

空间电动绳系推进的动力学建模与分析

潘冠群 许 滨¹⁾ 张 珩

(中国科学院力学研究所技术发展部, 北京 100080)

摘要 为分析空间电动绳系的运动特性, 从一般力学角度出发, 结合电动力学知识, 建立了近地轨道空间电动绳系推进飞行的动力学模型, 得出了多种初始条件下的数值计算结果, 并据此对电动绳系航天器的轨道机动过程进行了详尽的讨论, 阐明了系统在轨道高度变化的同时, 其轨道面也会发生变化, 而且导电系绳还会旋转与弯曲变形等规律. 此外, 还对电动绳系推进系统的效率和地球自转的影响进行了估计.

关键词 电动绳系, 轨道机动, 推进, 航天器, 空间系统

MODELLING AND MOTION ANALYSIS OF SPACE ELECTRODYNAMIC TETHERED SYSTEMS

PAN Guanqun XU Bin¹⁾ ZHANG Heng

(Division of Technology Development, Institute of Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract To study the kinetic characteristics, the motion of the LEO electrodynamic tethered (EDT) propulsion system is modeled, in this paper, from the angle of mechanics and electrodynamics. The numerical solutions under various initial conditions are obtained, based on which the motion of space EDT system is discussed. The effects of Ampere force, the tether's deformation and deflexion, on the orbital plane, as well as on the orbital altitude, are studied. In addition, the efficiency of space EDT system and the effect of the earth's rotation are evaluated.

Key words electrodynamic tethered system, orbit maneuver, propulsion, spacecraft, space system

引 言

以电动绳系 (electrodynamic tether, 简称 EDT) 原理为基础实现空间飞行器的轨道保持或调整, 是近年来国际上航天技术领域十分关注的研究热点之一. 简单地说, 用很长的系绳将两个或多个人造飞行物体或航天器相连, 就构成了基本的空间绳系飞行系统. 一般地, 根据结构和用途的不同, 空间绳系可分为动量交换绳系与电动绳系.

在空间电动绳系系统中, 导电系绳两端分别安装等离子收集器和发射器, 一端从外界等离子体中收集电子, 另一端则向外界发射电子, 从而构成开放的电流回路. 通有电流的系绳在近地地球磁场中飞行, 产生持续不断的安培力, 进而作用于航天器上, 以实现轨道的改变^[1].

目前, 相对于动量交换绳系原理的研究而言, 有关空间电动绳系的机理性、基础性的研究结果相对较少, 且主要集中等离子收集 / 发射器的技术以及对电流回路的分析, 而对系统在安培力作用下的飞行规律只有少量定性的描述^[2]. 鉴此, 本文从一般力学角度出发, 结合电动力学知识, 建立空间电动绳系推进的飞行动力学模型^[3]; 通过数值计算, 分析系统飞行时主要轨道要素的变化规律; 定量描述飞行过程中系绳的形态变化特征. 此外, 文中还对基于空间电动绳系的轨道推进效率和地球自转的影响进行了简单分析与估算.

1 空间电动绳系推进的动力学建模

1.1 建模条件与假设

在建模前, 先作如下规定和假设:

2006-08-02 收到第 1 稿, 2006-08-29 收到修改稿.

1) E-mail: xubin@imech.ac.cn

(1) 系绳两端的子母星均可视为质点, 不考虑其体积与姿态;

(2) 导电系绳为柔软细绳, 有均匀分布质量, 无扭曲和弯曲刚度, 不可伸长, 伏安特性为纯阻性;

(3) 在没有闭合电流时, 系统运动中心与其质心重合, 且绕地球作周期圆轨道运动, 无横向和纵向振动, 系绳崩紧伸直, 方向指向地心^[4];

(4) 不考虑地球扁率影响, 视地球半径为常数;

(5) 其它摄动力远小于安培力, 不影响绳系的飞行规律, 予以忽略;

(6) 假定绳系所处空间电子浓度足够大, 星上等离子收发器收发电流的能力足够强^[5], 不对系统中的电流产生附加的约束。

1.2 坐标系的建立

首先建立3个坐标系: 地心赤道惯性坐标系(简称惯性坐标系) $OXYZ$ 、标准地磁场坐标系(简称地磁坐标系) $O_1X_1Y_1Z_1$ 和轨道坐标系 $O_2X_2Y_2Z_2$, 如图1所示。惯性坐标系的原点在地心, 其 X 轴在赤道面上并指向春分点, 其 Z 轴指向地理北极, Y 轴

