

带有两个共线裂纹载流薄板的温度场及热应力强度因子*

TEMPERATURE FIELD AND THERMAL STRESS INTENSITY FACTORS OF A CURRENT-CARRYING PLATE WITH TWO COLLINEAR CRACKS

刘俊杰**^{1,2} 白象忠***^{1,2} 郑坚^{2,3} 敖涛^{1,2}

(1. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004)

(2. 中国科学院 力学研究所, 国家非线性连续介质力学重点实验室(LNM), 北京 100080)

(3. 中国人民解放军军械工程学院 一系, 石家庄 050003)

LIU JunJie^{1,2} BAI XiangZhong^{1,2} ZHENG Jian^{1,2} AO Tao^{1,2}

(1. *Institute of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(2. *State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical (LNM), Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

(3. *Department of Artillery Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China*)

摘要 采用复变函数的方法, 给出带有两个等长度共线穿透裂纹的无限大载流薄板在瞬间电流作用下, 裂纹尖端附近产生的温度场的表达式, 得到温度在裂纹尖端的奇异特征。在通入垂直于裂纹的均匀电流作用下, 由于裂纹的存在, 裂纹尖端出现绕流现象, 产生焦耳热, 瞬时高温形成点热源。通过点热源在金属薄板内形成的温度场, 可以导出裂纹尖端产生的热应力强度因子表达式。将其与外载荷产生的应力强度因子叠加, 可建立通电状态下的断裂判据。算例分析表明, 点热源在裂纹尖端附近产生的热应力强度因子为负值, 可以部分抵消无穷远处施加的拉应力产生的应力强度因子的作用, 进而达到止裂的目的。文中建立带有两个等长度共线穿透裂纹载流薄板的热应力强度因子的概念。其研究结果对工程结构实施电磁热效应裂纹止裂具有理论意义和实用价值。

关键词 载流薄板 裂纹 温度场 点热源 热应力强度因子

中图分类号 O346.1 O343.6

Abstract By means of complex function, the temperature field near the crack tip in a current-carrying infinite plate with two same penetrated collinear cracks under the action of transient pulse current was provided. Singularity character of the temperature around crack tip was obtained. When sending an even electric current down the plate vertical to the crack line, the electric current was detoured near the crack tips for the existing of cracks and Joule heats was produced. The instantaneous high temperature formed the point heat source. The expressions of thermal stress intensity factors near the crack tips were calculated through the temperature field in the plate formed by point heat source. The fracture judge rule under the station of electric current-carrying was built through adding the thermal stress intensity factors to the stress factors caused by tension. The example showed that the value of thermal stress intensity factors near the crack tips caused by point heat source was minus and this could counteract parts of stress intensity factors intension caused by tension loaded in distance and the crack extension could be arrested.

The concept of thermal stress intensity factors in a current-carrying plate with two same penetrated collinear cracks was built in this article. The results of study in this work have theoretical meaning and practical value to the application of the electromagnetic thermal effects on crack prevention used in the structure of engineering projects.

Key words Current-carrying plate; Crack; Temperature field; Point heat source; Thermal stress intensity factors

Corresponding author: BAI XiangZhong, E-mail: baixiangzhong@sina.com, Tel: +86-335-8057968, Fax: +86-335-8057101

The project supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 50275128).

Manuscript received 20041229, in revised form 20050518.

* 20041229 收到初稿, 20050518 收到修改稿。

** 刘俊杰, 男, 1978 年 3 月生, 山西阳泉人, 汉族。中国船舶科学研究中心博士研究生, 燕山大学硕士, 研究方向为船舶与海洋结构物的载荷与安全可靠性、电磁热效应金属裂纹止裂。

*** 白象忠, 男, 1942 年 10 月生, 辽宁辽中人, 满族。燕山大学建筑工程与力学学院教授, 博士生导师, 研究方向为磁弹性、热磁弹性理论与应用。

1 引言

在断裂力学领域的一些研究中,利用电磁热效应来遏制裂纹的扩展已引起人们的关注。目前的工作成果主要表现在从 Maxwell 电磁场方程出发,利用积分变换等数学工具,研究导体含裂纹薄板在通入瞬间电流时的电流和温度分布^[1]。它是通入带有裂纹金属薄板一定方向瞬间电流时,利用电流在裂纹尖端产生绕流而形成的电流密度高度集中,所产生的焦耳热来达到钝化裂尖、遏制裂纹开裂目的的。

