人^[3]仔细考虑了表面张力对非传播孤立波的影响, 把 $kh \sim \sigma = \alpha k^2 / \rho g$ (其中 k 为波数, h 为水深, α 是表面张力系数, ρ 是液体的密度, g 是重力加速度) 平面分成如图 1 所示的三个参数区. 按照理论分析, 在参数区 (1) 和 (2) 可以形成 Sech 形状的呼吸孤立波, 在另一个参数区 (3) 可以形成纽结孤立波, 但不能形成 Sech 形状的呼吸孤立波. 实验的结果则与此不同, 只要 $kh > 1$, 不管在那一个参数区域都会出现 Sech 形状的呼吸孤立波. 在参数区 (3) 也只能出现呼吸孤立波, 而不能出现纽结孤立波. 为了解决这个矛盾, 南京大学的缪国庆在魏荣爵院士的指导下, 重新做了这个实验^[4], 结果相同. 他们给出了表面张力和自由面位移的所含的能量的表达式, 通过对吴君汝的实验的典型进行计算, 发现表面张力对应的能量只是自由面位移能量的 3% ~ 5%, 因而不是一阶量, 而是高阶小量. 还可以从另一个角度来看. 在流体表面的 Bernoulli 方程中, 强迫振动项的能量量级为 $4\omega_0^2 a \eta$, 其中 $2\omega_0$ 为强迫振动圆频率, a 为其振幅, η 为自由表面的位移. 对应的表面张力的能量的量级为 $\alpha k^2 \eta / \rho$. 对应于吴君汝的实验的典型数据为 $\omega_0 = 28.9/s$, $a = 0.1 \text{ cm}$, $k = 1.05 \text{ cm}^{-1}$, $\alpha = 40 \times 10^{-5} \text{ N/cm}$, $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$. 这二种能量之比为 $4\omega_0^2 a \rho / \alpha k^2 = 7.6$. 这说明表面张力的能量与强迫激励的能量为同一量级. 因此, 参考文献 [2,3] 中关于表面张力的结论需要重新考虑.

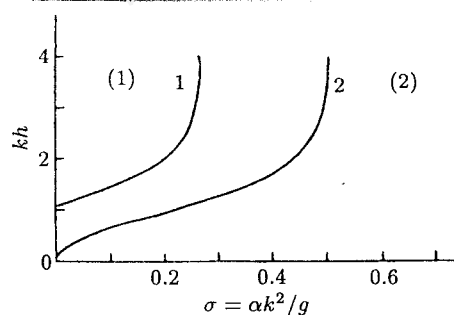


图 1 参数区域

Fig.1 Parameter region

我们从水波的基本方程出发,

1997-12-12 收到第一稿, 1998-05-05 收到修改稿.

¹⁾ 国家自然科学基金 (19572071) 和国家基础性研究重大项目“非线性科学”资助项目.

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h \leq z \leq \eta(x, y, t) \quad (1)$$

$$\phi_x = 0, \quad x = \pm L \text{ (端壁)} \quad (2)$$

$$\phi_y = 0, \quad y = 0, b \text{ (侧壁)} \quad (3)$$

$$\phi_z = 0, \quad z = -h \text{ (底面)} \quad (4)$$

$$\phi_z = \eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y, \quad z = \eta(x, y, t) \text{ (自由面)} \quad (5)$$

$$\phi_t + g(1 + 4\omega_0^2 a \cos 2\omega_0 t) \eta + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 = \frac{\alpha}{\rho} (\eta_{yy} + \eta_{xx}), \quad z = \eta(x, y, t) \quad (6)$$

其中 ϕ 为速度势, z 轴铅直向上, 以静止液面为零点, $L \gg b$. 把自由面上的条件合并, 给出 ϕ 的单一条件, 引入多重尺度 $x_n = \varepsilon^n x$, $t_n = \varepsilon^n t$, 把 ϕ, η 展开为

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \eta \end{pmatrix} = \sum_{n=1} \varepsilon^n \begin{pmatrix} \phi_n(x, x_1, \dots; y, z, t, t_1, \dots) \\ \eta_n(x, x_1, \dots; y, t, t_1, \dots) \end{pmatrix} \quad (7)$$