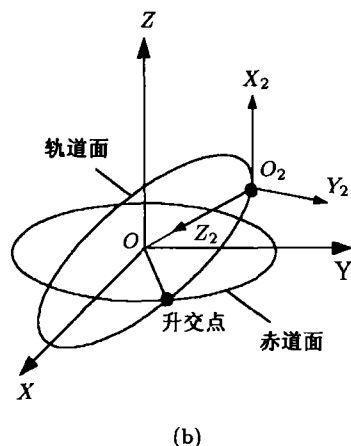
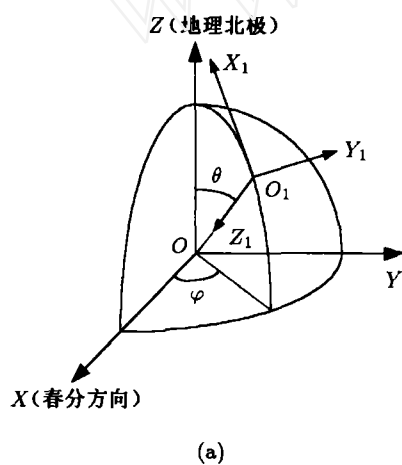


图1 惯性坐标系、地磁坐标系与轨道坐标系

方向由右手系决定; 地磁坐标系以需要计算地磁场的点为原点, 其 X_1 轴沿水平面指向正北方向, Z_1 轴指向地心, Y_1 轴方向由右手系决定; 轨道坐标系的原点 O_2 在绳系的质心, Z_2 轴指向地心, Y_2 轴指向轨道面反法线方向, X_2 轴方向由右手系决定。

1.3 地磁场模型

本文地磁场采用 IGRF 国际标准模型为

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{a}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos m\lambda + \\ & h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \\ B_1 &= (B_{x_1} \ B_{y_1} \ B_{z_1}) = \\ & \left(\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad -\frac{\mu_0}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \quad \mu_0 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, V 为标量磁位, μ_0 为真空中的磁导率, a 为地球平均半径, θ 为极角(见图1(a)), λ 为地理东经度, r 为地心距

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{\sin^m \theta}{n! \cdot 2^n} \cdot \frac{d^{m+n}}{d(\cos \theta)^{m+n}} (\cos^2 \theta - 1)^n$$

为 $\cos \theta$ 的 n 阶 m 次归一化的连带 Legendre 函数; g_n^m 与 h_n^m 是依据主要地磁场确定的高斯系数, 可视为常数。

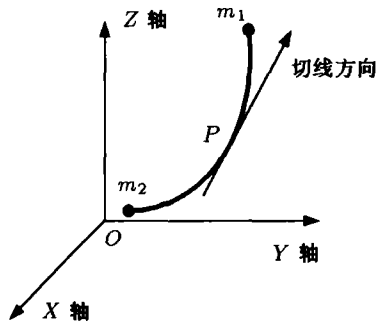
根据图1, 不难求得地磁场在地磁坐标系与惯性坐标系的转换关系为

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{x_1} \\ B_{y_1} \\ B_{z_1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

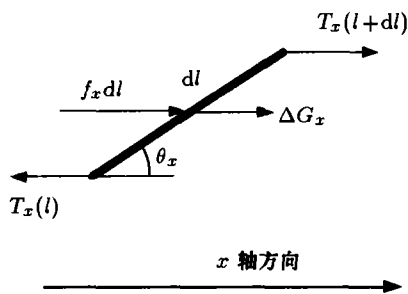
1.4 感应电动势与安培力模型

将绳系的母星和子星分别记为 m_1 和 m_2 , 同时以 m_1 和 m_2 表示二者的质量。设系绳上的任意一点 P 在惯性坐标系中的3个坐标分别为 $x(l, t)$, $y(l, t)$ 和 $z(l, t)$ (简记为 x , y 和 z), 其中 l 为点 P 到子星 m_2 的曲线长度, t 为时间, 并记 $\dot{x}_l = \frac{\partial x}{\partial l}$, $\ddot{x}_{lt} = \frac{\partial^2 x}{\partial l \partial t}$, 其它类同。另设系绳上任意一点 P 处的切线(规定从 m_2 端指向 m_1 端为正, 见图2)与 X, Y, Z 轴的夹角分别为 θ_x, θ_y 和 θ_z , 其单位方向矢量为 e , 则有

$$e = (\cos \theta_x \ \cos \theta_y \ \cos \theta_z) = (\dot{x}_l \ \dot{y}_l \ \dot{z}_l)$$



