

文章编号: 1001-1455(2001)03-0198-07

裂纹在冲击载荷作用下起裂的临界载荷面

刘希国, 赵红平, 吴永礼, 张双寅
(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要:采用有限元方法研究裂纹在 I 型短脉冲载荷作用下应力强度因子随时间的变化, 用应力强度因子的初始上升时间 T_r 对时间坐标无量纲化, 对应力强度因子初始上升段进行曲线拟合, 得到了上升段的曲线表达式。运用简单弹性梁理论和 Lagrangian 运动方程, 获得载荷与时间对裂纹作用的关系式, 结合有限元的结果, 得到了上升时间 T_r 的计算表达式, 并进一步推出了裂纹在冲击载荷作用下起裂的临界载荷面。

关键词:冲击响应; 裂纹起裂; 临界载荷面

* 中图分类号: O346.1 文献标识码: A

1 引言

在阶跃载荷作用下的含有限裂纹无穷大体裂尖应力场的响应特征是动态应力强度因子在初始阶段随时间的平方根迅速上升, 并超过等效的静态应力强度因子一定的幅值, 经过几次振荡之后趋于静态值, 其中, 应力强度因子的第一个峰值在所有的峰值中最大。初始阶段, 应力强度因子与裂纹长度无关, 只与时间和应力幅值有关^[1]。对于短脉冲作用下的裂纹, 由于应力强度因子的初始阶段的变化对裂纹的起裂起着至关重要的作用, 那么, 应力强度因子的初始上升期 T_r 就具有特别重要的意义, 因此本文用 T_r 对时间变量进行无量纲化, 引入无量纲时间 $\bar{t} = t / T_r$ 。

研究裂纹动态响应的一般方法是对运动方程进行积分变换化为对偶积分方程, 然后求解积分方程, 虽然对某些简单问题可以得到解析解, 但一般情况下只能得到方程的数值解。对于边界条件复杂的问题, 比如有限尺寸裂纹问题, 该方法不适用。我们采用有限元方法, 对含中央有限裂纹板在冲击载荷作用下的动态应力强度因子进行计算, 并运用线弹性梁理论和 Lagrangian 运动方程, 研究裂纹的起裂条件。

2 有限元计算

2.1 计算模型

图 1 是计算模型的示意图。模型几何形状为矩形板, 中央有一长为 $2a$ 的裂纹, 裂纹垂直侧边平行两端面, 在裂纹面上作用一对均布阶跃冲击载荷, 此时, 薄板处于平面应力状态。由于对称性, 实际的有限元模型只取整个模型的四分之一。

2.2 边界条件和初始条件

图 2 绘出了四分之一模型的边界受力情况, 边界条件和初始条件由下面给出:

$$\begin{aligned} x = L, 0 \quad y \quad H: \quad & x_y = 0, \quad x_x = 0 \quad t = 0: u = v = 0 \\ y = 0, 0 \quad x \quad a: \quad & x_y = 0, \quad y_y = (t) \quad t = 0: u = v = 0, \quad y_y = \end{aligned}$$

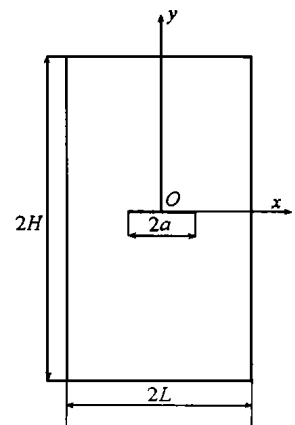


图 1 模型几何图

Fig. 1 The geometry of model

* 收稿日期: 2000-09-18; 修回日期: 2000-11-29
作者简介: 刘希国(1965—), 男, 在读博士, 助理研究员。

$$\begin{aligned}
 y = 0, a \quad x \quad L: \quad x_y = 0, v = 0 \quad t = 0: u = v = 0, dv/dt = 0 \\
 x = 0, 0 \quad y \quad H: \quad x_y = 0, u = 0 \quad t = 0: u = v = 0, du/dt = 0 \\
 y = H, 0 \quad x \quad L: \quad x_y = 0, y_y = 0 \quad t = 0: u = v = 0
 \end{aligned}$$

