维普资讯 http://www.cqvip.com

第 35 卷 第 4 期
2005 年 11 月 25 日
力 学 进 展
ADVANCES IN MECHANICS
Vol. 35 No. 4
Nov. 25, 2005

扩散抛物化 Navier-Stokes 方程数值解法评述*

王汝权 [1] 申义庆 [2,†]

[1] 中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100080

[2] 中国科学院力学研究所高温气体动力学实验室，北京 100080

摘 要 20 世纪 60 年代末期在边界层理论基础上发展起来的各种简化 Navier- Stokes (N-S) 方程 (统称为扩散抛物化 N-S 方程) 及其算法，较为彻底地解决了无黏流及黏流的相互干扰问题，并为高雷诺数大型复杂黏性流场的数值模拟开辟了新的途径. 本文将系统地评述这一领域的主要成果，包括各种简化 N-S 模型的优缺点；数学奇性及正则化方法；代表性的数值解法以及最近几年的新进展.

关键词 Navier-Stokes 方程，边界层方程，PNS 方程，TLNS 方程，DPNS 方程，广义 DPNS 方程，差分法

1 引 言

众所周知，描述黏性流动的 Navier-Stokes 方程于 1845 年早已完整建立，但求解起来十分困难，特别是对高雷诺数问题，因而简化而又足够准确的求解一直是黏性流体力学追求的目标. 1904 年 Prandtl 提出的边界层理论开创了黏性流体力学研究的新纪元 [1]. 近一个世纪以来边界层理论对工程实际有着极其巨大的影响. 然而，由于边界层方程本身的局限性，无法反映无黏流与黏流相互干扰机理，因而不能描述实际问题中的复杂流动. 为了解决无黏流及黏流的强干扰问题，人们在边界层理论的基础上又发展了干扰边界层理论 [2,3]，三层理论 [4,5]. 这些理论要求解几个不同性质的方程组，并在它们之间进行迭代以达到相邻方程组的解光滑连接，不仅算法复杂，而且需要花费大量的计算时间及存储. 在上述背景下，20 世纪 60 年代末期在中国 [6]、美国 [7~9] 和前苏联 [10,11] 几乎同时，独立地提出了单一的简化 Navier-Stokes 方程组来描述无黏流和黏流强相互干扰. 70 年代简化 N-S 方程的研究和计算得到了蓬勃发展，人们推导出其他形式的简化 N-S 模型，如黏性激波层 (VSL) 方程 [8]，抛物化 N-S (PNS) 方程 [12,13]，薄层 N-S (TLNS) 方程 [14] 以及部分抛物化 N-S (PPNS) 方程 [15] 等等.

人们也曾用边界层方程、二阶边界层方程组 [11] 求解稀薄气体低雷诺数绕流流动，二阶边界层方程组与文 [6] 的简化 N-S 形式一致. 由于 20 世纪六七十年代提出的所有简化 N-S 模型的基本概念相同，且均具有扩散抛物化 (并未完全抛物化) 的数学性质，高智 [16] 将这类方程统称为扩散抛物化 Navier-Stokes (DPNS) 方程. DPNS 方程的称呼准确地反映了这类方程在亚声速区为椭圆型而在超声速区为抛物型的扩散抛物化性质. DPNS 方程的推导原则与边界层方程类似，先引入小参数 $\varepsilon = Re^{-1/2} \ll 1$ (Re 为来流雷诺数)，并利用它对方程中各项进行量级分析，假定流动存在一近似的主流方向，丢掉沿主流方向的黏性项，保留全部无黏项以及能反映黏流及无黏流相互干扰机理的主要黏性项，即可得到不同形式的 DPNS 方程. 大量数值计算表明：在流动方向不出现大范围分离区的情况下，DPNS 方程的解与完全 N-S 方程的解十分接近. 人们还发现，对高雷诺数流动而言，若从完全 N-S 方程出发并采用粗网格进行计算，由于某些数值黏性掩盖了真实物理黏性，最终得到的结果并不是 N-S 方程本身的数值解，而是另一组简化方程的解 [17]；另一方面，当人们利用完全 N-S 方程来模拟黏性流动时，由于强黏性区主要存在于物面附近和剪切层内，其余大部分为无黏区域，因此实际上人们真正求解的是 DPNS 方程 [18]. 换句话说，对于

收稿日期：2004-05-11，修回日期：2005-03-31
* 国家自然科学基金 (10402043) 和国家 863 计划项目 (2004AA639840) 资助项目
† E-mail:yqshen@imech.ac.cn

维普资讯 http://www.cqvip.com

高雷诺数流动，只须采用形式简单的 DPNS 方程就可描述流动的本质.

如上所述，DPNS 方程是大大简化了的 Navier-Stokes 方程，人们可以利用熟知的时间相关法求解. 但是，由于 DPNS 方程在流向已退化为一阶方程，自然希望像边界层方程那样用空间推进方法来求解它，既降低了方程组的维数，又能大幅度地节省计算量和存储量. 基于这一指导思想，随着 DPNS 方程的出现而发展了各种数值解法，归纳起来可分为 3 大类：即一次空间推进解法，总体松弛法和空间推进-迭代解法. 我们将在文中全面加以介绍.

理论上 DPNS 方程可用来计算有主流方向的可压缩及不可压缩黏性流；可用于亚音速流、跨音速流、超音速及高超音速流动. 对超音速或高超音速占主要部分、而亚音速层厚度为 $O(Re^{-1/2})$ 的流动一次空间推进解法十分有效. 大量计算表明：含有局部亚音速区或跨音速区的超音流动用一次推进和多重推进-迭代相结合的方法是可行的 [19,20]. 当流向出现分离区时，原则上 DPNS 方程是不合理的，但是大量实际计算表明：在高雷诺数流动中，沿流向出现的局部小分离区 (如前台阶、后台阶、拖曳流、分离泡、压缩拐角流、进气道流场及马蹄涡等) DPNS 方程解给出十分接近 N-S 方程的结果 [20~30]. 若回流区太大，雷诺数较低则采用广义 N-S 方程计算是可行的，它能给出与完全 N-S 方程可比的结果，又可大大节省 CPU 时间. 因此，不少教科书和专著，如文献 [1, 31~39], 已把 DPNS 方程作为流体动力学的一种基本方程，与 N-S 方程和 Euler 方程一起加以介绍. 对目前高雷诺数流动 N-S 计算的评估 [17,18,38] 表明：它们其实是计算 DPNS 方程；特别是剪切黏性项外的其它黏性项属于截断误差项的结论 [39~41]，进一步证实了 DPNS 方程和广义 N-S 方程的理论意义和应用价值.

目前用 DPNS 方程模拟各种典型二维黏性流动问题的工作已相当丰富 [42,43]，人们自然更关心模拟三维复杂流动的情况如何. 据我们所知，目前已研制出多个三维 DPNS 方程的计算程序 [44~50]. 在模拟大型流场方面有导弹弹体的外部超音速及高超音速绕流 [50,51]；有航天飞机内、外黏性流场 [52~57] 以及喷气推进器内部的各种黏性流场 [58~61] 等等. 关于不可压 DPNS (或 PPNS) 方程的研究和计算成果也极为丰富，代表性的有 Rubin 等人 [43], Spalding 等人 [15,62~68] 以及 Pletcher 等人 [69,70] 的工作，它们在 Anderson 等人的书 [31,37] 中已作了详细的介绍，本文只是重点提及. 俄罗斯学者对可压缩 DPNS 方程的研究和应用工作亦十分广泛，Mikhailov 等主编的论文集 [35] 详细介绍了有关情况.

关于 DPNS 方程的理论和数值方法研究工作已有大量综合性介绍及评述性文章 [21,31~37,42,43,71]，遗憾的是，大多数评论性文章对 DPNS 方程的推导思想未作详细介绍；对 DPNS 方程的数学性质缺乏深入分析；对各种简化 N-S 模型的优缺点也很少比较，特别是由于种种原因，国外很多评论性文章，很少提及我国学者在这个领域的研究工作. 在这篇文章中，我们将力求广泛介绍世界各国学者的贡献，以弥补上述的不足，同时评述最近几年来的一些新进展.

本文各节内容安排如下：第 1 节介绍简化 N-S 方程的历史背景及目前的发展情况；第 2 节介绍 DPNS 方程的推导思想及不同简化模型的比较研究；第 3 节阐明 DPNS 方程的数学性质及各种正则化方法；第 4 节专门介绍一次空间推进解法；第 5 节介绍总体松弛法；第 6 节是时间相关的空间推进迭代解法；第 7 节介绍广义 DPNS 方程的研究情况，最后第 8 节介绍 DPNS 方程数值解法的最新进展.

2 扩散抛物化 N-S 方程及其推导思想

不同形式的 DPNS 方程，都是假定流动存在一主流方向，沿主流方向的黏性项与其他方向的黏性项相比可以忽略不计的前提下导出的. 因此，DPNS 方程组左端为全部无黏项，而右端的黏性项保留多少，则与具体的推导方法有关. 我们认为 1967 年高智 [6] 提出的两层匹配原则是比较合理的. 它将计算区域分为内层 (黏流层) 和外层 (无黏流层)，并对内、外两层分别进行量级估计，然后在两层的交界线 (面) 上使偏微分方程组能够光滑地连接起来. 按照 Prandtl 的边界层理论的分析方法，保留到 $O(\varepsilon)$ 量级的内层方程，就是所要的 DPNS 方程组. 根据上述原则，我们可以对各种简化 N-S 模型的发展历史作一个回顾.

1964 年，Davis 等 [7] 在高超声速钝体绕流计算中考虑了二阶边界层效应，后来又发展为 VSL 方程组 [8]、并采用总体松弛法求解该方程组给出高速钝头体绕流数值解. 按照两层匹配原则，VSL 方程相当于保留到 $O(\varepsilon)$ 的 N-S 方程，但法向动量方程的黏性项被全部略去了；三维情形，周向的黏性项也被略去 [37]. 研究表明文 [6] 和文 [11] 所提简化 N-S 方程组的形式一致，最为合理；但不论是考虑问题的出发点还是推导简化 N-S 方程组的原则两者均不相同. 高智 [6] 以高雷诺数绕流场无黏流与黏流强相互干扰机理研究为出发点，推导原则是把计算区域分为紧贴物面的黏性层与离开物面有限距离 (如激波) 的无黏层，根据两层在某一条连接线上精确到 $O(\varepsilon)$ 量阶光滑过渡的原则导出简化方程，称呼方便起见，简称无

维普资讯 http://www.cqvip.com

黏 - 黏性匹配 (IVM) 方程. Tolstykh[11] 考虑的是高超声速稀薄气体钝头体绕流问题, 类似于边界层的算法思想, 以物面和无穷远来流为边界条件求解钝头体整个黏性绕流场, 精确到 $O(1)$ 量阶是边界层方程组、精确到 $O(\varepsilon)$ 量阶、即二阶边界层方程组与 IVM 方程一致. Rudman 等 [9] 在研究平板前沿附近的高超音速流动时, 将流动变量展开为下列级数

$$\begin{aligned} u &= V_\infty(\bar{u}_0+\varepsilon\bar{u}_1+\cdots) \\ v &= V_\infty\delta(\bar{v}_0+\varepsilon\bar{v}_1+\cdots) \\ p &= p_\infty p_{\mathrm{ref}}(\bar{p}_0+\varepsilon\bar{p}_1+\cdots) \\ \rho &= \rho_\infty \rho_{\mathrm{ref}}(\bar{\rho}_0+\varepsilon\bar{\rho}_1+\cdots) \\ T &= T_\infty \bar{T}_{\mathrm{ref}}(\bar{T}_0+\varepsilon\bar{T}_1+\cdots) \\ X &= \bar{x}L, \quad Y=\bar{y}\delta, \quad \delta=\bar{\delta}L \end{aligned} \tag{1}$$

其中, L 为 x 方向的特征长度, δ 为 y 方向的特征长度, $\varepsilon = Re^{-1/2}$, ref 代表参考值. 将展开式 (1) 直接代入 N-S 方程, 并略去 Δ^2, $(Re_{\mathrm{ref}})^{-1}$ 及 ε 量级和更小的 (这里 $\Delta^2=\bar{T}_{\mathrm{ref}}/M_\infty^2\gamma$, $Re_{\mathrm{ref}}=\rho_\infty V_\infty L\bar{\rho}_{\mathrm{ref}}^{-1}/\mu_\infty\bar{\mu}_{\mathrm{ref}}$), 得到抛物型的 PNS 方程 [9,31]. 在 PNS 方程中流向动量方程中的压力导数项 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 被略去了. Lubard 等 [12] 给出了更为完整的 PNS 方程, 其中包含了压力导数项 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$. 王汝权等 [72] 把文 [6] 无黏 - 黏性光滑匹配的简化思想推广到三维情形, 导出了修正的 PNS (MPNS) 方程. 我们发现, MPNS 与文 [12] 的 PNS 方程有细微的差别, 即三维 MPNS 方程保留了所有的 $O(\varepsilon)$ 项, 而 PNS 仅保留二阶导数的黏性项, 而丢掉了形式为 $\mu\dfrac{\partial f}{\partial y}, \mu\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ 的 $O(\varepsilon)$ 项, 而这些项常常起着重要作用. Golovachov 等 [10] 在求解超声速喷管流时, 给出了另一组简化 N-S 方程, 左端为 Euler 方程, 右端仅含 $O(1)$ 量级的黏性项, 称呼方便起见, 称它为 Euler 边界层组合 (EBC) 方程. 按照文 [72] 的分析, EBC 方程属于薄层方程, 三维情形周向略去了二阶扩散项 [36]. 以上我们叙述了非守恒型 DPNS 方程的发展情况.