(a)



(b)

图 2 绳系及其微元段 X 轴方向受力示意图

根据电动力学知识可知, 导电系绳运动过程中切割地磁场磁力线产生的感应电动势为

$$d\varepsilon = \delta\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$$

设导电系绳长为 L , 积分得

$$\varepsilon = \int_0^L (\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) dl \quad (3)$$

式中, “ \times ”, “ \cdot ” 分别表示矢量的叉乘和点乘 (后同), $\delta\mathbf{v} = (\dot{x}_t + \omega_e y \dot{y}_t - \omega_e x \dot{z}_t)$ 为 P 点与地磁场的相对速度. \mathbf{B} 为惯性坐标系中的地磁场.

有了感应电动势, 就可根据电流回路的工作状态得出电流值 $I(t) = f[\varepsilon(t)]$ (见下节). 设 P 点处单位长度的安培力为 $\mathbf{f}(l, t)$ (简记为 \mathbf{f}), 根据电动力学公式有

$$\mathbf{f} = I \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

1.5 动力学与运动学方程

设导电系绳的线密度为 ρ_l , P 点的张力为 $T(l, t)$ (简记为 T), 根据图 2(b), 由系绳微元段在 X 轴方向上的受力平衡可得如下方程

$$T_x(l+dl, t) - T_x(l, t) + f_x \cdot dl + dG_x = \rho_l \ddot{x}_{tt} dl \quad (5)$$

同理, 可得 Y 轴和 Z 轴方向上的平衡方程为

$$T_y(l+dl, t) - T_y(l, t) + f_y \cdot dl + dG_y = \rho_l \ddot{y}_{tt} dl \quad (6)$$

$$T_z(l+dl, t) - T_z(l, t) + f_z \cdot dl + dG_z = \rho_l \ddot{z}_{tt} dl \quad (7)$$

式中, G_x, G_y, G_z 表示重力

$$\begin{cases} (dG_x \ dG_y \ dG_z) = -\frac{\mu\rho_l dl}{r^3} \cdot (x \ y \ z) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

其中, $\mu = 3.986 \times 10^{14} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$ 为地球引力常数. 另外, 根据系绳自约束条件

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

于是

$$(\dot{x}_l)^2 + (\dot{y}_l)^2 + (\dot{z}_l)^2 = 1 \quad (8)$$

将式 (5)~ 式 (7) 等号两边除以 dl , 同时结合 $T = T \cdot \mathbf{e} = T \cdot (\dot{x}_l \ \dot{y}_l \ \dot{z}_l)$ 以及式 (8), 得到绳系的运动偏微分方程组为

$$\left. \begin{aligned} &(\dot{x}_l)^2 + (\dot{y}_l)^2 + (\dot{z}_l)^2 = 1 \\ &\dot{T}_l \cdot \dot{x}_l + T \cdot \ddot{x}_{ll} - \frac{\mu\rho_l}{r^3} x + f_x = \rho_l \ddot{x}_{tt} \\ &\dot{T}_l \cdot \dot{y}_l + T \cdot \ddot{y}_{ll} - \frac{\mu\rho_l}{r^3} y + f_y = \rho_l \ddot{y}_{tt} \\ &\dot{T}_l \cdot \dot{z}_l + T \cdot \ddot{z}_{ll} - \frac{\mu\rho_l}{r^3} z + f_z = \rho_l \ddot{z}_{tt} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