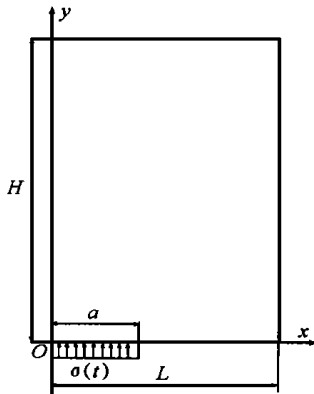


图 2 四分之一模型边界条件图

Fig. 2 The boundary conditions of one fourth model

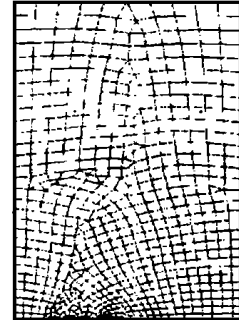


图 3 四分之一模型有限元网格图

Fig. 3 Mesh diagram of one fourth model

2.3 有限元分析程序

模型采用 2 维 8 节点四边形和 6 节点三角形等参元划分网格,裂尖周围采用三角形四分之一点奇异单元描述其位移场。图 3 为划分好的网格。计算采用商用有限元程序 ANSYS。

2.4 应力强度因子的计算公式

裂尖坐标系如图 4 所示,在 I 型加载情况下,极坐标系中裂尖附近的位移场可由下式表示^[2],

$$U_r = (K_I / 8\mu) \cdot \sqrt{2r'} [(2 - 1) \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2)] \quad (1)$$

$$U_\theta = (K_I / 8\mu) \cdot \sqrt{2r'} [(2 + 1) \sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2)] \quad (2)$$

式中: μ 为材料剪切模量,与杨氏模量 E 和泊松比 ν 的关系如下

$$\mu = E / [2(1 + \nu)] \quad (3)$$

式中: ν 是与泊松比有关的常数,对于平面应力状态

$$\nu = (3 - \nu) / (1 + \nu) \quad (4)$$

文献[3]给出了有限元方法由裂纹面奇异单元节点位移计算应力强度因子 K_I 的计算公式

$$K_I = \frac{2\mu\sqrt{2}}{+1} \left(\frac{4U|_B - U|_C}{\sqrt{L}} \right) \quad (5)$$

式中: $U|_B$ 和 $U|_C$ 分别为图 5 所示裂纹面上裂尖奇异单元节点 B 和 C 在裂尖极坐标系中的环向位移,即垂直裂纹面方向的位移, L 为奇异单元的边长, μ 和 ν 由 (3) 和 (4) 式决定。

我们采用 (5) 式计算动态应力强度因子,不同的是公式中的位移和应力强度因子都是时间的函数。为了后面的讨论,引入无量纲化的应力强度因子 \bar{K}_I

$$\bar{K}_I = K_I / (\sqrt{a}) \quad (6)$$

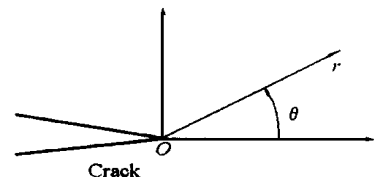


图 4 裂尖极坐标系示意图

Fig. 4 Polar coordinate system at crack tip

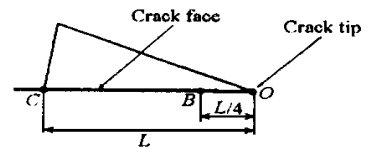


图 5 裂纹面上的奇异单元示意图

Fig. 5 Singular element on the crack face

3 冲击载荷作用下的临界载荷面

3.1 应力强度因子的初始上升时间 T_r 和过载系数 B

图 6(a) 是一典型的无量纲应力强度因子对时间的曲线, 曲线上有一个峰值, 峰值对应的时间称为应力强度因子上升时间 T_r . 现在我们用 T_r 对时间进行无量纲化处理, 定义无量纲化时间 \bar{t} 如下,