本文给出带有两个等长共线穿透裂纹的无限大载流薄板温度场的复变函数解。在通入垂直于裂纹的均匀电流作用下,由于裂纹的存在,裂纹尖端出现瞬时高温形成点热源。点热源在金属薄板内形成的温度场可以被确定出来,从而可以通过计算得出点热源在裂纹尖端产生的热应力强度因子。通过与外载荷产生的外载荷应力强度因子叠加,可建立通电状态下的断裂判据。算例分析表明,热应力强度因子可以降低无穷远处施加的拉应力产生的应力强度因子的作用,进而达到止裂的目的。

2 载流薄板内的电流强度 I 与电流密度 J

在带有共线裂纹的金属薄板上垂直于裂纹通入强度为 J_0 的电流时,根据文献[2],薄板域内的电流强度 I 与电流密度 J 有关系 $J_x = \frac{\partial I}{\partial x}, J_y = \frac{\partial I}{\partial y}$,其中, J_x, J_y 分别为 x, y 方向的电流密度。在复平面 $z = x + iy$ 内,定义一解析函数 $\phi(z)$,满足关系

$$-J_x + iJ_y = \phi(z) = \frac{\partial I}{\partial x} - i \frac{\partial I}{\partial y} \quad (1)$$

从而可以得到电流密度的模为

$$|J| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = |\phi(z)| \quad (2)$$

3 带有两条共线裂纹的导电板内的电流强度

设域 S 是 x, y 的平面域,裂纹沿直线分布在 x 轴

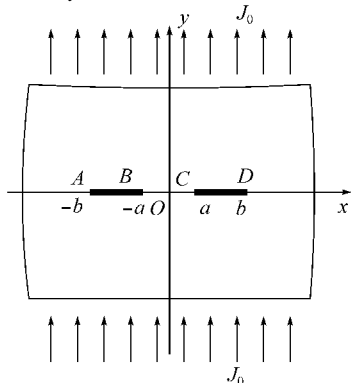


图 1 带有两个共线裂纹的载流薄板

Fig. 1 Thin current-carrying plate with two collinear cracks

上,如图 1 所示。裂纹 L_1, L_2 长度为 $2l$,关于 y 轴对称分布,并且假设这里研究的裂纹是绝缘、绝热的, $L_j = a_j, b_j; a_j, b_j (j = 1, 2)$ 为裂纹的裂尖,并且 $a_1 = a, b_1 = b, a_2 = -a, b_2 = -b$,在无穷远处通入平行于 y 轴的密度为 J_0 的瞬时电流。此时, L 上的边界条件可以写成^[3]

$$\begin{aligned} [\phi(s) - \overline{\phi(s)}]^+ + [\phi(s) - \overline{\phi(s)}]^- &= 2f(s) \\ [\phi(s) + \overline{\phi(s)}]^+ - [\phi(s) + \overline{\phi(s)}]^- &= 2g(s) \end{aligned} \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3)$$

其中 $\overline{\phi(s)}$ 是 $\phi(s)$ 的共轭复数,上标 \pm 分别表示裂纹的上下边界,上式中 $f(s)$ 和 $g(s)$ 满足迪里赫里条件^[4],且

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{i} \left[\left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^+ + \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^- \right] \\ g(s) &= \frac{1}{i} \left[\left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^+ - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^- \right] \quad (s \in L) \end{aligned}$$

因此 $\phi(z) + \overline{\phi(z)} = 2 \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)$ 。则边界问题的普遍解(3)由下面的形式给出^[5]

$$\phi(z) + \overline{\phi(z)} = \frac{1}{i} \int_L \frac{g(s) ds}{s - z} + 2 \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right) \quad (4)$$

利用非同类迪里赫里问题的解,方程式(3)有

$$\phi(z) - \overline{\phi(z)} = \frac{1}{i} \int_L \frac{f(s) ds}{s - z} + \frac{2P_2(z)}{\phi(z)} \quad (5)$$

其中 $\phi(z) = \prod_{j=1}^2 (z - a_j)^{1/2} (z - b_j)^{1/2} = [(z^2 - a^2) \times (z^2 - b^2)]^{1/2}, P_2(z) = c_0 z^2 + c_1 z + c_2$,当 $z \rightarrow \infty$ 时, $\phi(z)/z^2 \rightarrow 1$,并且 $\phi^+(s) = \phi(s)$ 和 $\phi^-(s) = -\phi(s)$,将方程(4)和(5)相加(减),得出

