

[文章编号] 1001-246X(2000)04-0360-07

# 求解 Euler 方程的区域分解方法与并行算法

吕晓斌<sup>1</sup>, 兰黔章<sup>2</sup>, 朱自强<sup>3</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 北京 100080; 2. 上海交通大学动力系, 上海 200030;  
3. 北京航空航天大学流体所, 北京 100083)

[摘 要] 将复杂形状区域划分成多块子区域, 研究发展了一种多块区域之间迎风守恒型的内边界耦合方法, 实现相邻子区域解的光滑过渡, 使多区耦合得到总体流场的数值解。对二维翼型跨音速流动和圆弧形隆起物超音速流动等进行了分区数值计算, 并将计算结果与单区计算结果和实验结果作了比较。并行分区计算引入“先进先出”的同步控制等待机制, 实现了高效率并行计算, 还分析了影响并行效率的主要因素。

[关键词] 计算流体力学; 区域分解方法; 并行处理; Euler 方程  
[中图分类号] O35; V211 [文献标识码] A

## 0 引言

复杂外形无粘性可压缩流场的数值计算, 主要涉及到偏微分方程组的求解。该类问题的特征波速是有限的, 如果把复杂几何区域分解成若干块子区域, 子区域之间通过一定的耦合条件进行信息交换, 以实现相邻子区域解的光滑过渡, 复杂区域总体流场可实现并行求解。因而分区方法是一个有效地并行处理复杂区域流场的数值方法基础<sup>[1]</sup>。

本文结合矢量通量分裂数值计算方法和信息传播的特征理论, 采用完全对接网格, 研究发展了一种迎风型内边界通量守恒的耦合条件, 应用于二维跨音速翼型绕流、圆弧形隆起物超音速流动激波反射现象的分区并行计算。

## 1 控制方程和数值方法

在直角坐标系  $(x, y)$  中, 二维非定常 Euler 方程组的微分形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

式中,  $U$  是守恒矢量变量,  $F(U)$ 、 $G(U)$  是矢量通量

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ E \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

[收稿日期] 1999-04-20

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目

[作者简介] 吕晓斌(1965~), 男, 山东, 博士后, 从事计算空气动力学并行计算方面的研究。

理想气体状态方程为

$$p = (\gamma - 1) [ E - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) ] \tag{3}$$

其中,  $\rho$  为密度,  $u, v$  为速度分量,  $p$  为压力,  $\gamma$  为比热比, 空气  $\gamma = 1.4$ ,  $E$  为单位体积的总能。

用有限体积方法在每一个网格单元控制体上进行积分, 计算变量定义在网格中心点上, 在边界上计算通量, 得到一组空间离散方程

$$V_{i,j} dU_{i,j} = - dt \left( \tilde{F}_{i+1/2,j} S_{i+1/2,j} - \tilde{F}_{i-1/2,j} S_{i-1/2,j} + \tilde{F}_{i,j+1/2} S_{i,j+1/2} - \tilde{F}_{i,j-1/2} S_{i,j-1/2} \right) \tag{4}$$

式中

$$\tilde{F} = n_x F(U) + n_y G(U) \tag{5}$$

其中,  $S$  是控制体  $V_{i,j}$  的边界,  $n$  为边界面的外法向单位矢量。如果网格是足够光滑的, 边界物理量由二阶插值公式计算, 则方程式(4)是二阶的。

本文按 Van Leer 矢量通量分裂方法<sup>[3]</sup>计算控制体边界面对流矢通量。对二维流动情况, 根据边界面的法向流动速度进行矢通量分裂<sup>[4]</sup>。公式(4)中  $\tilde{F}_{i+1/2,j}, \tilde{F}_{i,j+1/2}$  等不能直接应用 Van Leer 通量分裂公式得到  $\tilde{F}_{i+1/2,j}^\pm, \tilde{F}_{i,j+1/2}^\pm$  等, 必须先用一个变换  $T$  得到局部坐标系中法向通量, 然后按一维分裂方法对法向通量作分裂, 分裂后再用一个反变换  $T^{-1}$ , 将通量变换回来才能得到  $\tilde{F}_{i+1/2,j}^\pm$  等。

亚音速流动 ( $|M_n| < 1$ ) 时, 边界面法向矢通量分裂公式为

$$H_n = \begin{pmatrix} \pm \frac{c}{4} (1 \pm M_n)^2 \\ h_1^\pm c [(\gamma - 1) M_n \pm 2] / \\ h_1^\pm c M_t \\ h_1^\pm (E + p) / \end{pmatrix} \tag{6}$$