$$\bar{t} = t / T_r \tag{7}$$

以 \bar{t} 为横坐标, 重新绘出图 6(a) 中的曲线于图 6(b) 中, 已知半无穷长裂纹的动态应力强度因子与时间的平方根成正比, 据此, 我们对图 6(b) 所示的曲线进行了此种关系的拟合, 结果表明吻合的很好, 只是在最后有一些偏离, 此种偏离应为有限尺寸所产生, 为了简单, 在后面的讨论中, 这些偏离将不予考虑. 我们可以用下式来描述它:

$$\bar{K}_I = B \sqrt{\bar{t}} \quad 0 \leq \bar{t} \leq 1 \tag{8}$$

由于无量纲应力强度因子与材料性质无关而仅由边界条件决定, 因此系数 B 也应该与材料性质无关而由边界条件决定. 通常, B 总是大于 1 的, 表示应力强度因子的最大过载量, 因此称 B 为过载系数.

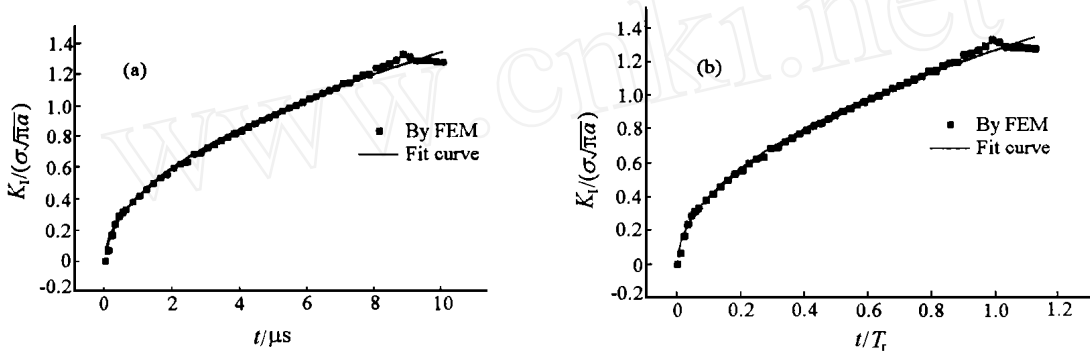


图 6 典型的应力强度因子历程曲线

Fig. 6 Typical curves of stress intensity factor history

3.2 初始上升时间 T_r 的计算

根据 Steverding 和 Lehnigk 在文献 [4] 中所用的方法, 将裂纹面上应力波作用区看作端部固定的梁, 运用线弹性梁理论和 Lagrangian 运动方程, 我们得到了中央裂纹的运动方程

$$2 a^7 t \frac{d^2 a}{dt^2} + 7 a^6 t \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - 10 a^7 \frac{da}{dt} = D a^4 t^3 - A t^6 \tag{9}$$

式中: a 为裂纹长度, t 为时间或脉冲长度, D 和 A 为与材料性质和应力脉冲幅值相关的系数, 由下式决定

$$A = 15 E c^7 / (8 \rho^2), D = 5 c^4 / 8 \tag{10}$$

方程 (9) 为裂纹在冲击载荷作用下起裂扩展时, 裂纹长度随时间的变化所应满足的关系. 当裂纹满足了起裂条件开始起裂时, 裂纹还没有运动, 裂纹的速度和加速度全为零, 那么, (9) 式的左边等于零, 考虑到裂纹面中点的质点速度与应力波的关系, 可以得到

$$2 \rho c^2 = 3 \rho c / 2 \tag{11}$$

式中: $2 \rho c^2$ 为临界脉冲长度, c 为应力波的纵波速度, ρ 为材料的比表面能, ρ 为材料密度.