20 世纪 70 年代末期, 在 DPNS 模型发展过程中的另一个重要贡献是美国学者导出的强守恒型 PNS 方程 [31] 及 TLNS 方程 [14], 其特点是同时利用直角坐标下的速度分量和某一坐标方向近似沿主流方向的一般曲线坐标, 从而可将完全 N-S 方程写成强守恒型, 再略去沿主流坐标方向的全部黏性项即为守恒型 PNS 方程; 如将主流坐标方向及周向的黏性项全部略去即得 TLNS 方程. 在实际计算中, 还从保留的黏性项中略去了所有的混合导数项 [31]. 从强守恒型 PNS 或 TLNS 方程出发构造离散格式, 可以跨越间断进行计算, 因而被广为采用. 后来高智 [73] 推导出任意曲线坐标的 DPNS 方程. 但是, Eca 等 [74] 指出, 若不用直角坐标下的速度分量而用逆变速度分量, 离散后的 DPNS 方程会产生非物理的源项, 从而破坏守恒性质. 此外, Pratap 等 [15] 针对不可压缩流提出的部分抛物化 N-S (PPNS) 方程, 实际上就是可压缩黏性流 DPNS 方程在不可压条件下的简化形式.

对各种不同 DPNS 方程的精度及合理性问题, 某些学者曾做了比较研究, Golovachov 等 [75] 和 Emelyamova 等 [76] 对球头超音速黏性绕流流场, 用完全 N-S 方程, VSL 方程, IVM 方程及 EBC 方程分别作了计算, 发现以下现象: 当 $Re \geq 3\,550$ 时, 4 组方程的数值解基本一致. 当雷诺数减少时, 不同简化 N-S 模型与 N-S 方程组的解偏差增大; 当 $Re = 600$, $M_\infty = 6$ 时, IVM 方程与 N-S 方程给出的物面热流相差 4%, VSL 方程与 N-S 方程相差 6%, 而 EBC 方程与 N-S 方程相差达到 20%. 这一事实说明, 在 DPNS 方程中保留 $O(\varepsilon)$ 的项起了关键作用. 高智 [77] 用 8 类不可压 N-S 方程的准确解 (即不可压驻点流, Couette 流, 旋转圆盘附近的流动, Hagen-Poiseuille 流, Hamel-Jeffery 流, 轴对称层流射流及 van Karman-Batchelor 流等) 和各种简化 N-S 模型的解作了比较, 只有 IVM 方程与 N-S 方程准确解完全一致. 而 VSL 方程和 EBC 方程解仅对 Couette 流与 N-S 准确解一致, 其它 7 类均不一致. 刘学宗等 [78] 指出, 在 RNS(实际上是 VSL) 方程 [42] 中略去的项 $\dfrac{\mu}{Re}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, 在回流区及物面附近可以达到与 $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ 同一量级, 因此在这些区域略去它是不合理的. DPNS 方程在边界层分离点数学奇异性问题的分析 [79] 表明: IVM 方程与完全 N-S 方程一致在分离点无数学奇异性, 而 VSL 方程和 EBC 方程存在数学奇异性. 上述所有分析说明, N-S 方程简化中完整地保留 $O(1)$ 和 $O(\varepsilon)$ 量阶项的 DPNS 方程, 即 IVM 方程是 DPNS 方程中最合理的形式.

目前, 三维形式的 DPNS 方程在实际问题中应用最多, 按照文 [72] 的做法, 我们将在贴体坐标 (x, y, φ) 中写出各种 DPNS 方程的具体形式.

三维 DPNS 方程组可写成一般形式 [72]

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x}+\frac{\partial \rho v r H}{\partial y}+\frac{\partial \rho w H}{\partial \varphi}=0 \tag{2a}$$

$$\frac{\rho u}{H}\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\rho w}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+ \frac{k}{H}\rho u v-\frac{\sin\theta}{r}\rho w^2+\frac{1}{H}\frac{\partial p}{\partial x}=\alpha_i \tag{2b}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\frac{\rho u}{H}\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\rho w}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{k}{H}\rho u^2-\frac{\cos\theta}{r}\rho w^2+\frac{\partial p}{\partial y}=\beta_i \tag{2c}$$

$$\frac{\rho u}{H}\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\rho w}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+\frac{\rho w}{r}(u\sin\theta+v\cos\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\gamma_i \tag{2d}$$

$$\frac{\rho u}{H}\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\rho w}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}-\left(\frac{u}{H}\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{w}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)=\delta_i \tag{2e}$$

$$p=\frac{\gamma-1}{\gamma}\rho T \tag{2f}$$

其中假设 u,v,w 为 3 个坐标的速度分量，ρ,p,T,μ,λ 分别代表密度、压力、温度、黏性系数和导热系数. 各量的无量纲因子为： $x,y,r\sim L$ (物体特征长度); $u,v,w\sim V_\infty$ (来流速度); $\rho\sim\rho_\infty$, $p\sim\rho_\infty V_\infty$; $T\sim V_\infty^2/c_p$ (c_p 为定压比热), $\mu\sim\mu_\infty$, $\lambda\sim\lambda_\infty$; $Re=(\rho_\infty V_\infty L)/\mu_\infty$ 为雷诺数， $Pr=Mc_p/\lambda$ 为 Prandtl 数， $r=r_0+y\cos\theta$, $H=1+ky$; $r_0(x)$ 是从物面到对称轴的垂直距离， $k=k(x)$ 是沿 x 方向的物面曲率； $\theta=\theta(x)$ 是物面切线与对称轴的夹角. $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i$ 代表不同简化形式的右端黏性项. 对 IVM 方程 [6], 方程组 (2) 右端黏性诸项为

$$\alpha_1=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\mu}{Re}\left(\frac{k}{H}+\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k}{H}\frac{u}{Re}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3a}$$

$$\beta_1=\frac{4}{3Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{2}{3Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)+\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\mu}{Re}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{2}{3Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin\theta}{r}\mu u\right) \tag{3b}$$

$$\gamma_1=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{4}{3Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\frac{2}{3Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) \tag{3c}$$

$$\delta_1=\frac{1}{RePr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{1}{RePr\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)+\frac{\mu}{RePr}\left(\frac{k}{H}+\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial T}{\partial y}+\Phi \tag{3d}$$

其中， $\Phi=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k}{H}u\right)^2+\frac{\mu}{Re}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$.

对 PNS 方程 [12], 方程组 (2) 右端诸项为

$$\alpha_2=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) \tag{4a}$$

$$\beta_2=\frac{4}{3Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{2}{3Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) \tag{4b}$$

$$\gamma_2=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{4}{3Re\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\frac{2}{3Re}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4c}$$

$$\delta_2=\frac{1}{RePr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{1}{RePr\,r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)+\Phi \tag{4d}$$

对 VSL 方程 [8,80], 方程组 (2) 右端诸项为

$$\alpha_3=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\mu}{Re}\left(\frac{k}{H}+\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k}{H}\frac{\mu}{Re}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{5a}$$

$$\beta_3=0 \tag{5b}$$

$$\gamma_3=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\frac{2}{3Re}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) \tag{5c}$$

$$\delta_3=\frac{1}{RePr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\mu}{RePr}\left(\frac{k}{H}+\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial T}{\partial y}+\Phi \tag{5d}$$

对 EBC 方程 [10,36], 方程组 (2) 的右端项与边界层方程组的黏性项一致，它们为

$$\alpha_4=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \beta_4=0 \tag{6a}$$

$$\gamma_4=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\delta_4=\frac{1}{RePr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\Phi \tag{6b}$$

上述 4 组方程中，式 (3) 及式 (4) 为非薄层方程；式 (5) 及式 (6) 为薄层方程，右端仅保留 y 方向的黏性项. 当周向出现分离流时，薄层方程不能准确描述这类流场.

众所周知， Patankar 和 Spalding 在利用抛物化 Navier-Stokes 方程计算燃烧及传热的内流方面有

维普资讯 http://www.cqvip.com

其独到的见解和重要的贡献. 他们曾先后提出了抛物型流动的方程 [15,62~64] 和部分抛物型 Navier-Stokes (PPNS) 方程 [15,64], 并用他们创立的压力修正法或简称 SIMPLE 算法及 SIMPLER 算法 [66] 求解上述方程, 解决了大量的燃烧及传热、传质问题并研制了大批的商业通用软件 [67,68]. 首先 Patankar 和 Spalding 提出了单向坐标与双向坐标的概念 [66], 在一个坐标的给定位置上, 其物理量的变化仅受一侧条件变化的影响, 这样的坐标称为单向坐标. 其意义在于, 若能用一个单向坐标来描述给定的状态, 就可以大大节省计算机的存储量与计算时间. 对流是一种单向过程, 而扩散则具有双向效应, 当对流作用大大超过扩散作用时, 空间坐标就近乎单向的了. 在单向坐标基础上, Patankar 和 Spalding 提出了抛物型流动的概念 [66], 即当二维或三维定常流存在一个单向坐标时, 相应的流动就叫做抛物型流动. 在这种情况下, 沿单向坐标方向具有一主速度, 对流相对于扩散而言总是起主导作用, 因而在这个方向上的扩散效应可以忽略不计. 在三维抛物型方程中 [64], 沿主流方向 x 的压力梯度用 $\dfrac{\mathrm{d}\bar{p}(x)}{\mathrm{d}x}$ 来代替, 其中 $\bar{p}(x)$ 为平均压力, 垂直于主流方向的横切面上的压力 p' 看做是 $\bar{p}$ 的一种摄动, 总的压力为 $\bar{p}$ 与 p' 之和. 对内流而言, $\bar{p}$ 的变化正好调整到满足在整个管道横切面上的总质量守恒. 基于以上近似, 完全 N-S 方程变为一组抛物型方程, 并可用 SIMPLE 算法求其数值解. 抛物流的典型例子有绕流扭曲翼型的边界层, 具有矩形横截面管道的内流以及由圆孔口流出的射流等.

1975 年至 1976 年期间, Pratap-Spalding[15,65] 进一步提出了部分抛物型 Navier-Stokes (PPNS) 方程, 其形式与抛物化 N-S (PNS) 方程是一致的. 在 PPNS 方程的 SIMPLE 算法中压力场需对整个计算域存储, 而其他变量只须对一个或两个推进站存储即可, 因而较之解完全 N-S 方程大大节约了存储量, 但计算时间节省不明显.