式中  $h_1^\pm$  表示第一项, 即  $h_1^\pm = \pm (c/4) (1 \pm M_n)^2$ ,  $M_n$  为边界面的法向马赫数,  $M_t$  表示与界面法向垂直的马赫数分量。超音速流动时,  $|M_n| \geq 1$ , 此时法向特征速度 ( $q_n + c, q_n, q_n - c$ ) 全为正或全为负。由信息传播理论, 边界面中点物理量全部由上游一侧插值计算, 固壁物面边界上满足壁面无穿透条件, 即物面法向速度等于零。远场根据 Riemann 不变量分析, 采用无反射边界条件。时间积分方法采用分区隐式因式分解 (AF) 方法<sup>[5]</sup>。

## 2 内边界耦合条件

### 2.1 区域分解与内边界耦合条件

区域分解方法将总体区域分成几个子区域, 然后在每个子区域网格上对 Euler 方程分别求解。各个子区域的解通过内边界耦合条件光滑过渡。

分区方式有重叠和对接两种。本文讨论对接方法, 各子区域无重叠。



图 1 (a) 重叠网格 (b) 对接网格  
Fig. 1 (a) overlapping grid (b) patched grid

一般设  $A, B$  为重叠分区,重叠区域为  $O$ ,如图 1(a)。在重叠区域,物理量是唯一的。设重叠区域的边界为  $O = A_O + B_O$ ,  $A_O、B_O$  分别为  $A、B$  子区域重叠部分的内边界。重叠区域满足守恒方程的充要条件<sup>[6]</sup>为

$$\int_{V_{VO}} \frac{\partial U}{\partial t} V = \int_{f_{AO}} \tilde{F}_f S_f + \int_{f_{BO}} \tilde{F}_f S_f \tag{7}$$

其物理意义为在重叠区域  $O$  满足守恒方程。

本文采用对接分区网格,如图 1(b)所示。对接分区内边界  $A_O、B_O$  二者重合,两相邻分区无重叠区域。因此沿公共内边界,由(7)式可得需要满足的通量守恒方程为

$$\int_{f_{AO}} \tilde{F}_f S_f = - \int_{f_{BO}} \tilde{F}_f S_f \tag{8}$$

上式即为内边界守恒耦合条件关系式。

### 2.2 相邻区域信息通信

通过区域分解将求解区域分裂成若干块子区域,本文在每块子区域将网格单元分为三类(如图 2 所示)

- 1) 子区域“内部单元”,各块子区域单元能够独立进行计算。
- 2) 将位于内边界之外虚设的边界外侧网格单元称为“洞单元”,这个单元上的物理量必须从相邻子区域中取得。
- 3) 将邻近内边界的网格称为“边界单元”,其单元的边界面通量需要跨边界在两个相邻的子区域上计算。

在每个时间步积分之前,相邻子区域之间互相交换信息(图 2)。子区之间的通信只取决于其内界面周线。

### 2.3 迎风型内边界通量守恒耦合条件

在子区域的内边界,本文结合矢通量分裂和信息传播特征理论,使用下列耦合条件:

1)  $A$  区子区域洞网格单元的物理量由相邻区域  $B$  区由面积加权插值计算。

2) 根据内边界法线方向的特征速度  $q_n$  进行矢通量分裂,  $A$  区流入内边界沿负法线方向传播的通量由  $B$  区迎风线性插值计算,

$$\tilde{F}_{AO}^-(U_A^+, n_A) = \tilde{F}_L^-(U_B^+, n_B) \tag{9}$$

类似地,  $B$  区流入内边界的沿负法线方向传播的通量由  $A$  区迎风线性插值计算,

$$\tilde{F}_{BO}^+(U_B^-, n_B) = \tilde{F}_L^+(U_A^-, n_A) \tag{10}$$

3)  $A, B$  各区流出内边界沿正法线方向传播的矢通量各区独立迎风线性插值计算。

考虑到各个子区域外法向单位矢量的正负,容易验证,沿内边界  $A$  区所有法线方向传播的通量之和等于  $B$  区所有法线方向传播的通量之和,所以满足通量守恒关系(8)式。本文称之为迎风型内边界通量守恒耦合条件。