再根据系绳两个端点的受力得出系统的边界条件

$$\left. \begin{aligned} &T(0, t)\dot{x}_l(0, t) - m_2\mu\frac{x(0, t)}{r^3(0, t)} - m_2\ddot{x}_{tt}(0, t) = 0 \\ &T(0, t)\dot{y}_l(0, t) - m_2\mu\frac{y(0, t)}{r^3(0, t)} - m_2\ddot{y}_{tt}(0, t) = 0 \\ &T(0, t)\dot{z}_l(0, t) - m_2\mu\frac{z(0, t)}{r^3(0, t)} - m_2\ddot{z}_{tt}(0, t) = 0 \\ &T(L, t)\dot{x}_l(L, t) + m_1\mu\frac{x(L, t)}{r^3(L, t)} + m_1\ddot{x}_{tt}(L, t) = 0 \\ &T(L, t)\dot{y}_l(L, t) + m_1\mu\frac{y(L, t)}{r^3(L, t)} + m_1\ddot{y}_{tt}(L, t) = 0 \\ &T(L, t)\dot{z}_l(L, t) + m_1\mu\frac{z(L, t)}{r^3(L, t)} + m_1\ddot{z}_{tt}(L, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2 算例与分析

结合式 (9), 式 (10), 在满足位移和力连续的条件下, 通过差分变换方法进行数值计算. 其中, 计算条件及其飞行系统参数分别假定如下:

(1) 地磁场取二阶 IGRF 模型, 即式 (4) 中 n 的值取到 2, g_n^m 与 h_n^m 的值取 NASA 在 2004 年公布的数据;

(2) 回路电流 - 电压模型分升轨和降轨两种情况^[6,7]. 降轨时

$$I = \frac{c\varepsilon}{R_l + 2R_c} \quad (11)$$

升轨时

$$I = \frac{[(P - 2P_c)(R_l + 2R_c) + \varepsilon^2/4]^{1/2} - \varepsilon/2}{R_l + 2R_c} \quad (12)$$

其中, R_l 为导电系绳的电阻, R_c 为电子收集 / 发射器的等效电阻 (外界等离子体的电阻较小, 这里予以忽略), c 为回路电导修正系数, ε 为感应电动势, P 为外加电源功率, P_c 为每个电子收集 / 发射器的电源功耗.

(3) 飞行系统参数的设计如表 1 所示. 其中, m_l 为导电系绳的质量, d 为导电系绳的直径, r 为轨道的长半轴 (圆轨道时表示半径), e 为系统的轨道偏心率, λ 为惯性坐标系中 X 轴正方向的东经度, Ω 为轨道面的升交点赤经, i 为轨道倾角, τ 为系统第一次通过升交点的时间. 下标为 C 的参数表示 $t = 0$ 时的初始值.

表 1 电动绳系算例的参数值

m_1	m_2	m_l	L (纯铝)	d	R_l
800 kg	100 kg	100 kg	11.79 km	2 mm	206 Ω
R_c	r_0	e_0	λ_0	Ω_0	τ
50 Ω	7 071 km	0	0°	0°	0
c=0.1,0.2,0.4		P=140,230,410(w) $i_0=0,45^\circ,135^\circ,180^\circ$			

根据上述条件, 本文计算了系统在 40 个初始轨道周期内的数值解. 地心距、轨道倾角和升交点赤经的变化曲线见图 3~ 图 5 所示. 各图中横坐标所表示的时间以初始轨道周期 ($T = 5917.42$ s) 为单位; 纵坐标代表变化量, 是指由当前的运动状态决定的