我们注意到, 在 Patankar 和 Spalding 等人的工作中不论是抛物型流动或部分抛物型流动都假定在主流方向不存在回流区, 后来许多研究 者 [69,70,81,82] 证实对 PPNS 方程的这一限制是不必要的. 其次, 在 SIMPLE 算法或 SIMPLER 算法 中 [66] 每次只求解单个方程, 然后再用循环迭代法得到收敛解, 这种解法对某些问题收敛速度较慢; 而用联立求解方程组的算法 [70,82] 可大大改进收敛速度.

3 DPNS 方程的数学性质及正则化方法

早期人们对定常 DPNS 方程的数学性质不是十分清楚. 有的学者 [83,84] 认为 DPNS 方程作为初值问题提法是适定的, 可以推进求解. 例如为了求解钝头体超音速绕流流场, 可以先求出驻点解, 然后从驻点解出发沿下游推进求解. 他们的研究表明, 这种做法是不成功的. 事实上, Lighthill[85] 早已认识到, 边界层方程能作为纯粹的抛物型方程沿流向推进求解是因为流向动量方程中压力导数 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 事先给定的缘故. 若 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 是未知的, 则边界层方程在分离点附近将产生无穷多个解. Garvine[86] 指出, 在黏流及无黏流相互干扰的问题中, 压力场不能事先给定, 因而初值问题是不适定的. 作者计算平板边界层时, 当 $M < 1.2$ 时采用边界层方程, 而 $M \geq 1.2$ 时用 VSL 方程. Miller[84] 认为对黏流与无黏流干扰问题, DPNS 方程作为初值问题提法是适定的. 只要在超音速区利用含黏性项的两族特征并在跨音速区联结内流 (黏性流) 与外流 (无黏流为主) 同时向前推进便可消除不适定性, 这一观点有待进一步讨论.

20 世纪 70 年代初, Lin 等 [87] 已经发现在亚音速区实现推进求解 PNS 方程有困难. 他们利用连续方程及能量方程将流向动量方程中的压力导数 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 消去, 导出下列关系

$$u_x = \frac{M^2}{M^2-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\cdots \tag{7}$$

其中 $M = \dfrac{u}{a}$ (a 为声速). 显然, $M > 1$ 时可以推进求解, $M < 1$ 时 (3) 为反热传导方程, 不适于推进求解, $M = 1$ 为奇异线. 在我国, 1967 年高智 [6] 提出二维简化 N-S 方程后, 即与王汝权等合作研究钝头体超音速黏性绕流的数值解法. 有关工作 1978 年在宇航飞行器计算空气动力学会议上报告 [88], 受到与会者的极大重视. 为了弄清 DPNS 方程的数学特性, 王汝权等 [88~90] 做了一系列研究工作, 较为严格地从数学上论证了 DPNS 方程当 $u < a$ 时的不适定性. 高智 [73] 提出了 DPNS 方程数学性质的特征、次特征分析, 由高阶黏性项决定的特征表明所有的 DPNS 方程均为双曲 - 抛物型; 但对流 - 压力项决定的次特征表明 $M < 1$ 时所有 DPNS 方程为椭圆型、仅当 $M > 1$ 时它们才为双曲型, 表明在亚声速区 DPNS 方程初边值问题的提法不适定, 因此称这类简化方程为扩散抛物化 (DP) N-S 方程才能正确反映它们的数学物理性质. 文 [73] 的特征、次特征分析也表明: N-S 方程组抛物化的简化方程组就是经典 Prandtl 边界层方程组, 因此许多文献把 DPNS 方程组称作抛物化 N-S 即 PNS 方程组既不能正确反映它的数学物理性质, 又容易把它与边界层方程组相混淆. 刘学宗等 [78] 对

维普资讯 http://www.cqvip.com

不可压 DPNS 方程的数学性质作了详尽的分析.

文 [88, 91] 指出从数学上看, 只要将 DPNS 方程中任何一个未知量沿推进方向的一阶导数固定, 则初边值问题提法就是适定的. 例如给定法向动量方程中的速度导数 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$[8]; 给定切向速度导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$[92]; 大多数学者则给定压力导数 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 来达到方程正则化, 其中最常用的正则化方法是文 [13] 提出的压力分裂法, 即 $\dfrac{\partial p}{\partial x}=\omega\dfrac{\partial p^h}{\partial x}+(1-\omega)\dfrac{\partial p^l}{\partial x}$. 第 1 项为双曲性质部分, 第 2 项为椭圆性质部分. 用特征值分析发现, 若将 $(1-\omega)\dfrac{\partial p^l}{\partial x}$ 看作已知源项或略去, 则当 $u>0$ 和 $\omega\leq\gamma M_x^2[(\gamma-1)M_x^2+1]^{-1}$ $(M_x=u/a)$ 时, DPNS 方程组为双曲 - 抛物型, 其初边值问题提法是适定的, 对于薄亚音速层的流动, $(1-\omega)p_x$ 一项影响很小, 可以略去; 但若亚音速层的厚度足够大时, 一次空间推进解法是不适定的, 必须采用总体松弛法. 为了克服推进过程的不稳定性, 人们还研究了其他处理方法, Kovenya[93] 提出 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 非线性组合正则化方法; Lin 等 [87] 提出子层近似法, 即取紧靠亚音速层的超音速区内某一点的压力导数 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 作为整个亚音速层的值, 不过当亚音速层加厚时仍然会出现不稳定现象. 应该说 Helliwell 等 [94] 对一次空间推进法的数值分析具有指导意义, 他们不对未知量的流向导数值作特殊处理, 而是把压力导数取不同差分形式来满足稳定性要求. 如对二维 DPNS 方程, p_x 用向后差分

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{p_i-p_{i-1}}{\Delta x} \tag{8a}$$

则隐式差分格式的稳定性条件为

$$\Delta x>\Delta x_{\min},\quad \Delta x_{\min}=\frac{\rho u(1-M_x^2)\Delta y^2}{4\mu\gamma M_x^2\sin^2(\beta/2)} \tag{8b}$$

其中, $\beta=km\Delta y$ 为波数.

p_x 取向前差分

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{p_{i+1}-p_i}{\Delta x} \tag{9a}$$

则稳定性条件为

$$\Delta x>2\Delta x_{\min} \tag{9b}$$

上述结论与不适定性问题的一般理论是一致的. 显然, Helliwell 等 [94] 只讨论了一阶格式的情形, 王汝权等 [95] 进一步讨论了加权平均格式的情形, 即

$$(p_x)_{i+s}=s(p_x)_{i+1}+(1-s)(p_x)_i,\quad 0\leq s\leq 1 \tag{10a}$$

并得出更一般的稳定性条件: 当 $M_x^2\geq 1$ 及 $s\geq 1/2$ 时, 隐式格式绝对稳定; 当 $M_x^2<1$ 及 $s=1/2$ 时, (Crank-Nicolson 格式), 隐格式绝对不稳定; 当 $M_x^2<1$ 及 $s>1/2$ 时, 稳定性条件为

$$\Delta x\geq\Delta x_{\min}=\frac{N}{(2s-1)}\Delta y^2 \tag{10b}$$

$$N=(\frac{1}{M_x^2}-1)[\frac{\gamma\mu}{\rho uRe_\infty}(1-\cos k\Delta y)]^{-1}\geq 0 \tag{10c}$$

当 $s=1$ 时简化为文 [94] 的结果. 在计算中, 为了提高推进方向的精度, 我们取 $s=0.6$. 在此基础上, 王汝权等 [95] 还提出了推进方向的预估 - 修正法, 对 DPNS 方程中的流向导数 $\partial f/\partial x$, 采用

$$\text{预估步}\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\overline{n+s}}=\frac{f^n-f^{n-1}}{\Delta x} \tag{11a}$$

$$\text{修正步}\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n+s}=\frac{\bar f^{n+1}-f^n}{\Delta x} \tag{11b}$$

其中 $\overline{f^{n+1}}$ 是求解一次 DPNS 方程后得到的预估值. 对三维情形, 在周向通常用迭代方法求解 [94,96]. 但由于迭代收敛的要求, 推进步长必须满足条件

$$\Delta x\leq\Delta z\left|\frac{w}{u}\right| \tag{12}$$

联合前述差分格式稳定性的要求, 导致如下的严格限制

$$\Delta x_{\min}\leq\Delta x\leq\Delta z\left|\frac{w}{u}\right| \tag{13}$$

为了消除 Δx 的上界限制, 王汝权等 [97] 采用 Z 字形差分格式来代替文 [94, 96] 中周向的中心格式.

在 DPNS 方程正则化研究方面, 张涵信等 [98,99] 提出的修正的压力分裂法较彻底地解决了数值不稳定性问题, 他们把流向压力梯度分裂为

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\omega\frac{\partial p}{\partial x}+(1-\omega)\frac{\partial p_b}{\partial x} \tag{14a}$$

其中 $\partial p_b/\partial x$ 代表物面上的压力梯度, 只须当 $M>1$ 取 $\omega=1$; 当 $0\leq M\leq 1$ 取 $\omega=M^2$. 则在亚声速区空间推进是稳定的. $\partial p_b/\partial x$ 用壁面上切向应力的横向导数来代替, 只须流向动量方程在物面取值即可得到, 对二维情形为

$$\frac{\partial p_b}{\partial x}=\frac{1}{r_b}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu rH^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{H}\right)\right]\right\}_b \tag{14b}$$

作者对二维及三维球 - 锥黏性绕流场的计算表明, 用修正的压力分裂法无论用一阶隐式差分格式还是用二阶 Crank-Nicolson 格式推进求解都是稳定的, 而且在推进过程中消除了步长的下界限制. 此法

维普资讯 http://www.cqvip.com

的不足之处是破坏了 DPNS 方程的强守恒性，因此对含有激波等间断的复杂流场值得进一步研究.

除了 DPNS 方程推进适定性研究外，高智等 [79] 还研究了 DPNS 方程在边界层分离点有无数学奇性的问题. 他们证明了 DPNS 方程初边值问题的解的存在与唯一性 [100].

4 一次空间推进解法

20 世纪 60 年代末期，伴随 DPNS 方程的问世随即开始了一次空间推进解法的研究 [9,13,31,34,35,42]. 与时间相关法相比，求解定常 DPNS 方程的一次空间推进解法节省 1~2 个数量级的 CPU 时间和巨大的存储量，因而为数值模拟大型超音速和高超音速黏性流场开辟了广阔的前景. 早期人们主要研究非守恒型 DPNS 方程的一次空间推进解法，后期更关心守恒型 DPNS 方程的相应解法. 下面分别介绍两类方法的代表性成果.

4.1 守恒型 DPNS 方程的空间推进解法

忽略周向扩散效应的定常三维 VSL 方程，EBC 方程及 TLNS 方程等薄层假定下导出的 DPNS 方程，其流向及周向都是一阶方程组，原则上可以在这两个方向实现推进求解；而保留周向扩散效应的三维 PNS 方程和 IVM 方程需周向迭代求解 [94,96] 或联立求解 [13,31]. 最初在设计非守恒型 VSL 方程组的解法时，多沿用边界层方程的非耦合迭代求解思想，即在推进方向的每一站，将方程组中的每一个方程单独离散，个别求解，然后采用循环迭代法求出满足方程组的收敛解. 王汝权等 [95] 中详细分析过这类方法的优缺点，其优点是简单易行，容易编程序；但稳定性及收敛性差. 例如 1970 年文 [8] 针对 VSL 方程组提出的总体松弛法就采用了这种非耦合迭代技术. 应用到非光滑物体及复杂流场时遇到了稳定性问题 [31]. 为了克服上述缺点，人们发展了分类耦合迭代的空间推进解法 [90,92,101]，即将 VSL 方程组中的一阶子方程组与二阶子方程组分别离散，分别求解，相互迭代以达到收敛解，大大提高了稳定性及收敛性. 对于保留周向扩散项的 DPNS 方程，一阶子方程组只有一个连续方程，单独求解的稳定性差 [95]，因此，多采用完全耦合、沿流向推进、周向迭代的解法 [94,96]. 在推进方向的每一站，要在每个子午面上解一个大型联立代数方程组. 周向的迭代方法也有不同，如 Rubin 等 [96] 采用预估 - 修正方法， Helliwell 等 [94] 采用 Gauss-Seidel 迭代方法，王汝权等 [97] 采用 Z 字形差分格式的非迭代方法. 由于非守恒型 DPNS 方程的对流项大都采用中心型差分格式逼近，所以非守恒型方程的解法只适用于光滑流场的计算.