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \frac{P_n(z)}{\phi(z)} + \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right) \quad (6)$$

$$\overline{\phi(z)} = \overline{\phi_0(z)} - \frac{P_n(z)}{\phi(z)} + \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right) \quad (7)$$

其中

$$\phi_0(z) = \frac{1}{i2} \int_L \frac{f(s) ds}{s - z} + \frac{1}{i2} \int_L \frac{g(s) ds}{s - z} \quad (8)$$

$$\overline{\phi_0(z)} = \frac{-1}{i2} \int_L \frac{f(s) ds}{s - z} + \frac{1}{i2} \int_L \frac{g(s) ds}{s - z} \quad (9)$$

为了保证方程(6)和(8)同方程(7)和(9)是相应的共轭复数,必须有 $\overline{\phi(z)} = \phi(z), \phi^+(s) = \overline{\phi^-(s)} = -\phi^-(s) = -\phi^+(s)$ (在 L 上)。此外,多项式 $P_2(z)$ 的系数 c_0, c_1, c_2 应该是纯虚数,也就是 $\overline{c_0} = -c_0, \overline{c_1} = -c_1, \overline{c_2} = -c_2$,由条件 $\phi(z) - \overline{\phi(z)} = -2i \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)$

可以确定系数 c_0

$$c_0 = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right) = i(\nabla I) \sin = iJ_0$$

为了确定多项式 $P_2(z)$ 的其余系数 c_1, c_2 , 可以采用同一电流强度条件, 即环绕 L_j 的边界 j 有

$$Re \int_j (z) dz = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (10)$$

由裂纹绝热的边界条件可知 $f(s) = g(s) = 0(s) = 0$, 由于 J_0 平行于 y 轴, 所以 $\left(\frac{\partial I}{\partial x} \right) = 0$, 式

(6) 可以写为 $(z) = \frac{P_2(z)}{(z)}$, 将其代入式(10), 结合条件 $(z) = (z)$, $+(s) = -(s) = -(s) = -(s)$, 可得到

$$Re \int_{-a}^a \frac{P_2(s) ds}{(s)} = 0, Re \int_a^b \frac{P_2(s) ds}{(s)} = 0$$

经过求解上面的积分求得 $c_1 = 0$ $c_2 = -c_0 \times \frac{E(k)}{K(k)} b^2, k^2 = 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2$, 其中 $K(k), E(k)$ 为相应于第一类和第二类完全椭圆积分^[6]。有

$$(z) = - \frac{J_0 \left[z^2 - b^2 \frac{E(k)}{K(k)} \right]}{i \left[(z^2 - a^2)(z^2 - b^2) \right]^{1/2}} \quad (11)$$

由式(3)及式(11)可以得到

$$|J| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = | (z) | = J_0 \left\{ \left[x^2 - y^2 - b^2 \frac{E(k)}{K(k)} \right]^2 + 4x^2 y^2 \right\}^{1/2} \left\{ \left[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2 \right]^{1/4} \left[(x^2 - y^2 - b^2)^2 + 4x^2 y^2 \right]^{1/4} \right\} \quad (12)$$

很明显从上式可以看出, 在裂纹尖端电流密度是奇异的, 在无穷远处为有限值。

4 裂尖产生的热源功率的计算

在求出裂纹尖端附近的电流密度 J_x, J_y 后, 可以确定裂尖附近的热源功率为^[11]

$$Q = \int_{-h}^{+h} \frac{1}{2} (J_x^2 + J_y^2) dh = 2h |J|^2$$

式中 $2h$ 为板厚, σ 为电导率。因此由裂尖产生的热源功率为

$$Q = 2h J_0^2 \left\{ \left[x^2 - y^2 - b^2 \frac{E(k)}{K(k)} \right]^2 + 4x^2 y^2 \right\} \left\{ \left[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2 \right]^{1/2} \left[(x^2 - y^2 - b^2)^2 + 4x^2 y^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (13)$$