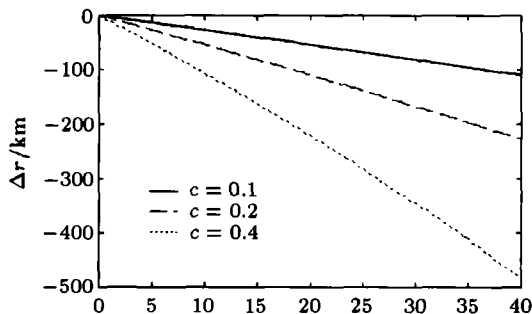


图 3 $i_0 = 0^\circ$ 时地心距在降轨情形下的变化曲线

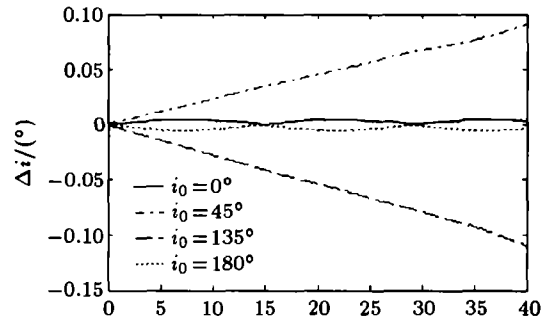


图 4 $c = 0.1$ 时轨道倾角在降轨情形下的变化曲线

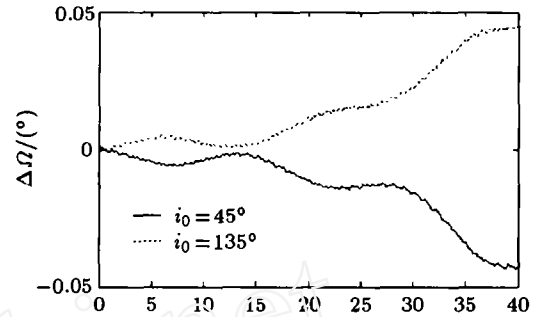


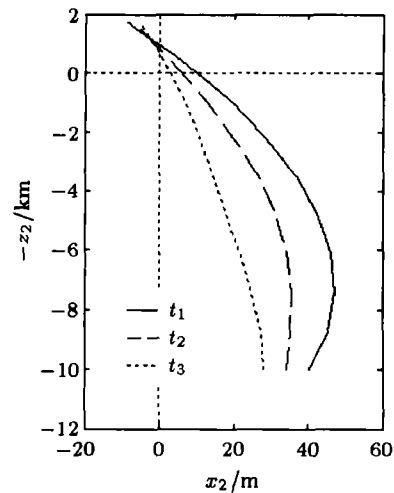
图 5 $c = 0.1$ 时升交点赤经在降轨情形下的变化曲线

密切轨道的参数值与对应初始值之差.

图 6 为导电系绳在轨道坐标系上的投影曲线. 图中虚线十字交叉点为系统质心位置, t_1, t_2 和 t_3 分别对应系绳运动过程中的先后 3 个时间点, 最小时间间隔为 $T/50$.

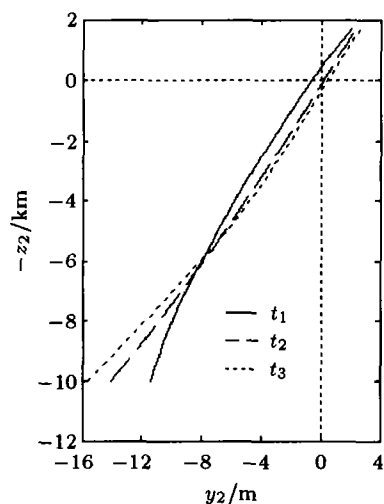
根据计算数据及相应曲线图, 可以总结出空间电动绳系推进系统在安培力作用下的运动具有的规律为:

(1) 地心距的变化量 Δr 与时间和电流近似成正比, 即 $\Delta r / (I\Delta t)$ 基本不变;



(a) 轨道面内的投影

图 6 $P = 140$ W 时系绳对应于升轨情形的形状变化



(b) 轨道面外的投影

图 6 $P = 140\text{W}$ 时系绳对应于升轨情形的形状变化 (续)

(2) 在安培力的作用下, 电动绳系系统的轨道面有两个变化趋势: 升轨时, 将向极轨道位置 ($i = (k + 0.5)\pi$, k 为整数) 偏转; 降轨时, 将向赤道面位置 ($i = k\pi$) 偏转;

(3) 轨道倾角的变化量 Δi 与电流近似成正比, 其长期分量 (在 $i_0 = k\pi/2$ 时为零) 与时间成正比。波动分量中包含以 ω_0 (初始轨道圆频率) 和 ω_e (地球自转圆频率) 为主的多个频率分量; 升轨期间, 在 $i_0 < 90^\circ$ 时, 轨道倾角将趋向于 0° ; 对应地, 当 $i_0 > 90^\circ$ 时, 轨道倾角将趋于 180° 。降轨时的情况正好相反;

(4) 升轨期间, 在 $i_0 < 90^\circ$ 时, 轨道面的升交点将会绕地球北极正向旋转, 当 $i_0 > 90^\circ$ 时, 升交点绕地球北极反向旋转。降轨时的情况与此相反;

(5) 升交点赤经 Ω 的变化量与电流近似成正比。其长期分量较小 (在 $i_0 = k\pi/2$ 时为零), 但随时间增长较快; 其波动分量中也包含 ω_0 和 ω_e 等多个频率分量;