4.2 守恒型 DPNS 方程的空间推进解法

从守恒型 DPNS 方程出发离散化，可以跨越间断计算，因而这类空间推进解法得以广泛应用. 对流项可利用守恒型双曲方程的高精度高分辨率差分格式离散，如 MacCormack 格式 [102]，Beam-Warming 格式 [103]，CSCM 格式 [104]，TVD 格式 [105~109] 及加权 ENO 格式 [110]. Vigneron 等 [13] 最早采用中心差分格式及非迭代的隐式近似因式分裂算法，最终导出沿法向及周向的两个块三对角阵线性方程组，再利用标准程序计算，为阻止因中心差分格式引起的非物理振荡，可在隐式格式的右端加显式处理的 4 阶人工黏性项. Lawrence 等 [106] 采用高分辨率 TVD 格式来逼近对流项，但亚音速层内仍用中心格式. 后来， Korte 等 [109] 克服了这个困难，可将 TVD 格式应用到全流场. 为了便于实现并行计算，人们发展了全显式的 MacCormack 格式解法 [107] 和 TVD 格式解法 [109]，据称第一种显式解法的计算时间与隐格式相当，而 TVD 格式在对流项上要化更多的 CPU 时间. 由于隐式解法计算量大，而全显式解法的推进步长要求太严等缺点， Liu 等 [108] 发展了一种 TVD 格式的显 - 隐解法，即黏性影响大的物面法向用隐式格式，而黏性效应较弱的周向使用显式格式. 数值计算结果表明：显 - 隐算法比全隐式解法节约 1/3 的 CPU 时间. 值得指出的是，所有从守恒型 DPNS 方程出发建立的差分格式，当采用压力分裂公式 $p_x = \omega p_x^h + (1-\omega)p_x^l$ 时，都不是严格意义上的守恒解， Rubin 等 [34] 指出必须用特殊的写法才能做到严格守恒.

5 总体松弛法

定常 DPNS 方程的一次空间推进解法，适用于超音速区为主的大型黏性流场 (如细长弹体或航天飞机身部周围流场)，不适用于亚音速流、局部亚音速区、跨音速区以及各种波系相互干扰的复杂流场，这些区域应该用总体松弛法来计算. 下面简要介绍主要的总体松弛法.

5.1 总体松弛法

Davis[8] 对 VSL 方程提了一种总体松弛法，并成功地用来计算钝头体超音速黏性绕流. 其基本思想是，先求出钝头超音速流场的驻点解，再从驻点沿下游反复推进求解，直到迭代收敛为止. 为了克服推进过程中数值不稳定的困难，每次推进时先将法向动量方程中的 $\partial v/\partial x$ 相对固定 (由上次推进保留下来的 V 场求得). 若初始激波形状和 $\partial v/\partial x$ 给得

维普资讯 http://www.cqvip.com

精确, 经过少数几次迭代就能得到所需的解. 该方法是针对光滑物体设计的, 对非光滑物形遇到一些困难 [31]. Miner 等 [111] 和 Srivastava 等 [112] 克服了物面曲率间断的困难; 文 [113] 克服了激波形状收敛慢的困难; Srivastava 等 [101] 克服了差分格式不稳定的缺点. 由于这些改进, 使文 [8] 总体松弛法得以应用于三维问题 [80,114~116].

5.2 直线法和积分关系法

Tolstykh[11] 将著名的积分关系用于求解二维简化 N-S 方程, 计算稀薄气体球头超音速黏性绕流流场. 刘学宗等 [117] 用更为简单的直线法成功地求解了二维简化 N-S 方程 [6]. Voronkin[92] 也用直线法求解了 VSL 方程, 两个工作的不同点已在文 [90] 中说明. 文 [90, 118] 曾用直线法和改进的总体松弛方法算出轴对称及三维球 - 锥超音速黏性绕流的亚、跨音速流场, 再用改进的 Voronkin 计算方法求得全流场, 其精度和稳定性均令人满意. 直线法的计算量和存储量很小, 但提供的流场范围小; 总体松弛方法可以给出光滑头部的大范围流场.

5.3 多重推进 - 迭代解法

Rubin[42] 认为当黏性流场的主要部分为超音速区, 而亚音速区 (通常紧贴于物面) 的厚度 $y_m = O(Re^{-1/2})$ 时, 可采用一次空间推进法求解 DPNS 方程. 若亚音速区占流场的相当部分或全部, 就应该考虑下游流场对上游的影响而采用多重推进 - 迭代解法. 这类方法的文献很多, 但可以归纳为压力修正法、压力分裂法及通向量分裂法三大类.

5.3.1 压力修正法

先给定压力场 (如有分离区还应保留速度场), 然后通过 DPNS 方程计算出其他流动参数, 利用新的流场参量再修正压力场, 如此反复迭代直至收敛. 最初, 人们通过解一个 Poisson 方程来给出压力场 [31,69], 后来发现解 Poisson 方程的计算量太大, 又发展出不解 Poisson 方程的耦合解法 [70,81,82], Rubin 的研究表明 [43]: 无论是可压或不可压 DPNS 方程, 当流向动量方程中的压力导数 $\partial p/\partial x$ 用显式差分时, 多重推进 - 迭代方法是不稳定的; 当 $\partial p/\partial x$ 用向后差分时将出现漂移 (departure) 解, 即指数增长的解; 只有当 $\partial p/\partial x$ 用向前差分时, 推进 - 迭代方法才是稳定的. Khosla 等 [119] 利用数值实验进一步证明: 对于压力导数 $\partial p/\partial x$ 的差分表示, 以下 3 种做法都是等价的: p_x 用向前差分表示; $p_x = \omega p_x^h + (1-\omega)p_x^e$, 其中双曲部分 p_x^h 用向后差分, 椭圆部分 p_x^e 用向前差分; 当马赫数 $M > 1$ 时, p_x 用向后差分, $M < 1$ 时, p_x 用向前差分. 总之, 如存在亚音速区, p_x 必须采用向前差分, 并经过多次推进和迭代的方法求得流场. 刘学宗等 [78] 指出, 多重推进 - 迭代方法的收敛速度取决于初始流场的好坏, 网格点的数目, 沿流向的网格尺寸以及雷诺数的高低等各种因素. 对高雷诺数和细网格情形, 有时沿流向的扫描迭代次数多达几百次. 不过, 在一般情况下定常 DPNS 方程的推进 - 迭代解法仍比时间相关法收敛速度快得多 [120]. 为了加快推进 - 迭代法的收敛速度, 人们曾用过 Gauss-Seidel 迭代 [43], 交替方向显式迭代 [121], 强隐式方法 [122], 交替方向隐显式迭代 (ADI) 方法 [123], 多重网格法 [124,125] 和区域分裂法 [126] 等多种加速方法.

5.3.2 压力分裂法

Rakich[120] 最早提出基于压力分裂的推进 - 迭代方法. 先将基本方程改写为下列形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_v) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_v) = -\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (15)$$

其中 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ 代表通向量, $\boldsymbol{F}_v, \boldsymbol{G}_v$ 为黏性项, $\boldsymbol{E}^* = (\rho u, \rho u + \omega p, \rho uv, \rho e_t)$, $P = (0, 0, (1-\omega)p, 0)$, 根据 Vigneron[13] 的分析, 取 $\omega = \gamma M^2[1 + (\gamma - 1)M^2]^{-1}$, 这里 γ 为比热比. 在一次空间推进中, 通常将 $(1-\omega)p$ 略去了. 在多重推进 - 迭代解法中, 式 (15) 可写成

$$L^n + \omega p_x^n = -(1-\omega)p_x^{n-1} \qquad (16)$$

其中 n 为迭代次数, L 代表流向动量中的其他各项. Rakich[120] 证明下列迭代格式是稳定的.

$$\begin{aligned} &L^n \Delta x + \omega \Delta_{i-1} p^n = -(1-\omega)\Delta_i p^{n,n-1} \\ &\Delta_i p^{n,n-1} = p_{i+1}^n - p_i^n \end{aligned} \qquad (17)$$

作者对膨胀拐角的计算表明, 上述迭代格式比时间相关法收敛速度快, 一般用 16 次迭代即可达到所要求的解. 许多人对文 [120] 的迭代格式 (17) 的加速收敛问题做了研究. Barnett 等 [121] 提出交替方向显式 (ADE) 加速方法, Rubin 等 [123~126] 研究了多重网格法, Zhuang[127] 利用对称的 Gauss-Seidel 迭代方法等.

5.3.3 通向量分裂方法

为了构造守恒型 DPNS 方程的推进 - 迭代方法, 最简单的做法就是将无黏项的通向量进行分裂, 即 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^+ + \boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^+ + \boldsymbol{F}^-$, $cG = \boldsymbol{G}^+ + \boldsymbol{G}^-$, 对正通量采用向后差分, 负通量采用向前差分, 然后交替从正方向及负方向推进求解, 并迭代至收敛. Rubin[128] 就是用 Beam-Warming 通向量分裂法和对称 Gauss-Seidel 迭代法构造 DPNS 方程的推进 - 迭代解法. Stookesherry 等 [129] 利用 CSCM 算法建立对称迭代格式. Xue 等 [130] 也用 CSCM 算

法构造了时间相关的推进 - 迭代格式. 与压力分裂法不同的是, 通向量分裂法是守恒的, 并可模拟分离流.

6 时间相关的空间推进 - 迭代解法

在前两节中我们较为详细地介绍了定常 DPNS 方程的一次空间推进解法和总体松弛法. 前一种方法容易出现漂移解, 第 2 种方法则有收敛性问题. 20 世纪 80 年代人们发现从非定常 DPNS 方程出发构造空间推进解法要比定常方程优越 [131~134]. Chang 等 [134] 分析认为, 前者容易保证格式的守恒性, 后者会破坏守恒性; 当用不等距步长推进时, 前者稳定性好, 而后者会变得不稳定; 当采用压力分裂法时, 即 $p_x = \omega p_x^h + (1-\omega)p_x^e$ 及 $\omega = \sigma\gamma M^2[1+(\gamma-1)M^2]^{-1}$, 其中 σ 为安全因子, 对定常 DPNS 方程, 一般只能取 $\sigma \leq 0.85$, 而非定常 DPNS 方程可取 $\sigma \leq 1$. 此外, Kaushik 等 [132] 和 Newsome 等 [133] 的数值实验证实: 对薄亚音层流动, 时间相关的 DPNS 方程一次推进解法比定常 DPNS 方程的推进 - 迭代法收敛速度快得多, 而数值结果的精度是一致的.

关于时间相关的 DPNS 方程空间推进思想, 在文 [134~136] 中有详细的阐明. 通常采用基于特征分裂 (如文 [137] 或文 [138] 的分裂法) 或基于压力分裂的通向量分裂法, 即将流向导数 $\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}$ 改写为 $\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = \dfrac{\partial \boldsymbol{E}^+}{\partial x} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}^-}{\partial x}$, 若令 $\dfrac{\partial \boldsymbol{E}^-}{\partial x} \equiv 0$, 即得到一次空间推进法, 但必须在每一推进站进行局部时间迭代. 由于 $n+1$ 站的初值可从 n 站得到, 因而每一站的局部迭代是快速收敛的. Xue 等 [19,130,139] 利用文 [104] 提出的 CSCM 偏心格式进一步发展了二维 [129] 及三维 [19] 时间相关 DPNS 方程的推进 - 迭代解法. 其特点是将一次推进解法与多重推进 - 迭代解法统一起来, 可以计算有局部亚音速区及分离流的超音绕流流场; 还将显式格式与隐式格式结合起来 (物面法向用隐式, 周向用显式), 大大减少了计算量, 用上述方法成功地模拟了航天飞机简化外型的黏性流场. 就在不久前, Kato 等 [140~143] 也做了类似大量研究工作. 当然, 时间相关的推进 - 迭代解法的一些理论问题尚待进一步研究, Thompson 等 [144] 指出了几个问题, 如利用通量差分分裂可能会破坏方程的守恒性; 在空间推进站局部迭代的收敛性受到多种因素的影响以及收敛速度对大库朗 (CFL) 数十分敏感等, 在使用时应注意研究.