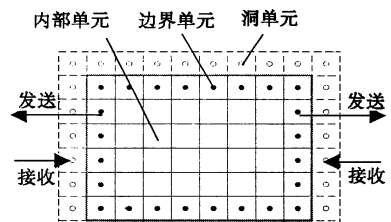


图 2 内边界、边界单元和区域通信

Fig. 2 Internal boundary cells and communication between zones

## 3 并行计算方法

### 3.1 并行计算模式

本文在多工作站网络分布式 PVM 并行环境上,对二维 Euler 方程绕翼型流动采用纯结点并行计算模式<sup>[7]</sup>进行分区并行计算,每个子区域对应一个子任务,并使每个子任务对应一个处理器结点,因而是粗粒度区域并行计算模式<sup>[8,9]</sup>。

通常在每个迭代步加入同步控制语句使各个子任务的信息通信实现同步,为了减少通信时间。本文采用了“先进先出”的同步等待控制语句,以减少空转等待时间。在各个子区域都达到收敛精度或达到给定迭代次数后,并行进程终止计算。

### 3.2 并行计算效率及影响因素

不失一般性,设一个并行系统有  $P$  个处理器,将并行计算时间分为有效并行计算时间与额外并行通信时间两部分

$$T_P = T_{\text{calc}} + T_{\text{comm}} \quad (11)$$

式中  $T_{\text{calc}}$  表示有效计算时间,  $T_{\text{comm}}$  表示通信时间。

定义并行通信过载比为并行通信时间与并行计算时间之比

$$F_O = T_{\text{comm}} / T_{\text{calc}} \quad (12)$$

定义负载平衡比为并行计算有效平均时间与并行计算的墙上占用时间之比

$$B = \frac{T_{\text{avg}}}{T_P} = \frac{T_i}{PT_P} \quad (13)$$

如果除内边界信息通信外没有其他时耗,考虑负载平衡因素在内,串行计算所用的时间为

$$T_S = (T_i)_{\text{calc}} \cong BPT_{\text{calc}} \quad (14)$$

定义并行加速率为串行计算时间与并行计算时间之比

$$S = \frac{T_S}{T_P} = \frac{BPT_{\text{calc}}}{T_{\text{calc}} + T_{\text{comm}}} = \frac{BP}{1 + T_{\text{comm}} / T_{\text{calc}}} = \frac{BP}{1 + F_O} \quad (15)$$

并行计算效率定义为  $E = S / P$ 。由加速率公式(15)可知,并行计算效率  $E$  与负载平衡比和并行通信过载比成比例,三者之间的关系为

$$E = \frac{B}{1 + F_O} \quad (16)$$

式中  $B$  为负载平衡比,  $F_O$  为并行通信过载比。

## 4 结果与分析

### 4.1 圆弧形隆起物的激波反射流动计算

第一个例子是二维管道内激波反射流动分区计算,来流马赫数为  $Ma = 2.0$ 。管道中下壁有高度为 10% 的圆弧形隆起物,上壁为直线,管道的宽度等于隆起物的长度,管道的长度等于隆起物长度的三倍。图 3 为整区计算网格 ( $64 \times 20$ ),计算结果显示隆起物两端各形成一道激波,前激波与上壁相撞,反射后再与后激波相交。本文分三区计算的等马赫数曲线如图 4 所示,分区内边界用虚线表示。从图中可以看出,等值线穿过内分界线是光滑过渡的。从下壁面的压力分布曲线(图 5)可看出分区计算结果与单区计算结果完全重合。上述结果说明了本文分区计算的内边界耦合条件同样适用于捕获反射与相交的激波复杂流动现象。

### 4.2 超临界翼型 RAE2822 跨音速分区计算

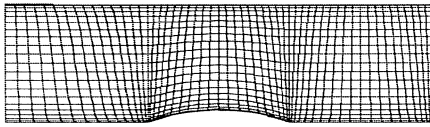


图 3 计算网格

Fig. 3 Computational grid

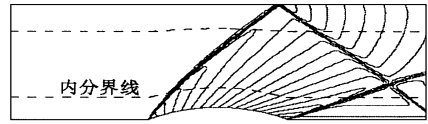


图 4 3区计算等马赫数曲线

Fig. 4 Zonal contour lines of Mach number

本文第二个例子是超临界翼型 RAE2822 跨音速无粘绕流分区计算,来流马赫数为  $Ma = 0.73$ ,攻角为  $\alpha = 2.79^\circ$ 。将流场“O”型网格(128 × 32)沿周向分裂为大小相等的多个区域,分别作了 2 区、4 区、8 区、16 区等多种分区数目的多域串行计算。图 6(a)是本文分 16 块区域计算的物面压力分布与文[12]中 Euler 方程计算结果比较,从图中可知二者的计算结果是一致的,说明本文内边界耦合条件应用于翼型跨音速绕流计算亦是正确可行的。图 6(b)是本文分 16 块区域计算压力分布与风洞实验的压力分布的比较,图中激波位置的差异是由于未计及粘性影响所致<sup>[11]</sup>。图 7 是“C”形分区计算的等马赫数曲线。