5 求解裂尖处的温度场

当电流流经带有共线裂纹的金属薄板时, 其对板内的温度分布影响, 相当于在裂尖处放置了一定功率的点热源。对于本文研究的问题, 相当于有 4 个分布在

裂尖处的点热源产生的温度场, 板内的温度场由两部分组成

$$T(x, y) = T_0(x, y) + T^*(x, y) \quad (14)$$

式中 $T_0(x, y)$ 是无裂纹时具有等效热源所产生的温度场, $T^*(x, y)$ 为存在裂纹时对温度场的扰动。

如图 1 所示, 板内有两个共线裂纹, 假设裂纹绝缘、绝热。并且认为板内的温度场只是由四个裂尖点热源作用产生的。

5.1 $T_0(x, y)$ 的解

由文献[7]可以得到, 在 $z_0 = a + i$ 放置点热源, 产生的温度场为

$$T_0(x, y) = 2 Re F_0(z_0, z) \quad F_0(z_0, z) = m_0 \ln(z_0 - z)$$

其中 $m_0 = -\frac{Q}{4}$ 。在两个共线裂纹问题中, 有四个点热源, 由迭加原理可得^[8]

$$F_0(z_0, z) = -\frac{1}{4} \left[Q_1 \ln(-b - z) + Q_2 \ln(-a - z) + Q_3 \ln(a - z) + Q_4 \ln(b - z) \right]$$

$$T_0(x, y) = -\frac{1}{4} \left\{ Q_1 \ln[(x + b)^2 + y^2] + Q_2 \ln[(x + a)^2 + y^2] + Q_3 \ln[(x - a)^2 + y^2] + Q_4 \ln[(x - b)^2 + y^2] \right\} \quad (15)$$

其中 σ 为材料的热传导系数, $Q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为第 i 个裂纹尖端处的热源功率。

5.2 $T^*(x, y)$ 的解

由绝热裂纹的边界条件 $\left[\frac{\partial T}{\partial n} \right] = 0$, 利用式(14)得

$$[\partial T^* / \partial n] = - [\partial T_0 / \partial n] \quad (16)$$

$T^*(x, y)$ 可以写成下面的形式^[7], $T^*(x, y) = 2 Re F^*(z)$, 其中 $F^*(z) = \frac{c}{2} + \frac{1}{2i} \int_L \frac{(s)}{s - z} ds (s - l)$,

c 为实常数, n 为裂纹边界法线方向, (s) 为定义在边界上的实函数。在边界处有^[7] $\left[\frac{\partial T^*}{\partial n} \right]^{\pm} = \pm i e^{i a_0} (s_0) - e^{i a_0} \int_L (s) K(s, s_0) ds$, 角标 \pm 分别表示上下边界的对应

值, $K(s, s_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{(s)}{s - s_0} - \frac{1}{s - s_0} \right]$, $(s) = \frac{ds}{ds} = -e^{-2i a_0}$, a_0 为边界 $\pm s_0$ 点法线与 ox 轴的夹角, 根据这里

研究的条件 $a_0 = \frac{\pi}{2}$, 由此有 $\left[\frac{\partial T^*}{\partial n} \right]^{\pm} = \mp (s_0)$, 由式(15)可得

$$\left[\frac{\partial T_0}{\partial n_0} \right]^{\pm} = \left[\frac{\partial T_0}{\partial y} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{y Q_1}{(x + b)^2 + y^2} + \right]$$

$$\left[\frac{yQ_2}{(x+a)^2+y^2} + \frac{yQ_3}{(x-a)^2+y^2} + \frac{yQ_4}{(x-b)^2+y^2} \right]$$

由式(16)有 $[\partial T^*/\partial n_0]^{\pm} = -[\partial T_0/\partial n_0]^{\pm}$, 在研究的问题中, 裂纹在 x 轴上, 对于上式中的裂纹上下边缘的纵向坐标 y 可以由裂纹张开宽度 d 代替, 则有

$$(s_0) = \pm \frac{d}{2} \left[\frac{Q_1}{(x+b)^2+d^2} + \frac{Q_2}{(x+a)^2+d^2} + \frac{Q_3}{(x-a)^2+d^2} + \frac{Q_4}{(x-b)^2+d^2} \right]$$

可得

$$F^{\pm}(z) = \frac{c}{2} \pm \frac{d}{4} \frac{1}{i} \left[\frac{Q_1}{(x+b)^2+d^2} + \frac{Q_2}{(x+a)^2+d^2} + \frac{Q_3}{(x-a)^2+d^2} + \frac{Q_4}{(x-b)^2+d^2} \right] \frac{dx}{x-z}$$