由于 $2 \rho c^2$ 是临界应变能释放率, (11) 式可表示成

$$2 \rho c^2 = 3 \rho c G_{Id} / 4 \tag{12}$$

考虑到能量释放率与应力强度因子的关系, 对于平面应力问题有

$$G_{Id} = K_{Id}^2 / E \tag{13}$$

因此(12)可以写成

$$\sigma^2 = 3 c K_{Id}^2 / (4 E) \tag{14}$$

将(6)式代入(8)式并对两边取平方,得到

$$K_I^2 = B^2 a^2 t / T_r \quad 0 \leq t \leq T_r \tag{15}$$

如果裂纹开始起裂,则 $K_I = K_{Id}$ 和 $t = T_r$,比较(14)和(15)两式,有

$$T_r = 3 B^2 a / (4 c) \tag{16}$$

可见,应力强度因子的初始上升时间与裂纹的长度成正比而与应力波速成反比。

3.3 临界载荷面

将(16)式代入(15)式并开方,得到应力强度因子与时间的关系式

$$K_I = \sqrt{4 c t / 3} \quad 0 \leq t \leq T_r \tag{17}$$

由此可见,在初始上升期,动态应力强度因子与应力幅值成正比,与时间和应力波速的平方根成正比,而与裂纹长度无关,或者说裂纹长度并不影响应力强度因子的上升过程。

用 T_r 代替(17)式中的时间 t ,我们就得到应力强度因子第一峰值的表达式

$$K_{Ip} = \sqrt{4 c T_r / 3} \tag{18}$$

将(16)式代入(18)式,得到

$$K_{Ip} = B \sqrt{a} \tag{19}$$

(19)式说明应力强度因子的峰值与裂纹长度的平方根成正比。可见裂纹长度影响的是动态应力强度因子的峰值。对于无限长的裂纹,应力强度因子的峰值将趋于无穷大,这与无穷大裂纹板的分析解的结论是一致的。

如果裂纹在上升期内要起裂,那么,必须满足两个条件,第一,应力强度因子的峰值必须大于动态断裂韧性,第二,应力波的脉冲长度必须足够长,从而,动态应力强度因子可以超过动态断裂韧性。

为了满足第一个条件,要么应力幅值足够大,要么裂纹长度足够长。对于给定的应力幅值,存在一个临界裂纹长度 a_c ,所有长度大于它的裂纹,其应力强度因子峰值都将超过动态断裂韧性。由(19)式,可以得到