除了从非定常 DPNS 方程构造一次空间推进解法和多重推进 - 迭代解法外, 为了获得局部亚音或跨音流场, 许多学者也利用熟知的时间相关法来求定常 DPNS 方程的解, 如 VSL 方程 [145], TLNS 方程 [146], PNS 方程 [147,148], Miller 等 [149] 利用时间相关法来模拟整机的大型黏性流场. 由于出发方程为 DPNS 方程, 其工作量比直接求解完全 N-S 方程要小得多.

7 广义扩散抛物化 Navier-Stokes 方程的研究

对剪切流 N-S 方程计算的理论分析 [40,41,150] 表明: 用差分计算最大 (即剪切) 黏性项 $\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 和最小黏性项 $\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 时, 要求法向网格间距 Δy 分别满足

对 $\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{\Delta y}{L} \ll Re^{-(1+q)/2}, \quad 0 \leq q \leq \frac{1}{2} \tag{18}$$

对 $\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\frac{\Delta y}{L} << Re^{-[\frac{1}{2}(1+q)+\frac{1}{m}(1-2q)]}, \quad 0 \leq q \leq \frac{1}{2} \tag{19}$$

其中 m 为差分格式的精度阶, $q=0$ 为经典边界层, $q=1/4$ 为分离点邻域多层边界层的下层. 当式 (18) 得不到满足, 所有黏性项均为截断误差项; 若式 (18) 被满足而式 (19) 不满足, 则 $\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 为误差项. 式 (19) 表明: 对高雷诺数问题, 可以说最小黏性项恒为误差. 因此, 高智建议在高雷诺数的 N-S 方程计算中, 黏性项只能保留最大剪切黏性项, 即应把单一坐标方向的扩散抛物化近似方法拓广为对 3 个坐标方向的扩散抛物化, 把 Navier-Stokes 方程组简化为广义扩散抛物化 N-S 方程组, 简称为广义 N-S 方程组 [40,150].

例如二维可压缩广义扩散抛物化 N-S 方程组为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0\\
&\rho\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\\
&\rho\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\
&\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho e + p)u] + \frac{\partial}{\partial y}[\rho e + p)v] =\\
&\qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu v\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial T}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu u\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial R}{\partial y}\Big)\\
&p = \rho RT
\end{aligned} \tag{20}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

其中 k 为导热系数. 按照主特征及次特征理论 [73], 广义 N-S 方程与 N-S 方程的次特征值完全一致, 广义 N-S 方程 (20) 的主特征值为 [150]

$$\sigma_1^3 = 0, \quad \sigma_2^2 = 0, \quad \lambda_6 = \frac{v}{u}, \quad \lambda_{7,8} = \pm i \tag{21}$$

广义 N-S 方程组有虚特征值, 其数学性质与 N-S 方程一致均为椭圆型, 但所含黏性项的数目比 N-S 方程少得多. 例如正交曲线坐标系中三维可压缩 N-S 动量方程含黏性项多达 102 项, 而相应的广义 N-S 动量方程的黏性项只有 6 项, 因而用广义 N-S 方程计算可大大节约计算时间, 即使计算丢掉的那些黏性项, 也在截断误差项之中 [40,150]. 申义庆等 [151,152] 的计算表明: 广义 N-S 方程组既适用于存在主流方向的高雷诺数流动, 也适用于无主流方向的脱体分离及大范围旋涡流动.

8 DPNS 方程数值解法的最新进展

最近几年 DPNS 方程的数值解法研究又有新的发展, 内容十分丰富 [153~167]. 值得指出的是, 人们提出了代替单步推进的块空间推进解法 [153~155], 大大提高了方法的收敛速度, 并可处理分离区和局部亚音速区等复杂黏性流场. 另一个新的研究方向是利用 DPNS 空间推进解法来求解完全 Navier-Stokes 方程 [155~157] 以便代替收敛慢的时间相关法. 这样做不但可以大幅度提高求解效率, 而且能将 Euler 方程, DPNS 方程和完全 N-S 方程有机地统一起来. 最后, 高智提出的离散流体力学算法 [168,169] 为多重尺度流动问题的解决打开了新的思路, 值得进一步研究. 下面将分别介绍最近几年 DPNS 方程数值解法在上述几个方面的发展情况.

8.1 PNS 方程空间推进解法的新发展

定常 DPNS 方程的优越性在于可用空间推进法求解, 它比时间相关法至少能节省一个数量级的 CPU 时间. 因此, 空间推进法的任何进步都对 DPNS 方程的数值解法的发展具有十分重要的意义. 最近几年 DPNS 方程的空间推进解法研究在处理分离区和局部亚音速区方面 [155~158]; 在提高收敛速度方面 [155] 以及在无结构网格的空间推进方法方面 [153,154] 都取得了新的进展. 多数空间推进思想可直接推广到完全 N-S 方程, 有望克服时间相关法所固有的收敛问题.

20 世纪末期, 由 Tannehill 领导的研究组发展了一套能自动处理有分离区和局部亚音速区的超音速黏性流动的数值方法和计算程序 [20,156]. 其基本思想是, 在超音速区占优势的黏性流场中, 仍采用 DPNS 方程的一次空间推进解法; 在出现分离和局部亚音速区时, 则用推进 - 迭代解法. 与以前不同的时是, Tannehill 等 [156] 提出了一种能自动预测干扰区范围的估算方法, 因而可以自动交替使用一次推进解法或推进 - 迭代法来模拟全流场. 虽然他们预测干扰区上、下游边界的相关函数还是带经验性质的, 但所提出的自适应思想是值得进一步改进和完善的. 我们认为, 在空间推进解法研究方面最有意义的成果是 2002 年 Parent 等人提出的推进窗口法 (the marching windows method)[155]. 此法将沿某个空间方向单步推进的解法发展为沿该空间方向的块推进方法, 从而大大提高了收敛速度. 作者的目的是将 DPNS 空间推进法的思想推广到完全 N-S 方程, 实际上该法可以用来求解 Euler 方程, DPNS 方程以及完全 N-S 方程, 而且自然地把 3 种方程统一在一类解法中. 块空间推进法要求事先确定当前的推进块区域, 其上、下游边界必须将干扰区域包含进去. 为此, 作者提出了推进块区域上、下游边界的判别准则. 据报导, 块推进方法虽然对每一个块区域需要进行迭代求解, 但总体效率极高, 其收敛速度远远超过时间相关法. 对某些流动问题的计算表明: 椭圆性很弱的流动, 其收敛速度可提高 24 倍; 而对存在较大分离区的流动也能提高 8 倍.

为了解决复杂物形的流动问题, 目前无结构网格已得到了广泛的应用. 同样道理, 采用无结构网格求解 DPNS 方程也势在必行, 在这方面 Nakahashi 等人的工作 [153,154] 将起到很好的推动作用.

8.2 完全 Navier-Stokes 方程的空间推进解法

众所周知, 完全 N-S 方程在空间区域为椭圆型, 必须解边值问题. 但通常都采用时间相关法来求其定常解. 其基本思想是将难于求解的边值问题化为初边值问题, 但增加了维数. 时间相关法的最大缺点是达到定常解的收敛速度太慢, 当流场中出现跨音速区或局部低速区时, 可能得不到收敛解. 最近几年, 人们将视线转向利用 DPNS 方程的空间推进解法, 来求解完全 N-S 方程, 以期获得比时间相关法更高效率的新方法. 早期, Lombard 等 [104] 就利用空间推进 - 迭代法求解完全 N-S 方程, 作者利用高分辨的 CSCM 差分格式及向前和向后交替推进 - 迭代方法获得快速收敛的结果. 随后张涵信等 [127] 及 MacCormack[170~172] 的工作亦属前、后交替扫描迭代的总体松弛法. 另一种是沿空间固定方向反复推进 - 迭代的总体松弛法 [8]. Yamaleev 等 [157] 及 Skurin[158,159] 的工作在这方面有更深入的研究. 两者均可称为压力修正的总体松弛法, Yamaleev 等先将流向压力梯度按 Vigneron[13] 方法进

维普资讯 http://www.cqvip.com

行分裂

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}=\omega\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}\right)+(1-\omega)\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)^{n-1} \tag{22}$$

其中右端第 1 项为当前的计算值，第 2 项为从上次已得到的压力场计算出来并作为源项处理. 为了计算修正的压力值，作者利用 Pletcher 等 [173] 的工作导出一个抛物压力修正方程，可求解亚音速、跨音速及超音速的流动问题，并显著地提高了收敛速度. Skurin[158] 报告了他们对总体压力松弛法的大量研究结果并指出： 1970 年 Davis[8] 提出的总体松弛法仍是一个潜力巨大的方法. 我们在文 [95] 中曾指出，Davis 方法可以对任何未知量沿流向的导数相对固定进行稳定的迭代求解. Skurin 等也采用压力梯度分裂形式 (22), 当 $1 \leq \omega \leq 3$ 时，沿空间推进迭代是适定的. 总体迭代的目的是使压力满足

$$|\bar{p}^s - p^s| < \varepsilon_p \ll 1 \tag{23}$$

其中 s 代表迭代的次数.

Skurin 等的研究表明：上述压力松弛法看似简单，本身却蕴含着巨大的潜力，即方法是通用的，可用来求解任何维数的可压缩或不可压黏性方程；可求解无主流方向的定常或非定常流动问题，能将可压与不可压黏性方程用统一算法求解，而且对低马赫数流动或超音速流场中出现局部亚音速区的流动都有很好的收敛性；算法简单不需要分裂算法；由于有良好的稳定性及收敛性保障，方法是高度有效的，非均匀网格的使用并未降低方法的收敛速度，仅当网格加密时，总体迭代的收敛速度有所减慢，此时，可用粗网格先算出初始近似，再计算细网格流场，便可大大加快收敛速度.

如前所述，块空间推进法是求解完全 N-S 方程的高效率方法， Parent 等 [155] 用推进窗口法求解平均 N-S 湍流方程，计算有钝前缘的无黏超音速进气道流动用 512×216 个网格，与普通时间相关法相比工作效率高出 24 倍；计算绕后台阶的黏性流动，网格为 256×128, 块推进法比时间相关法快 3.5 倍；计算下壁面为压缩与膨胀拐角并存的二维进气道的激波 - 边界层干扰问题，块空间推进法比时间相关法快 8.0 倍. 由此可看出块空间推进法的高效率程度.