其中, c 为无热源及裂纹时的初始温度的 2 倍。若板的初始温度为 0, 裂纹张开宽度趋近于零。则有 $c = 0$ 。此时 $T^* = 0$, 表明由于共线裂纹的存在, 在裂尖产生了点热源, 温度的扰动值为零, 有 $T = T_0(x, y)$

$$T(x, y) = -\frac{1}{4} \left\{ Q_1 \ln[(x+b)^2+y^2] + Q_2 \ln[(x+a)^2+y^2] + Q_3 \ln[(x-a)^2+y^2] + Q_4 \ln[(x-b)^2+y^2] \right\} \quad (17)$$

其中 $Q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的意义同式(15)中的相同。

6 裂尖处的应力强度因子

带有裂纹的载流薄板在外载荷作用下的应力强度因子 K 可分成两部分, 一部分写作 K^T , 是由裂纹尖端点热源产生的, 称为热应力强度因子; 另一部分写作 K , 是由机械载荷 σ_1 产生的, 称为载荷应力强度因子。因此

$$K = K^T + K \quad (18)$$

6.1 热应力强度因子 K^T

带有裂纹的无限大平面薄板在通入垂直于裂纹的瞬间电流作用下, 裂纹尖端会出现电流绕流现象, 裂尖处的电流密度高度集中, 相当于放置了点热源, 点

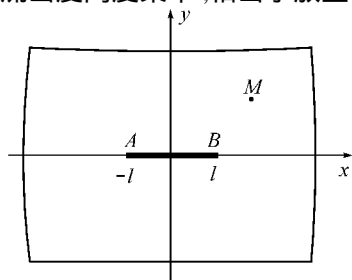


图 2 带有点热源和裂纹的金属薄板

Fig. 2 Thin plate with a point heat source and crack

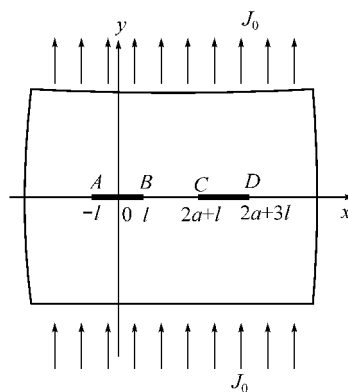


图 3 带有两个共线裂纹的载流薄板

Fig. 3 Thin current-carrying plate with two collinear cracks

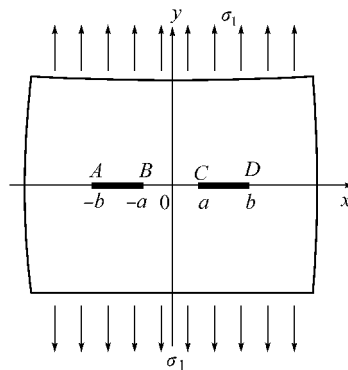


图 4 单向拉伸作用下的带有两个共线裂纹的金属薄板

Fig. 4 Thin plate with two collinear cracks under one-way tension

热源会产生热应力, 设点热源 M 坐标 (l, y) , 如图 2 所示, 由文献[9]可以计算出由点热源产生的热应力强度因子 K^T

$$K_{AM}^T = -\frac{qE_t}{2} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{l}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \frac{y}{l}\right) - (l-y) \sin\left(\frac{1}{2} \frac{y}{l}\right)}{(l-y)^2 + y^2} - \frac{qE_t}{4} \sqrt{l} - \frac{qE_t}{4} \sqrt{l} \log \left\{ \sqrt{y^2 + y^2 + R_1} + 2R_1^{1/2} \left[\cos\left(\frac{1}{2} \frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{2} \frac{y}{2}\right) \right] \right\} + \frac{qE_t}{2} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{l}} \times \left(l \log 2 - y \right) + \frac{qE_t}{2} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}} R_1^{1/2} \sin\left(\frac{1}{2} \frac{y}{2}\right) K_{BM}^T = \frac{qE_t}{2} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{l}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \frac{y}{l}\right) + (l-y) \sin\left(\frac{1}{2} \frac{y}{l}\right)}{(l-y)^2 + y^2} - \frac{qE_t}{4} \sqrt{l} - \frac{qE_t}{4} \sqrt{l} \log \left\{ \sqrt{y^2 + y^2 + R_1} + R_1 + 2R_1^{1/2} \left[\cos\left(\frac{1}{2} \frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{2} \frac{y}{2}\right) \right] \right\} + \frac{qE_t}{2} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{l}} \left(y + l \log 2 \right) + \frac{qE_t}{2} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}} R_1^{1/2} \sin\left(\frac{1}{2} \frac{y}{2}\right) \quad (19)$$