(6) 当 $m_1 \neq m_2$ (即系统质心不在系绳中点) 时, 系绳会绕其质心相对铅直线 (初始方向) 发生偏转 (如图 6), 偏转方向与安培力的作用方向相同, 其在轨道面内的偏转角度以 ω_0 为主要频率分量随时间等幅波动, 轨道面外的偏转角度则以 $\omega_0/2$ 为主要频率波动。此外, 系绳还会向所受安培力方向发生弯曲, 其弯曲幅度以包含 ω_0 和 ω_e 及其差频、半频、倍频等多个频率分量, 并随时间等幅波动。

3 推进效率以及地球自转的影响估计

为衡量空间 EDT 系统用于航天器轨道推进时的效率, 这里给出两个指标^[8]: 一个是外电源的效率,

用 η 表示, 定义为外电源的输出功率中转化为绳系的轨道能的部分与外电源总功耗的比值; 另一个是整个绳系系统的能量增益, 用 A 表示, 定义为系统的轨道能增量与外电源能耗的比值, 并将其理论值 (公式值) 用 A_t 表示, 实际值 (由运动方程数值解得出的值) 用 A_a 表示。上述定义用公式为

$$\eta = \frac{UI - I^2(R_l + 2R_c)}{P}, \quad A = \frac{\Delta E}{\int P dt} \quad (13)$$

式中, U 为系绳两端的外加电压在且与感应电动势反向的电压。另外, 上节升轨时的电流公式 (12) 由下面的方程得到

$$I = \frac{U - \varepsilon}{R_l + 2R_c}, \quad P - 2P_c = UI$$

结合式 (12) 可得

$$\eta = \frac{\varepsilon I}{P} \quad (14)$$

根据功的定义, 对系统的做功可作如下分析: 假如地球不动, 它在通过地磁场的安培力作用推动或阻碍系统前进时, 自身没有移动距离, 因此地球没有做功, 系统的轨道能增量完全来源于系统中电能转化, 但在考虑地球自转时, 地磁作为地球的一部分就在对系统产生安培力的同时在系统的前进方向上移动了距离, 因此对系统也有额外的做功, 故可得到这样的结论: 在升轨时, 绳系的轨道能增量来自两个方面: 一个是来自外电源电能的转化; 另一个则来自地球自转的做功。由于我们并不关心地球损失了多少动能, 所以在 A 的定义中没有计入这部分能量 (因此 A 不是真正意义上的效率, 故将其称为能量增益)。定性分析表明, 升轨情况下, 在初始轨道倾角 $i_0 \in [0^\circ, 90^\circ)$ 时, 地球自转对系统做正功, 在 $i_0 \in (90^\circ, 180^\circ]$ 时做负功, 降轨时的情况正好相反。通过进一步的分析简化, 可得出 A_t 符合以下近似公式

$$A_t \approx \left(1 + \frac{\omega_e}{\omega_0} \cdot \cos i_0\right) \cdot \eta = \left(1 + \frac{\omega_e}{\omega_0} \cdot \cos i_0\right) \cdot \frac{\varepsilon I}{P} \quad (15)$$

A 和 η 的时间曲线如图 7 所示。在计算 A_t 和 η 时, ε 的值利用了方程数值解的结果。

进一步地, 根据算例的数据及图 7(a)~图 7(d), 可简要地归纳出空间电动绳系推进的实际能量增益 A_a 有如下规律:

(1) A_a 随初始轨道倾 i_0 单调递减, 在 $i_0 = 0^\circ$ 时, A_a 最大, 在 $i_0 = 180^\circ$ 时, A_a 最小;