8.3 离散流体力学算法

高雷诺数黏性流动的模拟是一个复杂和困难的问题. 主要原因是在此情况下流场呈现出多重尺度的流动状态，其中可含无黏区域 (可用 Euler 方程描述)；边界层或剪切层区域 (可用边界层方程或 DPNS 方程或完全 N-S 方程来描述) 以及各种波系相互干扰、分离和漩涡等区域 (一般要用完全 N-S 方程来描述). 原则上采用完全 N-S 方程就能模拟上述各种流动状态，但在目前的计算机条件下，实际上很难实现. 对高雷诺数流动而言，正如张涵信等 [17] 分析的那样，若要正确反映完全 N-S 方程中所有黏性项的影响，就必须在 3 个空间方向或者选取足够多的网格；或者用很高精度的差分格式来抵消使用粗网格计算带来的误差，否则表面上是求解完全 N-S 方程而实际上等于求解抛物化 N-S 方程或薄层 N-S 方程. 但是，上述两种办法在实践中也很难做到. 因为，若在 3 个空间方向取足够细的网格，其存储量和计算量都难以接受；如用粗网格计算，其格式的精度阶要由给定的粗网格来决定. 换句话说，网格越粗，要求差分格式的精度越高，其结果对边界处理和解法带来一系列新的问题. 因此对于用起来十分方便的二阶和三阶精度的差分格式，如何才能正确反映黏性项的作用，是 CFD 工作者面临的一个难题. 为了解决上述问题，高智提出一种离散流体力学算法 [168,169]. 其基本思想是，考虑到黏性流动的非线性与非均匀性，求解区域的不同离散单元可呈现出完全不同的流动特征，即使同一离散单元的不同界面也会出现不同的流动特征. 譬如同一离散单元的不同坐标方向上的网格雷诺数和网格 Knudsen 数可以相差很大. 因此通常不同单元或同一单元的不同界面采用同一种守恒方程 (如完全 N-S 方程) 并非最佳选择. 高智指出，应对不同离散单元或同一离散单元的不同界面采用不同的守恒方程，确切地说，采用离散单元流动的最简单的守恒方程，它们分别是 Euler 方程、DPNS 方程和完全 N-S 方程，并将这种离散思想取名为离散流体力学算法. 简单的做法可从完全 N-S 方程出发，根据网格雷诺数的大小选用 Euler 方程、 DPNS 方程或完全 N-S 方程 [174~176]. 更简单的做法就是人们熟知的区域分裂法，即将求解区域分为若干子区域，就其流动特征分别采用 Euler 方程、 DPNS 方程和完全 N-S 方程，然后联立求解 [176]. 高智等用网格雷诺数判别法对 Burgers 方程、二维激波 - 边界层干扰流动 [174], 超音速绕前、后台阶流动 [152] 的计算表明，离散流体力学算法的结果与完全 N-S 方程的结果相吻合，且能大大节约 CPU 时间. 我们认为，离散流体力学算法为多尺度问题的研究提供了一种新的思路，值得进一步探索.

8.4 预处理方法的应用前景

预处理方法 (preconditioning methods) 是最近 10 多年为了解决低马赫数流动的有效方法之一 [177]，继而进一步用于处理各种刚性 (stiff) 问题 [178~186]. 当超音速流场中出现局部低亚音速区时，由于超音速区与亚音速区流场的特征速度相差

维普资讯 http://www.cqvip.com

很大，导致离散化后所导出的代数方程组的最大与最小特征值之比很大，因而使迭代方法的收敛速度大为减慢，甚至不收敛. 为了克服这一缺点，预处理法对微分方程的时间相关项乘上一个预处理矩阵，使得新方程组的特征速度较为接近，以便达到加快收敛速度的目的. 对于非定常问题，可以采用双时间的方程组 [187,188]，再使用预处理方法求解. 目前，预处理方法的大多数工作都是为了解 Euler 方程或完全 N-S 方程组的，显然，预处理技巧完全可以用到 DPNS 方程的数值方法中. 可以用来有效处理低马赫数流动问题 [178] 或超音速流场中含有局部亚音速区或跨音速区的问题 [181]；可以将不可压黏性流与可压流用统一的方程及算法求解；可以克服化学反应流动计算中的刚性问题 [184,188]；可以解决非均匀网格计算中网格比很大带来的计算困难 [182]；可以有效处理多相流计算的困难 [185]；可以用来求解气动形状的优化问题 [186] 等等.

据报导，预处理法的使用可以极大地提高求解上述各种复杂问题的收敛速度，并可获得正确的收敛解. 可惜在 DPNS 方程的数值方法研究中还采用不多，我们认为应弥补上这一不足之处.

从以上介绍的几个新的研究方面来看，目前对黏性流方程的特殊算法研究已较为成熟，今后的发展方向应更多注意发展高效率的统一算法，其特点是：

(1) 将一次空间推进与总体松弛法有机地统一起来，并可分别用来求解 Euler 方程，DPNS 方程或完全 N-S 方程；

(2) 研究 Euler 方程，DPNS 方程和完全 N-S 方程的统一算法和软件；

(3) 将可压缩流与不可压缩流统一为一个方程组，用快速、高效的算法统一求解；

(4) 可以处理各种复杂几何形状的流动问题.

(5) 把算法与对流动的物理分析相结合 [189].

9 结束语

20 世纪 60 年代末期美国、前苏联和中国学者几乎同时、独立发展的扩散抛物化 Navier-Stokes 理论、方程和数值方法是继边界层理论之后黏性流研究和应用的又一重大进展，它彻底解决了长期得不到很好解决的高雷诺数黏流及无黏流干扰问题，并为现代各种大型高速飞行器黏性流的数值模拟开辟了新的途径. 目前国外已经研制出若干 DPNS 方程数值解法的大型程序，并已成功地用来模拟高速飞行器全流场. 我们热切希望 DPNS 方程的理论研究和实际应用在我国得到更大的发展，以适应工程应用的需要.

参 考 文 献

1 Cebeci T, Cousteix J. Modeling and Computation of Boundary Layer Flows. New York: Springer, 1999

2 Lees L, Reeves B L. Supersonic separated and reattaching laminar flow. *AIAA J*, 1964, 2(11): 1907～1920

3 Davis R T, Werle M J. Numerical methods for interacting boundary layers. In: Mckillop A A, et al, eds, Proceedings of the 1976 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Stanford, California: Stanford Univ Press, 1976. 317～328

4 Stewartson K, Williams P G. Self-induced separation. *Proc Roy Soc London*, A312, 1969. 181～206

5 Stewartson K. Multistructured boundary layer and flat plate and related bodies. *Adv In Appl Mech*, 1974, 14: 145～239

6 高智. 简化 Navier-Stokes 方程组及无黏和黏性边界层联立求解. 力学学报，1982, 14(6): 606～611

7 Davis R T, Flugge-Lotz I. Second-order boundary-layer effects in hypersonic flow past axisymmetric blunt bodies. *J Fluid Mech*, 1964, 20(4): 593～623

8 Davis R T. Numerical solution of the hypersonic viscous shock-layer equation. *AIAA J*, 1970, 8(5): 843～851

9 Rudman S, Rubin S G. Hypersonic viscous flow over slender bodies with sharp leading edges. *AIAA J*, 1968, 6(10): 1883～1889

10 Golovachov Y P, Popov F D. Supersonic viscous flow past a blunt-body at high Reynolds numbers. *J Computational Math And Mathematical Phys*, (in Russian). 1972, 12(5): 1292～1303

11 Tolstykh A I. On the numerical solution of hypersonic viscous blunt-body flows. *J Computational Math And Mathematical Phys* (In Russian), 1966, 6(1): 160～170

12 Lubard S C, Helliwell W S. Calculation of the flow on a cone at high angle of attack. *AIAA J*, 1974, 12(7): 965～974

13 Vigneron Y C, Rakich J V, Tannehill J C. Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with sharp subsonic leading edges. AIAA Paper 78-1137, 1978

14 Baldwin B S, Lomax H. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA Paper 78-0257, 1978

15 Pratap V S, Spalding D B. Fluid flow and heat transfer in three-dimensional duct flows. *Int J Heat Mass Transfer*, 1976, 19: 1183～1188.

16 Gao Z. Hierarchial structure of the simplified Navier-Stokes equations and its mechanical connotation and application. *Science in China(Series A)*, 1988, 32(2): 168～187

17 张涵信, 呙超, 宗文刚. 网格与高精度差分计算问题. 力学学报, 1999, 31(4): 398～405

18 Gao Z, Shen Y Q. Effects of physical and grid scales in difference computing of the Navier-Stokes equations, Proc. of Inter. Conference on Applied Computational Fluid Dynamics, Beijing, China, October, 2000. 141～148,

19 Wang R Q, Xue J K. A time-dependent space-marching algorithm for three-dimensional PNS equations. In: Leutloff D, Srivastava R C, eds. Computational Fluid Dynamics. Springer, 1995. 151～162

20 Miller J H, Tannehill J C, Lewrence S L. PNS algorithm for solving supersonic flows with upstream influences. AIAA Paper 98-0226, 1998

维普资讯 http://www.cqvip.com

21 Wang R Q, Gao Z. Some aspects of the simplified Navier-Stokes equations and their numerical solutions (Invited report). In: Proceedings of 3rd International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Nagoya-Japan, 1989. 157～162

22 张涵信, 余泽楚, 陆林生, 马占奎. 超声速、高超声速黏性气体分离流动的数值解法. 力学学报, 1981, 13(4): 333～345

23 Degani D, Steger J L. Comparison between the Navier-Stokes and thin-layer computations for separated supersonic flow. *AIAA J*, 1983, 21(11): 1604～1606

24 Rubin S G, Reddy D R. A global PNS solution procedure for laminar interacting and separated flows. In: 2nd Symposium on Numerical and Physical Aerodynamic Flow, California State Univ, Long Beach, CA, 1983

25 Golovachov Y P, Leonteva N Y. Numerical simulation of circulating gas flow using the full and simplified Navier-Stokes equations. *J Comput Math and Math Phys*(in Russian), 1987, 27(11): 1738～1744

26 Choi D H, Kang D J. Calculation of separation bubbles using a PPNS procedure. *AIAA J*, 1991, 29(8): 1266～1272

27 Dambrosio D, Marsilio R. A numerical method for solving the three-dimensional PNS equations. *Computers & Fluids*, 1997, 29(6): 587～611

28 Wang R Q, Shen Y Q. Some weighted-type high-resolution difference schemes and their applications. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 15(4): 313～324

29 Shen Y Q, Wang R Q, Liao H Z. A new numerical study of the shock/boundary layer interaction. *Int J Num Meth Fluids*, 2000, 33(1): 23～34

30 申义庆, 高智, 王汝权. 有二次涡的激波 - 边界层干扰流动的PNS/NS 方程计算. 空气动力学学报, 2000, 18(4): 407～412

31 Anderson D A, Tannehill J C, Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984

32 Davis R T, Barnett M, Rakich J V. The calculation of supersonic viscous flows using the PNS equations. *Computer & Fluids*, 1986, 14(3): 197～224

33 Krawczyk W J, Harris T B, Rajendram N. Progress in the development of PNS technology for external and internal supersonic flows. AIAA Paper 89-1829, 1989

34 Rubin S G, Tannehill J C. Parabolized/Reduced Navier-Stokes computational techniques. *Annu Review Fluid Mech*, 1992, 24: 117～139

35 Mikhailov G K, Parton V Z. Super-and Hypersonic Aerodynamics and Heat Transfer. Boca Raton: CRC Press, 1993

36 Golovachov Y P. Numerical Simulation of Viscous Shock Layer Flows. London: Klumer Academic Publisher, 1995

37 Tannehill T C, Anderson D A, Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Second edition. Taylor & Francis, 1997

38 Blottner F G. Significance of the thin-layer Navier-Stokes approximation. In: Cebeci T, ed. Numerical and Physical Aspects of Aerodynamics Flows III. New York: Springer-Verlag, 1986. 184～196

39 周光炯, 严宗毅, 许世雄等. 流体力学 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2000

40 高智. 强黏性层流理论及其在黏性流计算中的应用. 空气动力学学报, 2001, 19(4): 450～457

41 高智. 简化 N-S 方程的层次结构、它的力学内涵和应用. 中国科学 (A 辑), 1988, 6: 628～640

42 Rubin S G. A review of marching procedures for parabolized Navier-Stokes equations. In: Proc of Symp Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, California State University, Long Beach, January, 1981. 171～186

43 Rubin S G. Incompressible Navier-Stokes and parabolized Navier-Stokes formulations and computational techniques. In: Habashi W B, ed. Computational Methods in Viscous Flows, Vol.3, Swansea, UK: Pineridge Press, 1984. 53～100

44 Kanl U K, Chaussee D S. AWFAL PNS code. AFWAL-TR-83-3118, 1983

45 Lewis C H. VSLN code: a 3d viscous shock layer code for sphere-cones. VRA Inc., VRA-ER-85-01, 1985

46 Tannehill J C, Buelow P E, Ievalts J O, Lawrence S L. Three-dimensional upwind PNS code for real gas flows. *J Spacecraft and Rockets*, 1990, 27(2): 150～159