其中 $q = -\frac{Q}{2}$, (l, y) 为点热源 M 的坐标, l 为半裂纹长度, α 是线膨胀系数, λ 是导热系数, Q 为热源功

率,并且

$$R = R_1 = [(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - l^2)^2 + 4\sigma_1^2 l^2]^{1/2}, \sigma_1 = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sin^{-1}(\sigma_1 / r_1) & + l < 0, & 0 \\ -\sin^{-1}(\sigma_1 / r_1) & + l < 0, & < 0 \\ -\sin^{-1}(\sigma_1 / r_1) & + l < 0, & < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \sin^{-1}(\sigma_2 / r_2) & - l < 0, & 0 \\ -\sin^{-1}(\sigma_2 / r_2) & - l < 0, & 0 \\ -\sin^{-1}(\sigma_2 / r_2) & - l < 0, & < 0 \end{cases}$$

$$r_1 = \sqrt{(\sigma_1 + l)^2 + \sigma_2^2} \quad r_2 = \sqrt{(\sigma_2 - l)^2 + \sigma_1^2}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_1$$

为了利用上面的公式,采用图 3 所示的坐标。

在所研究的带有两个共线裂纹问题中,四个裂尖相当于四个点热源,由于各点的热源功率 Q 计及其余三点对它的影响,所以在计算各点的热应力强度因子时,只考虑当处点热源的影响。

点热源 A

$$(\sigma_1, \sigma_2) = (-l, 0), R_1 = 0, \sigma_1 = \sigma_1, \sigma_2 = 0$$

$$K_A^T = -\frac{Q_A E_t}{8} \sqrt{\frac{l}{2}} \left[1 - 2 \log \frac{l}{2} \right]$$

点热源 B

$$(\sigma_1, \sigma_2) = (l, 0), R_1 = 0, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -\sigma_1$$

$$K_B^T = -\frac{Q_B E_t}{8} \sqrt{\frac{l}{2}} \left[1 - 2 \log \frac{l}{2} \right] \quad (20)$$

其中 Q_A, Q_B 分别为 A、B 裂纹尖端处的热源功率。由图 1,可知 $K_A^T = K_D^T, K_B^T = K_C^T$ 。

很明显 $K_A^T, K_B^T, K_C^T, K_D^T$ 的值为负的,这表明由于裂纹尖端电流的集中效应产生的热源温度效应在裂尖处产生了压应力,正是利用了这一点,即可达到裂纹止裂的目的。

6.2 载荷应力强度因子 K

由文献[10]可以直接得到如图 4 所示含有两条等长共线裂纹导电薄板受单向拉伸时的载荷应力强度因子的表达式

在 A 端为

$$K_A = \sigma_1 \sqrt{b} \frac{1}{k} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right]$$

在 B 端为

$$K_B = \sigma_1 \sqrt{a} \frac{b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2}{a \sqrt{b^2 - a^2}} \quad (21)$$

6.3 应力强度因子 K

已知热应力强度因子和载荷应力强度因子后,可以求得在 A 端和 B 端总的应力强度因子分别为

$$K_A = K_A^T + K_A = -\frac{Q_A E_t}{8} \sqrt{\frac{l}{2}} \left[1 - 2 \log \frac{l}{2} \right] +$$

$$\sigma_1 \sqrt{b} \frac{1}{k} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right]$$

$$K_B = K_B^T + K_B = -\frac{Q_B E_t}{8} \sqrt{\frac{l}{2}} \left[1 - 2 \log \frac{l}{2} \right] +$$

$$\sigma_1 \sqrt{a} \frac{b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2}{a \sqrt{b^2 - a^2}} \quad (22)$$

因为 K_A^T 和 K_B^T 的值为负值,有 $K_A < K_A, K_B < K_B$,这样根据断裂判据 $K < K_c$ (K_c 为断裂应力强度因子),由于加上了热应力强度因子 K^T ($K^T < 0$),使得 K 小于只有外载荷作用下的 K ,相当于减少了裂尖承载力,从而达到电热裂纹止裂的目的。