$$a_c = K_{Id}^2 / (B^2 \sigma^2) \tag{20}$$

K_{Id} 为动态断裂韧性,对应于临界裂纹长度的初始上升时间称为临界初始上升时间

$$T_{rc} = 3 B^2 a_c / (4 c) \tag{21}$$

要满足裂纹起裂的第二个条件,应力波脉冲长度必须大于临界初始上升时间 T_{rc} 。

(20)式和(21)式在裂纹长度 a ,脉冲长度 τ ,和应力幅值 σ 组成的三维空间确定了一条曲线,称为临界裂纹长度曲线(图7中的AB曲线)。

反过来,对于给定的裂纹长度,裂纹起裂的条件是:至少其动态应力强度因子峰值要达到动态断裂韧性,脉冲长度至

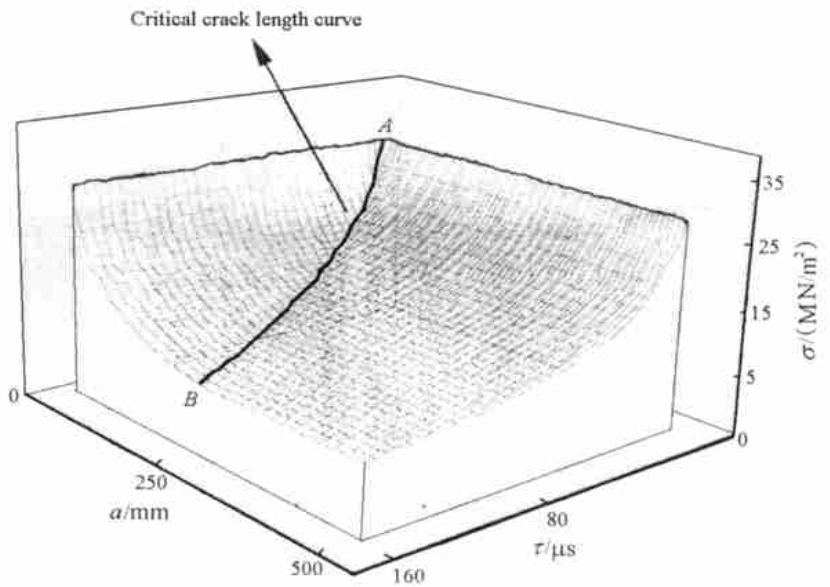


图 7 临界载荷面示意图

Fig. 7 The schematic diagram of critical loading surface

少达到临界上升时间,此时,临界载荷由下式给出

$$c = K_{Id} \sqrt{3/(4cT_{rc})} \quad a = a_c, \quad T_{rc} \text{ 或 } a > a_c, \quad = T_{rc} \quad (22)$$

当裂纹长度满足了第一条起裂条件,而脉冲长度不满足第二条件时,要使裂纹起裂必须提高应力波的幅值,应力幅值大小由下式决定

$$c = \sqrt{3} K_{Id} / (2 \sqrt{c}) < T_r < T_{rc}, a < a_c \text{ 或 } < T_{rc}, a > a_c \quad (23)$$

同样,对于裂纹长度小于临界裂纹长度,而脉冲长度小于初始上升时间的情形,也适用该公式。

当裂纹长度不满足第一条,而脉冲长度长于该裂纹对应的初始上升时间,要使裂纹起裂,同样必须提高应力幅值,计算公式如下

$$c = K_{Id} / (B \sqrt{a}) \quad T_r, a < a_c \quad (24)$$

这样,(22)~(24)式在裂纹长度 a , 脉冲长度 T_r , 和应力幅值 c 组成的三维空间确定了一个临界载荷面,它是由两个抛物面组成的曲面(见图7)。

由式(24)可知,在矩形波的作用下,一旦裂纹起裂,只要脉冲持续下去,裂纹将不会止裂。

4 结果和讨论

4.1 有限元计算结果

本文用铝和钢的弹性常数进行了有限元计算,弹性常数值如下

铝: $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2.700 \text{ g/cm}^3$, $c = 5091.75 \text{ m/s}$

钢: $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 8.000 \text{ g/cm}^3$, $c = 5000 \text{ m/s}$

计算得到的结果列入表1。

表1 不同裂纹长度的计算结果

Table 1 The results of calculation for different cracks

材料	B	\bar{K}_{IP}	T_r (FEM结果)/ μs	T_r /式(16)结果/ μs
铝($a = 2.4 \text{ mm}$)	1.230	1.342	1.72	1.68
钢($a = 2.4 \text{ mm}$)	1.232	1.339	1.76	1.72
铝($a = 7.5 \text{ mm}$)	1.227	1.359	5.36	5.25

从计算结果可以看到,过载系数 B 和无量纲应力强度因子峰值 \bar{K}_{IP} 基本是相等的,它们之间的差别应该来源于有限元计算本身存在的误差。

当裂纹长度由 2.4 mm 增加到 7.5 mm ,为原来的 3.125 倍,有限元计算的初始上升时间则增加到 3.116 倍,虽然不完全相等,但足以说明初始上升时间与裂纹长度成正比的关系。式(16)计算的初始上升时间也非常接近有限元的结果,说明这个公式是正确的。

为了考察应力波速的影响,我们改变铝和钢的密度,进行有限元的计算,结果列入表2。

铝: $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 8.000 \text{ g/cm}^3$, $c = 2985 \text{ m/s}$

钢: $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2.700 \text{ g/cm}^3$, $c = 8606 \text{ m/s}$

表2 改变密度后的计算结果

Table 2 The results of calculation for changed density

材料	B	\bar{K}_{IP}	T_r (FEM结果)/ μs	T_r /式(16)结果/ μs
铝($a = 2.4 \text{ mm}$)	1.234	1.322	3.04	2.89
钢($a = 2.4 \text{ mm}$)	1.217	1.330	1.02	1.00