47 Buelow P E, Tannehill J C, Ievalts J O, Lawrence S L. A three-dimensional upwind PNS code for chemically reacting flows. *J Thermophysics and Heat Transfer*, 1991, 5(3): 274～283

48 Wadadigi G, Tannehill J C, Buelow P E, Lawrence S L. Three-dimensional upwind PNS code for supersonic combustion flow fields. *J Thermophysics and Heat Transfer*, 1993, 7(4): 661～667

49 Miller J H, Tannehill J C, Lawrence S L, Edwards T A. Development of an upwind PNS code for thermochemical nonequilibrium flows. AIAA Paper 95-2009, 1995

50 Cottrell C J, Chapman G T. An evaluation of a PNS code for cone-cylinder-frared configurations. AIAA Paper 84-2116, 1984

51 Deese J E, Agarwal R K, Gielda T P. Computation of supersonic viscous flow about missiles and bodies at high angle of attack using PNS and Navier-Stokes equations. AIAA Paper 89-0527, 1989

52 Lawrence S. Application of space-marching methods to hypersonic fore body flowfields. AIAA Paper 92-5030, 1992

53 Krawczyk W J, Harris T B, Rajendran N, Carlson D R. Progress in the development of PNS technology for external and internal supersonic flows. AIAA Paper 89-1829, 1989

54 Prabhu D K, Tannehill J C. Numerical solution of space shuttle orbiter flowfield including real gas effects. *J Spacecraft and Rockets*, 1986, 23: 264～272

55 Korte J J, McRae D S. Numerical simulation of flow over a hypersonic aircraft using an explicit upwind PNS solver. AIAA Paper 89-1829, 1989

56 Wadawadigi G, Tannehill J C, Lawrence S L, Edwards T A. Three-dimensional computation of the integrated aerodynamic and propulsive flowfields of a generic hypersonic space-plane. AIAA Paper 94-0633, 1994

57 Yamamoto Y. Numerical analysis of hypersonic aerodynamics for atmospheric reentry problems of HOPE and HYFLEX. AIAA Paper 98-0277, 1998

58 Anderson B H. Three-dimensional design methodology for advanced technology aircraft supersonic inlet systems. NASA TM-83558, 1984

59 Dash S M. Recent development in the modeling of high speed jets, planes, and wakes. AIAA Paper 85-1616, 1985

维普资讯 http://www.cqvip.com

60 Kim Y N, Bugglin R C, Mcdonold H. Numerical analysis of some supersonic viscous flows related of inlet and nozzle systems. AIAA Paper 86-1597, 1986

61 Pordal H S, Khosla P K, Rubin S G. Transient behavior of supersonic flow through inlets. AIAA Paper 90-2130, 1990

62 Spalding D B. GENMIX——A General Computer Program for Two-Dimensional Parabolic Phenomena. New York: Pergamon, 1977

63 Gosman A D, Spalding D B. The Prediction of confined three-dimensional boundary layers. In: Stalfold Symposium on Internal Flows. London: Inst Mech Engrs, 1971. 19

64 Patankar S V, Spalding D B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int J Heat Mass Transfer*, 1972, 15(10): 1787～1860

65 Pratap V S, Spalding D B. Numerical computation of the flow in curved ducts. *Aeronaut Quarterly*, 1975, 26: 219～228

66 Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: McGraw-Hill, 1980

67 Spalding S V. Four lectures on PHOENICS computer code. Report CFD/82/S, Imperial College, London, 1982

68 Spalding D B. The Phoenics Reference Manual. CHAM TR/200a(PIL), TR/200b(FORTRAN), 1991

69 Madavan N K, Pletcher R H. Prediction of laminar separated flows using the partially parabolized Navier-Stokes equations. AIAA Paper 83-1954, 1983

70 Liu X Z, Pletcher R H. A coupled marching procedure for the PPNS. *Numerical Heat Transfer*, 1986, 10: 539～556

71 Davis R T, Rubin S G. Non-Navier-Stokes viscous flow computations. *Computer & Fluids*, 1980, 8(1): 101～131

72 王汝权, 高智. 三维简化 Navier-Stokes 方程的最优形式. 空气动力学学报, 1985, 3(4): 67～72

73 高智. 流体力学基本方程的层次结构和简化 NS 方程组的数学性质. 力学学报, 1988, 20(2): 107～116

74 Eca L C, Hoekstra M. Discretization of the parabolized Navier-Stokes equations, In: Ch Hirsch etal eds. Computational Fluid Dynamics 92. BV: Elsevier Science Publishers, 1992. 29～36

75 Golovachov Y P, Kuzmiv A M, Popov F D. Supersonic blunt body flows using the full and simplified Navier-Stokes equations. *J Computational Math and Mathematical Phys*, (in Russian), 1973, 13(4): 21～35

76 Emelyanova Z M, Pavlov B M. Solution of viscous flow over a sphere using the full and simplified Navier-Stokes equations. In: Computational Method and Programming, 1981, 34: 14～22

77 高智. 论简化 Navier-Stokes 方程组. 中国科学 (A 辑), 1987(10): 1058～1070

78 刘学宗, 梁珍璇. 计算非对称突然膨胀槽道流动的加速多重扫描耦合推进方法. 空气动力学学报, 1988, 6(3): 306～315

79 田纪伟, 高智. 简化 N-S 方程在二维层流边界层分离点邻域的特性. 中国科学 (A 辑), 1992, 3: 282～292,

80 Murray A L, Lewis C H. Hypersonic three-dimensional viscous shock-layer flows over blunt bodies. *AIAA J*, 1978, 16(2): 1279～1286

81 Rubin S G, Reddy D R. Analysis of global pressure relaxation for flows with strong interaction and separation. *Computers & Fluids*, 1983, 11: 281～306

82 Rubin S G. Global relaxation procedures for a reduced form of the Navier-Stokes equations. *Lecture Notes in Physics*, 1985, 218: 62～71

83 Kaiser J E, Flugge-Lotz I. Viscous hypersonic flow around a blunt body. AD-669578, 1968

84 Miller G. Mathematical formulation of viscous-inviscid interaction problems in supersonic flow. *AIAA J*, 1973, 11(7): 938～942

85 Lighthill T M. On boundary layers and upstream influence, II. Supersonic flows without separation. *Proc Roy Soc*, London, 1953, A217: 478～507

86 Garvine R. Upstream influence in viscous interaction problems. *Physics & Fluids*, 1968, 11(7): 1413～1423

87 Lin T C, Rubin S G. Viscous flow over a cone at moderate incidence, I hypersonic tip region. *Computers & Fluids*, 1973, 1(1): 37～57

88 于清文, 王汝权, 王昌义等. 简化 Navier-Stokes 方程计算 (综合报告). 见: 全国宇航飞行器计算空气动力学会议, 杭州, 1978

89 王汝权, 刘学宗, 焦履琼等. 简化 Navier-Stokes 方程及其数学性质. 力学学报, 1980, 12(3): 226～231

90 Wang R Q, Jiao L Q, Liu X Z. Numerical methods for the solution of the simplified Navier-Stokes equations. In: Lecture Notes in Physics, Vol.141. New York: Springer, 1981. 423～428

91 Thompson D S, Noack R W. Theoretical and numerical study of departure behavior in PNS solutions. AIAA Paper 87-1122, 1987

92 Voronkin V. Blunted cone viscous shock-layer calculations. *Mechanics of Liquid and Gas* (in Russian), 1974, 6: 99～105

93 Kovenya V M, Cheruyi S G, Yanenko N N. Simplified equations for viscous gas flows. *Report of Academy of Sciences of SSSR,* 1979, 245(6): 1322～1324

94 Helliwell W S, Lubard S C. An implicit method for three-dimensional viscous flow with application to cones at angle of attack. *Computers & Fluids*, 1975, 3(1): 83～101

95 王汝权, 焦履琼. 简化 Navier-Stokes 方程空间推进解法的数值分析. 数值计算与计算机应用, 1980, 1: 53～61

96 Rubin S G, Lin T C. A numerical method of solving three-dimensional viscous flow with application to the hypersonic leading edge. *J Comput Phys*, 1972, 9(2): 339～364

97 王汝权, 周保民. 解对流扩散方程的一个隐式迭代格式. 数值计算与计算机应用, 1985, 4: 241～248

98 张涵信, 姚慧, 高树椿, 沈清. 钝锥超声速黏性绕流的隐式推进求解方法研究. 空气动力学学报, 1990, 8(3): 235～246

99 沈清, 高树椿, 张涵信. 钝锥大攻角超声速分离流的数值模拟. 空气动力学学报, 1991, 9(1): 21～28

100 Gao Z, Zhu G. A discussion on existence and uniqueness of solution of the diffusion parabolized equations. In: Proceedings of 7th International Conference on Boundary and Interior Layers, Computational and Asymptotic Methods, Int Academic Publishers, 1995

101 Waskiewicz J D, Murray A L, Lewis C H. Hypersonic viscous shock-layer flow over a highly cooled sphere. *AIAA J*, 1978, 16(2): 189～192

102 MacCormack R W. The effect of viscosity in hypervelocity impacterating. AIAA Paper 69-354, 1969

103 Beam B, Warming R F. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA J*, 1978, 16: 393～401

维普资讯 http://www.cqvip.com

104 Lombard C K, Bardina J, Venkatapathy E, Oliger P. Multi-dimensional formulation of CSCM—an upwind flux difference eigenvector split method for compressible Navier-Stokes equations. AIAA Paper 88-1895, 1988

105 Harten A. A high resolution scheme for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws. *J Comput Phys*, 1983, 49: 357~393

106 Lawrence S L, Chanssee D S, Tannehill J C. Application of an upwind algorithm to the three-dimensional PNS equations. AIAA Paper 87-1112, 1987

107 Gielda T P, McRae D S. An accurate stable explicit PNS solver for high speed flows. AIAA Paper 86-1116, 1986

108 Liu T G, Wang R Q, Song S H. An implicit-explicit upwind algorithm for the PNS equations. *ACTA Mechanica Sinica*, 1994, 10(2): 129~135

109 Korte J J, McRae D S. Explicit upwind algorithm for the PNS equations. AIAA Paper 88-716, 1988

110 Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J Comput Phys*, 1994, 115: 200~212

111 Miner E W, Lewis C H. Hypersonic ionizing viscous shock layer over sphere-cones. *AIAA J*, 1975, 13(1): 80~88

112 Srivastava B N, Werle M J, Davis R T. Viscous shock-layer solution for hypersonic sphere-cones. *AIAA J*, 1978, 16(2): 137~144

113 Srivastava B N, Werle M J, Davis R T. Numerical solution of hypersonic viscous shock-layer equations. *AIAA J*, 1979, 17(1): 107~110

114 Szema K Y, Lewis C H. Three-dimensional hypersonic laminar transitional and/or turbulent shock-layer flows. AIAA Paper 80-1457, 1980

115 Swaminathan S, Kim M D, Lewis C H. Three-dimensional nonequilibrium viscous shock-layer flow over complex geometries. *AIAA J*, 1984, 22(6): 754~755

116 Thompson R A. Three-dimensional viscous shock-layer applications for the space shuttle orbiter. AIAA Paper 85-0246, 1985

117 刘学宗, 王昌义, 焦履琼, 王汝权. 用直线法计算钝头黏性绕流. 计算数学与计算机应用, 1980, 3: 153~162

118 焦履琼. 超音速钝锥黏性绕流的计算方法. 见: 全国宇航飞行器计算空气动力学会议报告, 杭州, 1978

119 Khosla P K, Lai H T. Global PNS solution for transonic strong interaction flows. AIAA Paper 84-458, 1984

120 Rakich J V. Iterative PNS method for attached flows with upstream influence. AIAA Paper 83-1955, 1983

121 Barnett M, Davis R T. Calculation of supersonic flows with strong viscous-inviscid interaction. *AIAA J*, 1986, 24(2): 1949~1955