可得各阶的方程及定解条件. 注意到强迫振动项和表面张力项为三阶小量, 即可得一阶解为

$$\phi_1 = \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} [A(Z+Y) + c.c.] \quad (8)$$

$$\eta_1 = \frac{i\omega}{g} [A(Z+Y) - c.c.] \quad (9)$$

其中, $\omega^2 = gkT$, $T = \tanh kh$, $k = \pi/b$, $Z = e^{i(ky-\omega t)}$, $Y = e^{-i(ky+\omega t)}$, $c.c.$ 表示前一项的复共轭. 一阶解中不含 x , A 是缓变量 x_1, x_2, t_1, t_2 的函数. 这里我们还认为强迫共振频率之半与本征频率之差为小量, 即

$$\omega_0 - \omega = \varepsilon^2 \omega_2 \quad (10)$$

二阶问题及其解也很容易给出, 可由文献 [3] 的相应结果令 $\sigma = 0$ 而得到, 没有任何困难, 但却相当繁杂, 为节省篇幅, 这里从略. 从三阶的可解性条件可得

$$2\omega i A_{t_2} + \frac{\omega \omega'}{k} A_{x_1, x_1} + \nu |A|^2 A + 2\omega \left[(\omega_0 - \omega) - \frac{\sigma}{2} \omega \right] A + \frac{2\omega_0^2 \omega^2 a}{g} A^* = 0 \quad (11)$$

其中 * 号表示复共轭,

$$\nu = \frac{k^4}{2} (6T^4 - 5T^2 + 16 - 9T^{-2}) \quad (12)$$

式 (11) 与不考虑表面张力情况的区别只是把 A 那一项的系数由 $2\omega(\omega_0 - \omega)$ 换为 $2\omega \left[(\omega_0 - \omega) - \frac{\sigma}{2} \omega \right]$, 而 ν 的表达式 (12) 不变, 与表面张力系数无关.

式 (11) 的解取决于 ν . 当 $kh > 1.022$ 时, $\nu > 0$, 式 (11) 有下面的 Sech 形状的呼吸孤立波解

$$\varepsilon A = i \sqrt{\frac{2}{\nu}} \left\{ 2\omega^2 \omega_0^2 a / g - 2\omega \left[(\omega_0 - \omega) - \frac{\sigma}{2} \omega \right] \right\} \cdot \text{sech} \left[\sqrt{\frac{k}{\omega \omega'}} \left\{ 2\omega^2 \omega_0^2 a / g - 2\omega \left[(\omega_0 - \omega) - \frac{\sigma}{2} \omega \right] \right\} x \right] \quad (13)$$

当 $kh < 1.022$ 时, $\nu < 0$, 式 (11) 有纽结孤立波

$$\varepsilon A = \sqrt{\frac{-2}{v} \left\{ \omega^2 \omega_0^2 a / g + \omega \left[(\omega_0 - \omega) - \frac{\sigma}{2} \omega \right] \right\}}$$

$$\tanh \left[\sqrt{\frac{k}{\omega \omega'}} \left\{ \omega^2 \omega_0^2 a / g + \omega \left[(\omega_0 - \omega) - \frac{\sigma}{2} \omega \right] \right\} x \right] \quad (14)$$

式 (11) 还有 Sech 形状类似于式 (13) 的实数解及 Tanh 形状类似于式 (14) 的纯虚数解, 但这些解都得出下面的结论, 激励振幅越大, 孤立波的波幅越小, 这与实验的结果恰好相反, 因而只能舍弃不要。

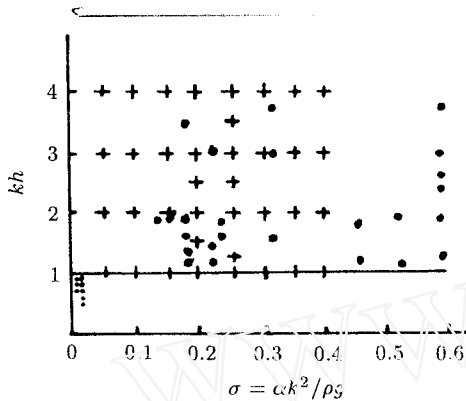


图 2 参数区域及实验点

- + 文献 [4] 的实验点 (Sech 孤立波)
- 文献 [3] 的实验点 (Sech 孤立波)
- 文献 [4] 的实验点 (纽结孤立波)