尽管应力波速成倍改变,然而, B 和 \bar{K}_{IP} 的改变并不大,仍然可用有限元的误差来解释它们的差别,当波速由 2985 m/s 增至 8606 m/s ,为原来的 2.88 倍,有限元计算的初始上升时间则减少到原来的 2.92 分之 1 ,说明初始上升时间与应力波速成反比。

4.2 临界载荷面

假设铝的动态断裂韧性为 $100 \text{ Pa} \sqrt{\text{m}}$, 取 $B = 1.230$, 我们可以绘出铝的临界载荷面 (见图 7)。临界裂纹曲线的表达式为

$$a_c = 2.104 / \sqrt{\dot{\epsilon}}, \quad T_{rc} = 1.473 / \sqrt{\dot{\epsilon}}$$

式中: a_c 的单位为 m, $\dot{\epsilon}$ 的单位为 N/m^2 , T_{rc} 的单位为 s。

临界载荷面的表达式如下

$$c = 45.87 \sqrt{a}, \quad T_r; \quad c = 38.38 / \sqrt{\dot{\epsilon}}, \quad \dot{\epsilon} < T_r$$

图中, AB 线为临界裂纹曲线, 是两抛物面的交线。在交线的左侧, 临界载荷只与裂纹长度的平方根成反比; 在交线的右侧, 临界载荷只与脉冲长度的平方根成反比。用 $\dot{\epsilon} = \text{const}$ 的平面与曲面相交得到两条垂直相交且平行于相应的坐标平面的直线。当空间点位于曲面以下时, 裂纹处于稳定状态, 否则裂纹将起裂扩展。

考虑到应力强度因子在临近峰值时的偏离, 可以对曲线在偏离处进行修正, 因此, 临界载荷面也将出现修正凹面。

4.3 对动态断裂韧性的一点讨论

Kalthoff 和 Shockey^[5] 曾提出过极小作用时间判据, 判据认为, 裂纹起裂的条件不仅要求应力强度因子需达到或超过动态断裂韧性, 而且这种状态还需保持一段极小时间。假设这段时间为 t , 是材料常数。

对 (17) 式求时间导数, 得到应力强度因子率表达式如下

$$\dot{K}_I = \partial K_I / \partial t = \sqrt{c / (3t)} \quad 0 \quad t \quad T_r \quad (25)$$

裂纹起裂时, 动态应力强度因子与动态断裂韧性的差值为

$$K_I - K_{Id} = \dot{K} t = \sqrt{c / (3t_f)} t \quad (26)$$

式中: t_f 为裂纹起裂时间。将 (17) 式代入 (26) 式得到

$$K_I - K_{Id} = K_{Id} t / (2t_f) \quad (27)$$

差值与起裂时间成反比, 当起裂时间足够小时, 即加载率足够高时, 实验中测得的应力强度因子值 K_I 将明显高于实际的动态断裂韧性 K_{Id} 。如果极小作用时间无法确定, 那么, 实际的动态断裂韧性是测不准的。假设 t 与加载率无关, K_{Id} 可用 K_{IC} 代替。

Ravi-Chandar 和 Knauss^[6] 在实验中曾得到起裂时动态应力强度因子与静态断裂韧性的差值与起裂时间的关系式

$$K_I - K_{IC} = \text{const} / t_f^2 \quad (28)$$

与 (27) 式比较, 理论给出的结果与实验结果具有相同的形式。指数的差别, 可能与实验所用材料 Homalite 100 的性能 (粘弹性) 和加载历史 (因为实验中的载荷不是理想的矩形波) 有关。

5 总 结

本文将有限元方法与简单梁模型的理论分析方法相结合, 研究了有限尺度裂纹在短脉冲冲击载荷作用下的起裂行为。获得了有限尺度线弹性平面中央裂纹问题 I 型应力强度因子时间历程最初上升阶段的数学表达式, 并且得到了初始上升时间和应力强度因子第一峰值的计算公式, 发现式中需要用有限元计算的系数 B 与材料性质关系不大, 从理论上讲 B 应该与材料性质无关, 因此可以通过有限的有限元计算确定 B 值。根据得到的结果, 讨论了裂纹起裂的条件, 与静态裂纹的起裂条件不同, 动态裂纹起裂不仅与载荷幅值有关, 还与脉冲作用时间长短有关, 由此得到了裂纹起始的临界载荷面的数学表达式, 并在由裂纹长度、脉冲长度和载荷幅值组成的三维空间中绘出了临界载荷面, 据此可以轻易判断裂纹的稳定状态。运用得到的结果还讨论了材料的动态断裂韧性与静态断裂韧性的关系, 并与文献中的实验结果进行了对比。