122 Khosla P K, Rubin S G. Consistent strongly implicit iterative procedures for two-dimensional unsteady and three-dimensional space-marching flow calculations. *Computers & Fluids*, 1987, 15: 361~377

123 Hoekstra M. Recent developments in a ship stern flow prediction code. In: 5th International Conference of Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima, Japan, 1989

124 Himansu A, Rubin S G. Multigrid acceleration of relaxation procedure for the Reduced Navier-Stokes equations. *AIAA J*, 1988, 26: 1044~1051

125 Himansu A, Rubin S G. Three-dimensional RNS computations with multigrid acceleration. AIAA Paper 91-105, 1991

126 Srinivasan K, Rubin S G. Adaptive multigrid domain decomposition solutions for Reduced N-S equations. In: 5th Conference of Domain Decomposition Methods PDEs, Norfolk, VA, 1991

127 Zhuang F G, Zhang H X. On a marching iteration method in solving gas dynamic equations. *Lecture Notes in Physics*, 1986, 264: 70~85

128 Rubin S G. RNS/Euler pressure relaxation and flux vector splitting. *Computers & Fluids*, 1988, 16: 485~490

129 Stookesherry D C, Tannehill J C. Computation of separated flow using the space-marching conservative supra-characteristics method. *AIAA J*, 1987, 25: 1063~1070

130 Xue J K, Wang R Q. An efficient algorithm for hypersonic viscous flows. *ACTA Mechanica Sinica*, 1991, 7(3): 227~234

131 Power G D. A novel approach for analyzing supersonic high Reynolds number flows with separation. AIAA Paper 90-764, 1990

132 Kaushik S, Rubin S G. Primitive variable pressure based flux-split RNS formulations for incompressible and compressible. AIAA Paper 95-2165, 1995

133 Newsome R W, Walters R W, Thomas J L. An efficient iteration strategy for upwind/relaxation solutions to the thin-layer Navier-Stokes equations. AIAA Paper 87-1113, 1987

134 Chang C L, Merkle C L. The relation between flux vector splitting and parabolized schemes. *J Comput Phys*, 1989, 80: 344~361

135 Lin T C, Rubin S G. A numerical model for supersonic viscous flow over slender reentry vehicle. AIAA Paper 79-205, 1979

136 Golovachov Y P, Fursenko A A. Viscous flows by the marching method (in Russian). *J Comput Math and Math Phys*, 1981,21(6): 1592~1596

137 Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations with applications to finite difference methods. NASA TM-78605, 1978

138 van Leer B. Flux-vector splitting for the Euler equations. *Lecture Notes in Physics*, 1982, 170: 507~512

139 薛具奎, 王汝权. 高超音速黏性流的快速解法. 力学学报, 1991, 23(6): 641~649

140 Kato H, Tannehill J C. Computation of hypersonic laminar separated flows using an iterative PNS algorithm. AIAA Paper 2001-1028, 2001

141 Kato H, Tannehill J C. Computation of KHD flows using an iterative PNS algorithm. AIAA Paper 2002-0202, 2002

142 Kato H, Tannehill J C. Development of a forward-backward sweeping PNS algorithm. AIAA Paper 2002-0735, 2002

143 Kato H, Tannehill J C, Mehta UB, et al. Simulation of turbulent MHD flow using an iterative PNS algorithm. AIAA Paper 2003-0326, 2003

144 Thompson D S, Matus R J. Conservation errors and convergence characteristics of iterative space-marching algorithms. *AIAA J*, 1991, 29(2): 227~233

145 Kumar A, Graves R A. Viscous hypersonic flow past blunted cones at small angles of attack. *AIAA J*, 1977, 15(8): 1061~1062

146 Hung C M, Kordulla W. A time-split finite volume algorithm for three-dimensional flow field simulation. *AIAA J*, 1984, 21(11): 1561~1572

维普资讯 http://www.cqvip.com

147 Harris T B. An efficient method for supersonic viscous flow field calculations. AIAA Paper 83-0222, 1983

148 Miller C G, Gnoffo P A. Measured and predict heating distributions for biconics at Mach 10. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1986, 23(3): 251～258

149 Yamamoto Y, Azakawa H, Yoshida R. Numerical simulation of hypersonic viscous perfect gas flow for the aerothermodynamic design of space planes at low angles of attack. AIAA Paper 89-1699, 1989

150 Gao Z. Effects of physical and grid scales in difference computing of the Navier-Stokes equations. In: Proceedings of Third Asia Workshop on Computational Fluid Dynamics, Mianyang, China, Sept 2000. 169～175

151 高智, 申义庆. Navier-Stokes 方程组差分计算中的物理和网格尺度效应及 N-S 方程组的简化. 空气动力学学报, 2001, 19(1): 1～7

152 申义庆. 广义扩散抛物化 N-S 方程组和大小尺度方程组的数值研究: [博士论文]. 北京: 中国科学院力学所, 2001

153 Nakahashi K, Saitoh E. Space-marching method on unstructured grid for supersonic flows with embedded subsonic regions. *AIAA J*, 1997, 35(1): 1280～1293

154 Morino H, Nakahashi K. Space-marching method in unstructured hybrid grid for supersonic viscous flows. AIAA Paper 99-0661, 1999

155 Parent B, Sislian J P. The use of domain decomposition in accelerating the convergence of quasihyperbolic systems. *J Comput Phys*, 2002, 179(1): 140～169

156 Miller J H, Tannehill J C, Lawrence S L. Parabolized Navier-Stokes algorithm for solving supersonic flows with upstream influences. *AIAA J*, 2000, 38(10): 1837～1845

157 Yamaleev N K, Ballman J. Iterative space-marching method for compressible sub-, trans-, and supersonic flows. *AIAA J*, 2000, 38(2): 225～233

158 Skurin L I. Iterative-space-marching method for incompressible and compressible full Navier-Stokes equations, In: Satofuka N ed. Computational Fluid Dynamics 2000, Springer, 2000. 319～324

159 Skurin L I. About effectiveness of iterative-marching method for solving of the fluid and gas mechanics problems. Vestnik St Petersburg Univ Mech M, 2000. 104～109

160 Esfahanian V, Hejranfar K. Accuracy of parabolized Navier-Stokes schemes for stability analysis of hypersonic axisymmetric flows. *AIAA J*, 2002, 40(7): 1311～1322

161 Esfahanian V, Hejranfar K. The use of global procedure of the PNS equations for solving supersonic flows with upstream influences. In: First International Conference of the Iranian Aerospace Society, 2000, 1: 279～290

162 Esfahanian V, Hejranfar K. Computation and transition prediction of hypersonic axisymmetric flow using IPNS model. In: European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, 2000. 1～17

163 Scholtysik M, Muller B, Fannelap T K. Numerical solution of the Reduced Navier-Stokes equations for internal incompressible flows. *AIAA J*, 2000, 38(9): 1603～1614

164 Grondin G, Thiret F. Computation of laminar supersonic flows with a conservative multidomain technique for steady PNS equation, In: Papailian K D, et al, eds, Computational Fluid Dynamics 98, Vol. I, part 2, 1998. 863～868

165 Mosclotla J M, Thiret F, Denian H. PNS computation of the supersonic vortical flow about an Ogive-cylinder at incidence. In: First Europe-US High-Speed Flow Field Daslabase Workshop, Naples-Italy, Nov. 1997

166 Saxena S K, Ravi K. Hypersonic viscous flow computing on a parallel machine. In: Wagner, et al, eds. Computational Fluid Dynamics 94, Wiley, 1994

167 Khosla P K, Rubin S G. A review of strongly coupled algorithms for viscous flow problems. *Computers & Fluids*, 2001, 30: 927～937

168 高智. 流场计算中数值近似与力学近似相结合的几个问题. 中国学术期刊文摘, 1997, 3(5): 615～617

169 Gao Zhi. Computational methods for discrete fluid dynamics. AIAA Paper 99-3581, 1999

170 MacCormack R W, Candler G V. The solution of the Navier-Stokes equations using Gauss-Seidel line relaxation. *Computer & Fluids*, 1989, 17(1): 135～150

171 MacCormack R W. A fast and accurate method for solving the Navier-Stokes equations. In: 21st ICAS Congress, Melbourne, Australia, Sept, 1998. 13～18

172 MacCormack R W. Iterative modified approximate factorization. *Computer & Fluids*, 2001, 30: 917～925

173 Tenpas P W, Pletcher R H. Coupled space-marching method for the Navier-Stokes equations for subsonic flows. *AIAA J*, 1991, 29(2): 219～226

174 高智, 申义庆. 黏性流动有限差分计算的新策略. 中国科学 (A 辑), 1999, 29(5): 433～443

175 申义庆, 高智. 耦合离散流体理论的差分格式及其应用. 计算力学学报, 2000, 17(4): 385～389

176 庄逢甘, 张德良. 扩散抛物化 (DP)NS 方程组的意义及其在计算流体力学中的应用. 空气动力学学报, 2003, 21(1): 1～10

177 Turkel E. Preconditioning techniques in computational fluid dynamics. *Annu Rev Fluid Mech*, 1999, 31: 385～416

178 Briley W R, Taylor L K, Whifield D L. Higher-resolution viscous flow simulations at arbitrary Mach number. *J Comput Phys*, 2003, 184(1): 79～105

179 Venkatakrishnan V. Improved multigrid performance of compressible Navier-Stokes solvers. AIAA Paper 98-2967, 1998

180 Edwards J R, Thomas J L. Development and investigation of O(Nm^2) preconditioned multigrid solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. AIAA Paper 99-3263, 1999

181 Jesperson D, Pullian T, Buniny P. Recent enhancements to OVERFLOW. AIAA Paper 97-0644, 1997

182 Buelow P E O, Venkateswarven S, Merkle C L. Grid aspect ratio effects on the convergence of upwind schemes. AIAA Paper 95-0565, 1995

183 Godfrey A G, Walters R W, van Leer B. Preconditioning for the Navier-Stokes equations with finite-rate chemistry. AIAA Paper 93-0535, 1993

184 Merkle C L, Schwer D A, Tsuef H H. Computation and validation of reacting mixing layers in propulsion applications. AIAA Paper 95-0261, 1995

185 Venkateswaran S, Lindan J W, Kunz R F, Merkle C L. Computation of multiphase mixture flows with compressible effects. *J Comput Phys*, 2002, 180(1): 54～77

186 Arian E, Vatsa V N. A preconditioning method for shape optimization governed by the Euler equations. *Inter J of Comput Fluid Dynamics*, 1999, 12: 17～27

维普资讯 http://www.cqvip.com

187 Venkateswaran S, Merkle CL. Dual time-stepping and preconditioning for unsteady computations. AIAA Paper 95-0078, 1995

188 Derango S, Zingg D W. Improvements to a dual time-stepping method for computing unsteady flows. *AIAA J*, 1997, 35(9): 1548~1550

189 高智. 高雷诺数流动的控制方程体系和扩散抛物化 Navier-Stokes 方程组的意义和用处. 力学进展, 2005, 35(3): 427~438

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE DIFFUSION PARABOLIZED NAVIER-STOKES EQUATIONS*

WANG Ruquan[1] SHEN Yiqing[2,†]

[1]Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

[2]LHD, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

Abstract In the late 1960's the different-type simplified Navier-Stokes models, or as are generally called, the diffusion parabolized N-S (DPNS) equations, and their computational methods developed from the Prandtl's boundary-layer theory have correctly included the viscous-inviscid flow interacting mechanism and opened a new approach for simulating large-scale complex flowfields. This paper reviews the related main results of this field, including advantages and drawbacks of different simplified Navier-Stokes models; mathematical characteristics and their marching regularization procedures of the DPNS equations; various representative numerical solutions and the applicability of the DPNS equations and finally the new generalized DPNS equations.

Keywords Navier-Stokes equation, boundary-layer equation, simplified N-S equation, parabolized N-S equation, thin-layer N-S equation, diffusion parabolized N-S equation, finite difference method

---

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10402043) and Hi-Tech Research and Development Program of China (2004AA639840)

† E-mail: yqshen@imech.ac.cn