Fig.2 Parameter region and experimental points

- + point of Ref. [4] (soliton of sech form)
- point of Ref. [3] (soliton of sech form)
- point of Ref. [4] (kink soliton)

解 (13), (14) 在参数平面 $kh-\sigma$ 的参数区域示于图 2. 以直线 $k = 1.002$ 为界, 在此直线的上面, Sech 形状的孤立波解是可能的, 而在此直线下面 th 形状的纽结孤立波解是可能的. 图 2 还表明了文献 [3, 4] 的实验点, 由图 2 可知, 解 (13) 和 (14) 与文献 [3, 4] 的实验相符合. 由于在 $kh \geq 1.022$ 上全是 $\nu > 0$ 的区域, 也解释了文献 [3] 的矛盾. 纽结孤立波出现在 $kh \leq 1, \sigma$ 较小的区域, 对于 σ 较大的区域实验中未见到纽结孤立波也没有 Sech 形状的孤立波, 原因还不清楚. 从解 (13) 还可看出, 表面张力系数 α 或 σ 增大时, 孤立波波高增加、波宽变窄, 这也与崔洪农 [5] 等人的实验结果相符合. 遗憾的是式 (11) 的解仍然不能解释实验中观察到的现象: 当表面张力大到一定程度之后, 非传播孤立波再也不能出现, 所以实验中都要在纯水中加入一些肥皂水, 洗涤剂或甘油, 以减少表面张力, 以利出现非传播孤立波。

参 考 文 献

- 1 Wu J, Keolian R, Rudnick I. Observation of a non-propagating hydrodynamic Soliton. *Phys Rev Lett*, 1984, 52: 1421~1424
- 2 Miles JW. Parametrically excited Solitary waves. *J Fluid Mech*, 1984, 148: 451~460
- 3 周显初, 崔洪农. 表面张力对非传播孤立波的影响. 中国科学, 1992, (12): 1269~1276 (Zhou Xianchu, Cui Hongnong. The effect of the surface tension on non-propagating soliton waves. *Science in China (A)*, 1993, 36: 816~824)
- 4 Miao G, Wei R. The effect of surface tension on non-propagating hydrodynamic solitons. *Phys Lett A*, 1996, 220: 87~90
- 5 崔洪农等人. 表面张力对非传播孤立波的生成及波形的影响. 水动力学研究与进展, 1988, 3(1): 46~60 (Cui Hongnong et al. The effect of the surface tension on the production and the waves form of non-propagating solitary waves. *J Hydrodynamics*, 1988, 3(1): 46~60 (in Chinese))

NON-PROPAGATING SOLITON AND SURFACE TENSION¹⁾

Zhou Xianchu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract The contradictory between experiments and theory about the effect of the surface tension on the non-propagating soliton was discussed in this article. Since the lateral wave length was short, the effect of the surface tension on the non-propagating soliton was discussed by Miles and Zhou. They modified the relation between the frequency and the wave length by the surface tension, and brought it into higher order. According to the theoretical analysis, Zhou divided the kh - σ plane into three regions (Fig.1), where $\sigma = \alpha k^2 / \rho g$, k the wave number, h the water depth, α the surface tension coefficient, and ρ the fluid density. In the regions (1) and (2), the breath soliton with the form sech can be produced, and the kink soliton can be formed in region (3). But in the experiments, the breath soliton occurred only if $kh > 1$. In the region (3), the kink soliton could not be produced and was replaced by the breath soliton when $kh > 1$. Miao calculated the energy corresponding to the surface tension and the displacement of the free surface and discovered that the energy of the former was only 3% ~ 5% of that of the latter. So, the effect of the surface tension is in the higher order, and should be reconsidered theoretically.

The surface tension was considered here as the same order with the forcing term. The governing equation was derived. The solution was obtained. It was shown that the breath soliton occurred only if $kh > 1$. It is consistent with the experiments.

Key words non-propagating soliton, surface tension, cubic Schrodinger equation, soliton

Received 12 December 1997, revised 5 May 1998.

¹⁾ The project supported by the National Natural Science Foundation of China and National Basic Research "Non-linear Science".