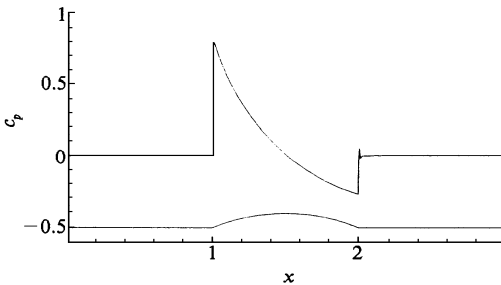
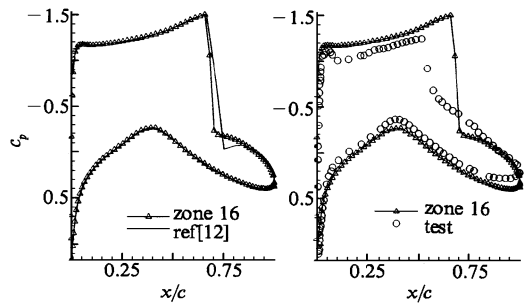


图 5 壁面隆起物上压力分布  
Fig. 5 Pressure distribution on arc



(a) 计算与文[12]对比 (b) 本文计算与实验对比  
图 6 分 16 区计算物面压力分布

Fig. 6 Comparison of pressure distribution between multiblock and single block

本文对多个分区数目所做分区计算的翼型总体气动参数,如翼型升力系数、阻力系数和激波位置等,均与单区网格计算结果相符,见表 1。这主要取决于本文分区方法内边界耦合条件是通量守恒的,对任意多个分区均满足守恒方程,所以对任意多个分区数目,本文方法仍然十分有效。

图 8 为收敛曲线的对比,可以看出,本文分区算法的收敛特性具有单区网格隐式方法同样稳定的收敛特性,分区算法收敛速度的减少并不显著。

### 4.3 分块并行计算

本文在由 4 台 SUN 工作站连网组成的网络分布式工作站并行系统上,对上述绕翼型跨音速

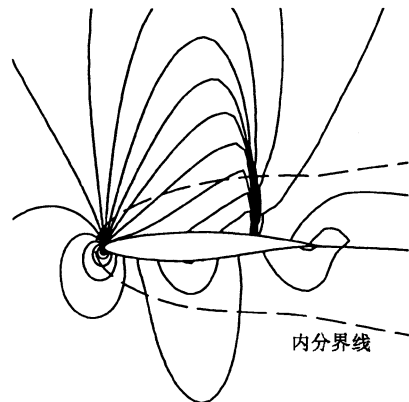


图 7 分区计算的翼型等马赫数曲线  
Fig. 7 Zonal contour lines of mach number

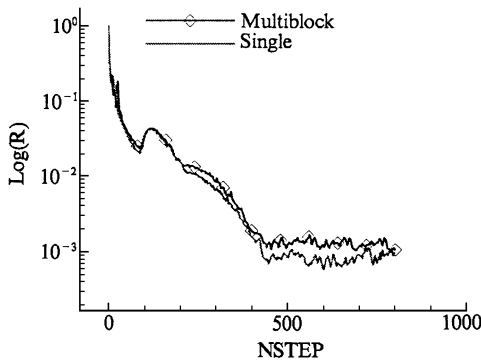


图 8 分区计算收敛特性比较曲线

Fig. 8 Comparison of convergence history between multiblock and single block

流动用 PVM 并行环境进行了区域并行计算。本文将流场分为大小相同 2 区和 4 区,每个子区各有 2 个内边界,处理器之间是负载平衡的  $B = 1$ 。

并行计算的并行加速比与并行效率见表 2。2 个 CPU 并行计算时的效率较高,这是由于两种情况内边界单元个数相同,所以信息通信时间基本相同。与 4 区相比,分 2 个区域时,每个 CPU 的计算量较大,通信过载比较小,并行效率比较高。

实际计算表明,如果机器负载不平衡,  $B < 1$ , 并行效率会降低。负载平衡是影响并行加速比的重要因素。并行效率与并行通过载成反比,由于并行通过载主要由区域几何特征(内边界通信单元个数/子区计算单元个数)<sup>[7]</sup>决定,所以区域几何特征也是影响并行加速比的主要因素。