7 算例及实验分析

如图 1,选用已加工为带有两个等长共线裂纹的高速工具钢,熔点为 1510°C ,在垂直于裂纹方向通入电流密度为 $J_0 = 2.85 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ 的电流,施加单向拉伸应力 $\sigma_1 = 175 \text{ MPa}$,材料的电导率 $\gamma = 0.55 \times 10^7 (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$,热传导系数 $\lambda = 27.2 \text{ W(m} \cdot \text{s}^{-1})$,弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$,线胀系数 $\alpha = 11.2 \times 10^{-6} \text{ m/(m} \cdot \text{s}^{-1})$,尺寸为 $a = 15 \text{ mm}, b = 35 \text{ mm}$,板厚 $2h = 0.5 \text{ mm}$ 。计算分析上述条件下薄板内的温度场及应力强度因子。

计算得到不同裂纹长度 ($2l = 20 \text{ mm}, 2l = 40 \text{ mm}$) 与温度的关系如图 5 所示,沿裂纹方向的温度分布如图 6 所示,温度在载流薄板内裂纹附近的分布如图 7 所示,电热止裂后裂尖熔化状态如图 8 所示。取距离裂纹尖端 1.5 mm 处计算热应力强度因子,根据公式 (20) 计算得到裂尖 A 处的热应力强度因子 $K_A^T = -21.08 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$,裂尖 B 处的热应力强度因子 $K_B^T = -21.66 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$;根据公式 (21) 可以算出,外载荷产生的应力强度因子 $K_A = 31.57 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}, K_B = 31.86 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$;再根据公式 (22),可以得到通入瞬间电流后的应力强度因子 $K_A = 10.49 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}, K_B = 10.2 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ 。

由图 5 可以看出,裂纹尖端的温度值与裂纹长度有关,在其他条件相同时,随裂纹长度增加,裂尖温度值会升高;图 6、7 可以看出,由于叠加效应裂尖 B、C 处的温度值高于裂尖 A、D 处的温度值,越接近裂尖温度值越高,远处趋于平滑。文献[11]可以查到 T7 钢的断裂应力强度因子 $K_c = 39 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$,由上面的计算可以看出,通入瞬间电流后裂尖处的应力强度因子大大小于 K_c ,证实了电热止裂的可行性。