本文的主要结论如下。

(1) 线弹性各向同性含中央裂纹板在 I 型冲击载荷作用下的应力强度因子,在初始上升阶段,与载幅值 σ_0 和时间 t 的平方根成正比,与裂纹尺寸无关,此结果与无限大裂纹板在冲击载荷作用下的结果是一致的。但在临近峰值时,有限板的应力强度因子有些往大的方向偏离该曲线。

(2) 尽管裂纹长度并不影响应力强度因子的初始上升过程,但却影响应力强度因子的初始上升时间和峰值,初始上升时间与裂纹的长度成正比,与应力波速成反比;峰值与裂纹长度的平方根和载幅值成正比。

(3) 几个算例的计算结果表明,尽管裂纹长度和应力波速分别成倍变化,过载系数 B 和峰值 \bar{K}_{IP} 的变化却很小,且是无规律的,可以认为是有限元方法带来的误差, B 和 \bar{K}_{IP} 应该是仅与边界条件有关的量。

(4) 裂纹起裂要满足两个条件,应力足够的大,脉冲足够的长。由此得到裂纹起裂的临界载荷面是在 $\sigma - t$ 空间由两个抛物面构成的曲面,其交线为临界裂纹长度曲线。在临界载荷面以下,裂纹是稳定的,在临界载荷面以上,裂纹将起裂扩展。

(5) 对动态断裂韧性的讨论表明,由本文得到的动态断裂韧性与静态断裂韧性的差值与起裂时间成反比,表明线弹性裂纹的动态断裂韧性随加载率的增加而增加,与文献给出的材料 Homalite 100 的实验结果具有相同的形式。

参考文献:

- [1] SHOCKEY D A, ERLICH D C, KALTHOFF J F, et al. Short-pulse Fracture Mechanics[J]. Eng Frac Mech, 1986, 23: 311—319.
- [2] 洪起超. 工程断裂力学基础[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1987. 34—35
- [3] SHIH C F, DELRENZI H G, GERMEN M D. Crack Extension Modeling with Singular Quadratic Isoparametric Elements[J]. Inter J Fract, 1976, 12: 647—651.
- [4] STEVERDING B, LEHNIGK S H. Response of Cracks to Impact[J]. J Appl Phys, 1970, 41: 2096—2099.
- [5] KALTHOFF J F, SHOCKEY D A. Instability of Cracks under Impulse Loads[J]. J Appl Phys, 1977, 48: 986—993.
- [6] RAVF-CHANDAR K, KNAUSS W G. An Experimental Investigation into Dynamic Fracture: I. Crack Initiation and Arrest[J]. Inter J Fract, 1984, 25: 247—262.

The Critical Loading Surface of a Crack under Impact

LIU Xi-guo, ZHAO Hong-Ping, WU Yong-li, ZHANG Shuang-yin
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: In this paper, the finite element method (FEM) is used to study the stress intensity factor time history of a crack at the mode I short pulse impact load. Instead of ct/a , t/T_r is chosen as the dimensionless time in which T_r is the initial rising time of K_I from zero to peak value. The initial rising stage of the K_I curve from the FEM is fit to obtain its mathematical expression. Then the formula for calculation of rising time is derived according to the linear elastic simple beam theory and Lagrangian equation of motion. Rising time is proportional to the crack length and varied inversely with the longitude wave velocity. Based on the stress intensity factor criterion for initiation of a crack, a critical impact loading surface in space of stress amplitude, pulse duration and crack length is obtained mathematically.

Key words: impact response; initiation of crack; critical loading surface