## 5 结论

本文采用对接分区网格,结合分区求解算法用 Euler 方程对无粘性跨、超音速流动进行了分区数值模拟与分区并行计算。本文提出了一种迎风型内边界通量守恒耦合条件。数值计算中采用了 Van Leer 矢量通量分裂方法进行空间离散。分区方式的算例表明,分区内边界无论是平行于激波还是跨激波突跃,本文建立的内边界耦合条件均是通用的,分区计算收敛速度的减少不明显。本文的工作是进一步用 N-S 方程求解复杂区域流动的起点。

本文分块并行计算结果表明,提出的内边界耦合条件易于进行信息通信,得到了较高的并行加速效率,分析认为通过载比和负载平衡比是影响并行加速效率的主要因素。

表 1 翼型 RAE2822 分区计算升、阻力比较

Table 1 Coefficient of avrfoil  
RAE2822 lift and drag

分区个数(方式)	升力 CL	阻力 CD
单区	0.999	0.0297
Jameson <sup>[12]</sup>	1.030	0.0203
2(O)	0.999	0.0302
4(O)	0.999	0.0302
8(O)	0.999	0.0302
16(O)	0.997	0.0299
2(C)	1.007	0.0310
6(C)	1.007	0.0311

表 2 RAE2822 翼型并行计算的加速比与并行效率

Table 2 Parallel speed ratio and parallel efficiency

CPU 数	加速比	并行效率
1	1.0	100 %
2	1.86	93 %
4	3.35	84 %

## [参 考 文 献]

[1] Yadlin Y and Caughey D A. Block Multigrid Solution of the Euler Equations of Compressible Fluid Flow [J]. *AIAA Journal*, 1991, 29(5).

- [ 2 ] Keyes D. Domain Decomposition :A Bridge between Nature and Parallel Computers [ R]. ICASE Report 92-44 ,1992.
- [ 3 ] Van Leer B. Flux-Vector Splitting for the Euler Equations [ J]. *Lecture Notes in Physics* ,1982 ,**170**.
- [ 4 ] Anderson W K, Thomas J L and Van Leer B. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations [ J]. *AIAA Journal* ,1986 ,**24**(9) .
- [ 5 ] MacCormark R W. A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow [ J]. *AIAA Journal* ,1982 ,**16**(9) .
- [ 6 ] Wang ZJ. A Fully Conservative Interface Algorithm for Overlapped Grids [ J]. *J Comp Phys* ,1990 ,**122**:96 ~ 106.
- [ 7 ] Roose D and Driessche R . Parallel Computers and Parallel Algorithms for CFD : An Introduction [ R ] . AGARD/ NATO Report R-807 ,1995.
- [ 8 ] Sawley M L and Tegner J K. A Comparison of Parallel Programming Models for Multiblock Flow Computations [ J]. *J Comp Phys* ,1995 ,**122**:280 ~ 290.
- [ 9 ] 孙家昶,张林波,迟学斌,汪道柳. 网络并行计算与分布式编程环境 [ M]. 北京:科学出版社,1996.
- [ 10 ] Hesseenius K A and Pulliam T H. A Zonal Approach to Solution of the Euler Equations [ C ], AIAA 82 - 969.
- [ 11 ] 朱自强,马侠,陈炳永. 跨音速粘流的计算 [ J]. 航空学报,1991 ,**12**(10) .
- [ 12 ] Jameson A. Multigrid Algorithms for Compressible Flow Calculation [ J]. *Lecture Notes in Mathematics*. 1986 ,**1228**:327 ~ 356.

## DOMAIN DECOMPOSITION METHOD AND PARALLEL COMPUTING METHOD TO SOLVE EULER EQUATIONS

LU Xiao-bin<sup>1</sup>, LAN Qian-zhang<sup>2</sup>, ZHU Zi-qiang<sup>3</sup>

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China;

2. Department of Power Engineering, Shanghai Jiao Tong University,

Shanghai 200030, P P China; 3. Institute of Fluid Mechanics, Beijing

University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P R China)

**[ Abstract ]** A domain decomposition method of Euler equations is applied to a two dimensional transonic and supersonic flow. The flow region is divided into distinct regions, a zonal interface conservative technique is presented on basis of flux-vector splitting methods and characteristics theory of information propagation then interfacing these regions separately. Two dimensional transonic and supersonic flow field including arc bump and airfoils are calculated. Results of domain decomposition method are coincident very well with that of continuous single region solution. Parallel computing method using PVM parallel environment is proposed. "First-in First-out" synchronization strategy is applied in parallel programming model. An efficient method of high parallel speedup ratio is applied and influencing factors of parallel computing are discussed.

**[ Key words ]** computational fluid dynamics; domain decomposition method; parallel processing; Euler equations