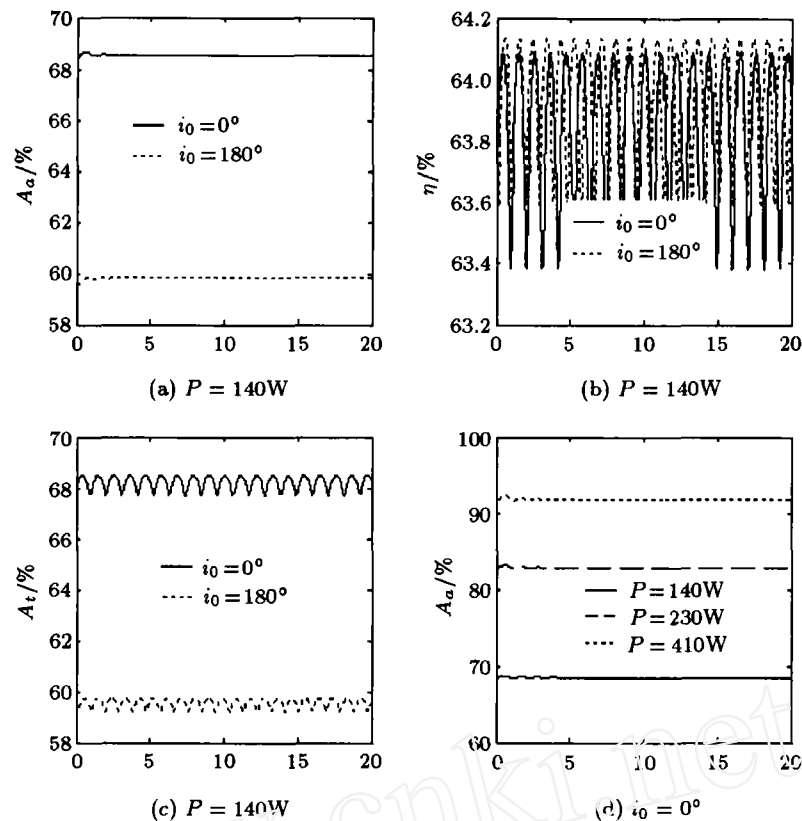


图 7 升轨时系统效率的变化曲线

(2) 随着外电源功率 P 的增大, A_a 的值先增大后减小, 且会在中间某处取得极大值. 其极大值随感应电动势 ε 的增大而增大, 随 $R_l + 2R_c$ 和 P_c 的增大而减小 (通过分析式 (15) 也可以得出同样的结论).

比较图 7(a), 7(b) 和图 7(c) 可以看出, η 的值与 A_a 有明显偏差, 而 A_t 的值与 A_a 则非常接近, 这证明了前文关于地球自转做功分析及式 (15) 的正确性.

4 结束语

轨道机动是空间 EDT 的一个重要应用. 本文通过对该系统的运动分析, 得出了若干值得重视的基本规律. 特别需要指出的是, 与通常意义下的航天器轨道机动的间歇推进方式不同, 空间电动绳系系统的推进力将是一个持续不断的作用力, 而且这个推进力还将会在改变轨道高度的同时改变轨道的倾角. 这实际是空间电动绳系推进的最为重要的基本特征之一.

参 考 文 献

1 许滨, 张珩. 空间绳系技术及其应用. 863 航天航空技术, 2002, 10: 30~36 (Xu Bin, Zhang Heng. Space tethers technol-

ogy and its application. 863 *Astronautics and Aeronautics Technology*, 2002, 10: 30~36 (in Chinese))

2 张万周. 空间绳系系统的发展及其应用前景. 中国航天, 1999, 3: 23~28 (Zhang Wanzhou. The development and application perspective of space electrodynamic tethered system. *Aerospace China*, 1999, 3: 23~28 (in Chinese))

3 朱仁璋, 雷达, 林华宝. 绳系卫星系统复杂模型研究. 宇航学报, 1999, 20(3): 7~12 (Zhu Renzhang, Lei Da, Lin Huabao. A sophisticated dynamical model of tethered satellite systems. *Journal of Astronautics*, 1999, 20(3): 7~12 (in Chinese))

4 朱仁璋, 林华宝, 马兴瑞等. 论绳系小卫星的应用与技术可行性. 航天器工程, 2001, 10(3): 38~46 (Zhu Renzhang, Lin Huabao, Ma Xingrui, et al. Application and technical feasibility of small tethered satellite. *Spacecraft Engineering*, 2001, 10(3): 38~46 (in Chinese))

5 Samanta Roy RI, Hastings DE. Theory of plasma contactor neutral gas emissions for electrodynamic tethers. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2000, 37(2): 197~204

6 Iess L, Bruno C, Ulivieri C, et al. Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. *Acta Astronautica*, 2002, 50(7): 399~406

7 Corsi J, Iess L. Stability and control of electrodynamic tethers for de-orbiting applications. *Acta Astronautica*, 2001, 48(5-12): 491~501

8 Samanta Roy RI, Hastings DE, Ahedo E. Systems analysis of electrodynamic tethers. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1992, 29(3): 415~424