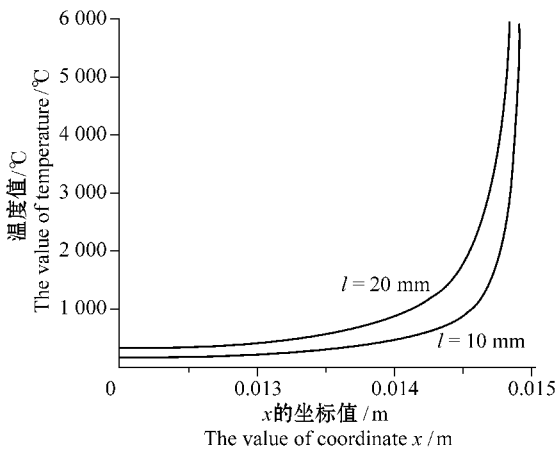


图5 不同裂纹长度时的温度对比

Fig. 5 Different temperature to different crack size

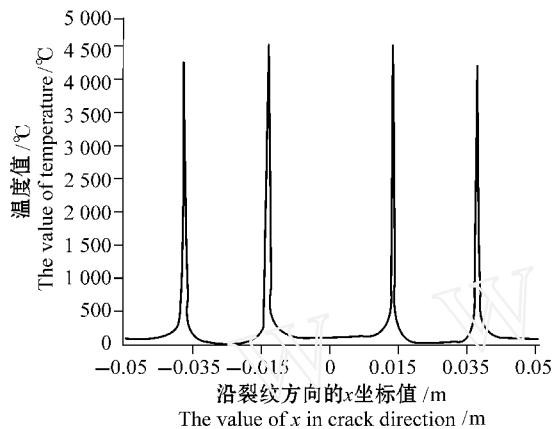


图6 沿裂纹方向的温度值

Fig. 6 The temperature to crack direction

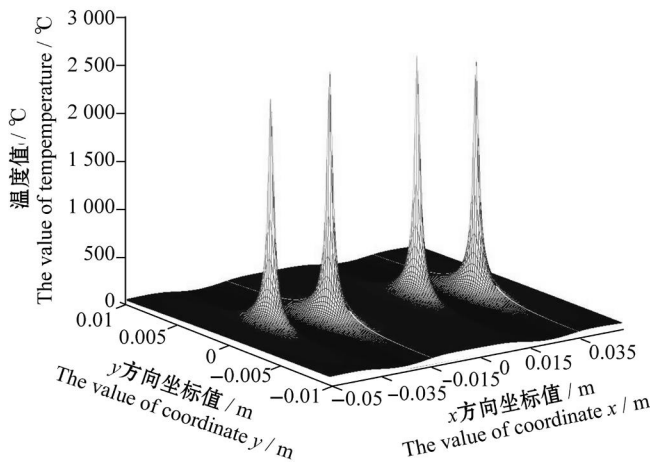


图7 温度在裂纹附近的分布

Fig. 7 Temperature distribution near the crack

8 结论

- 1) 由于裂纹的存在,在裂尖处的电流密度和温度的计算值都是奇异的。
- 2) 裂尖处的温度值与通入的电流密度 J_0 的大小及裂纹尺寸 $2l$ 有关。只要通入适当电流密度 J_0 ,裂纹尖端的温度可以达到材料熔点使裂尖钝化,达到止裂目的。显然,裂纹越长,裂尖处的温度越高。

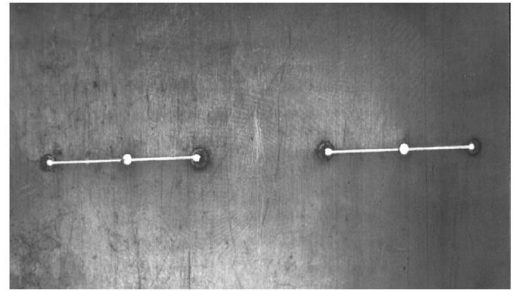


图8 裂尖熔化状态

Fig. 8 Condition of crack melted

3) 由于裂尖的熔化,在裂尖附近产生高温形成的热应力强度因子,使得外载荷产生的应力强度因子显著减小。由此可提高裂尖处的承载能力。

参考文献 (References)

- 1,1980,44(5):916~922.
Kudriavcev B A, Parton V Z, Rubinskij B D. Thermal magneto-elasticity field of a body with a semi-infinite crack. Applied Math and Mechanics, 1980,44(5): 916~922 (In Russian).
- 2 毕德显. 电磁场理论. 北京:电子工业出版社,1985. 207~232.
Bi D X. Theory of electro-magnetic field. Beijing: Electric Industry Press,1985. 207~232 (In Chinese).
- 3 (G. C. Sih).,1965,87:157~162.
Sih G C. Thermal behavior of an infinite medium with collinear cracks. Applied Mechanics. Heat Transfer, USSR, 1965, 87(2): 157~162 (In Russian).
- 4, 1972. 12~40.
Prusov I A. Some problem of thermal elasticity. Minsike: Press of National University of White Russia, 1972. 12~40 (In Russian).
- 5 . 著. 赵惠元译. 数学弹性问题的几个基本问题. 北京:科学出版社,1958. 196~407.
Mushelishvili N I. Translated by Huiyuan Zhao. Some basic problem of the mathematical theory of elasticity, Beijing: Science Press, 1958. 196~407 (In Chinese).
- 6 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论. 北京:科学出版社,1979. 589~623.
Wang Z X, Guo D R. Introduction of special function. Beijing: Science Press, 1979. 589~623 (In Chinese).
- 7,1983. 18~40.
Kit GS, Krivcun M G. Two-dimensional problem of thermal elasticity in a solid with cracks. Jifu: Press of Scientific Thinking, 1983. 18~40 (In Russian).
- 8 Jacob Bear[美]著,李竟生,陈崇希译. 多孔介质流体动力学. 北京:中国建筑工业出版社,1983. 254~256.
Jacob Bear, Translated by Jingsheng Li, Chongxi Chen. Porous medium hydrodynamics. Beijing: Press of China Architecture Industry, 1983. 254~256 (In Chinese).
- 9 Zhang X Z, Hasebe N. Basic singular thermoelastic solutions for a crack. Int. J. Fracture, 1993, 62(2): 97~118.
- 10 中国航空研究院. 应力强度因子手册. 北京:科学出版社,1993. 118~119.
China Aviation Institute. Stress intensity factor manual. Beijing: Science Press, 1993. 118~119 (In Chinese).
- 11 刘宝琛. 实验断裂. 损伤力学测试技术. 北京:机械工业出版社,1994. 309~314.
Liu B C. Measuring technique of experimental fracture and damage mechanics. Beijing: Mechanical Industry Press, 1994. 309~314 (In Chinese).