

文章编号:1006-7051(2003)03-0001-06

# 爆炸排淤填石法中淤泥的本构模型

乔继延, 丁桦, 郑哲敏

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要:**以爆炸排淤填石法为背景,对不同应变率阶段淤泥的本构模型进行了分析,利用 ANSYS/LS-DYNA 动态有限元分析程序对所选择的模型进行验证和确认。计算和分析结果表明:在形成爆炸空腔的高应变率阶段,淤泥表现为理想不可压缩流体的性质,在小药量小抵抗线条件下,甚至在淤泥自重作用下的较低应变率变形阶段,其黏性效应也可以忽略不计。

**关键词:**爆炸排淤填石法;淤泥;理想弹塑性模型;宾汉体模型

中图分类号:TV542+.5 文献标识码:

## SEAOOZE CONSTITUTIVE MODEL FOR TOE-SHOOTING METHOD

QIAO Ji-yan, DING Hua, ZHENG Zhe-min

(Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**ABSTRACT:** In this paper, seaooze constitutive models at different strain rate stages are studied based on the toe-shooting method and the selected models are verified numerically via ANSYS/LS-DYNA dynamic FEM program. The numerical results show that seaooze behaves as an ideal non-compressible fluid under explosive loading in high strain rate stage at which the blasting crater is forming while the viscosity of seaooze is negligible for small scale in low strain rate stage at which rock-fill and seaooze flow to the blasting crater under gravity.

**KEY WORDS:** Toe-shooting method; Seaooze; Ideal elastoplastic model; Bingham model

### 1 引言

在我国,淤泥质海岸有着广泛的分布。因此,海岸工程中的软弱地基处理,长期以来就是筑港技术界普遍关注的问题。我国从20世纪80年代中期开始发展了爆炸排淤填石法这项新的软基处理技术,并应用该技术至今已完成数十项筑堤工程,收到了很好的经济效益和社会效益,显示出较其他软基处理方法的巨大优越性。

爆炸排淤填石法从机理方面可以分为两个阶段:①起爆后,爆轰产物推动爆源周围的介质(水和淤泥)向四周运动,在淤泥中形成爆炸空腔,同时堆石体被向上抬起;②爆炸产物压力卸载后,堆石体连

同底部的淤泥在重力作用下向爆坑方向滑落,形成“石舌”,从而达到泥石置换的目的;同时爆坑另一侧的淤泥也在重力作用下回流,在某一时刻与前进的“石舌”相遇。因此,我们关心的两个重要问题:一是对于一一定的药量、一定抵抗线,淤泥中形成的爆炸空腔有多大;二是怎样刻划堆石体和淤泥在重力作用下的变形和流动过程。

在爆炸排淤填石法中,“石舌”的形成是核心问题,因为“石舌”是决定泥石置换进尺量的关键。到目前为止,针对“石舌”的形成机理已经进行的诸多研究工作<sup>[1~3]</sup>,主要是以理论分析、判断和实验为主,但对“石舌”形成机理的阐述都还不够透彻。我们认为,有必要另辟蹊径,以大型计算机软件为工具,通过数值计算的办法,详细分析“石舌”形成的中间过程,找出决定“石舌”特征量的主要施工参数(堆石高度、药量、布药距离和埋药深度等)以及它们之间

收稿日期:2003-06-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10072070)

作者简介:乔继延,中国科学院力学研究所工程科学部(DES)博士研究生。

的关系。

在这个背景下,本文针对淤泥的计算模型做了一些前期工作。文中介绍了淤泥本构模型的选取和模型参数的取值范围,依据许连坡等<sup>[4]</sup>提供的高速摄影实验数据,通过数值计算表明:在形成爆炸空腔的高应变率阶段,淤泥表现为理想不可压缩流体的性质,在小药量小抵抗线条件下,甚至在淤泥自重作用下的较低应变率变形阶段,其黏性效应也可以忽略不计。

## 2 淤泥本构模型的选择

淤泥质软黏土的本构关系种类繁多,数以百计,不过都可以归结为弹性、塑性和黏性三种性质。因此,我们遇到的问题是,选择什么样的屈服准则来描述淤泥的弹塑性性质以及如何考虑淤泥的率相关效应,即黏性。同时,我们还应遵循这样一个原则:在满足一定要求的条件下,从实用的角度,尽可能选择比较简单的模型。

### 2.1 淤泥的弹塑性变形

岩土介质广泛采用 Mohr-Coulomb 屈服准则是基于这样一种想法:材料的抗剪强度随正应力(实际上是有效正应力)的增长而提高,可表示为

$$|\tau| = C + \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

式中: $\tau$ 和 $\sigma$ 分别为最大剪应力和切面上的正应力(有效正应力,对于岩土材料,压应力定义为正值,拉应力为负值), $C$ 和 $\varphi$ 分别为介质的内聚力和内摩擦角。

对淤泥类软黏土而言,其渗透系数低于 $10^{-9}$  m/s,在排淤填石的过程中淤泥的运动时间很短,来不及排水就结束了变形过程。由于渗透系数低,排水时间短,总应力的变化基本上由孔隙水来承担,淤泥中固体颗粒间的有效应力变化很小,因此也就不会影响到它的抗剪强度。根据这样一种认识,可以仍然采用广泛用于金属材料的 Von-Mises 屈服准则来描述淤泥的塑性变形。土力学中的 Prandtl-Reuss 理想弹塑性模型符合这个特点,并且它的模型参数少而简单,可以通过常规的土力学室内实验来获得<sup>[5]</sup>。

Prandtl-Reuss 模型的屈服函数可以表达为:

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - k = 0$$

式中: $J_2$ 为应力偏量第二不变量, $k = 6C \cos \varphi / \sqrt{3} (3 - \sin \varphi)$ , $C$ 和 $\varphi$ 分别为介质的内聚力和内摩擦角。对于渗透系数低,排水时间短的岩土材料,其强度指标应取为不固结不排水强度。此时淤泥的内摩擦角

$\varphi_{\text{un}}$ 等于零,在我们查阅到的所有文献中,多数原状淤泥的内聚力 $C_{\text{un}}$ 都在 $2 \sim 22$  kPa之间。当然,对于多次扰动后的淤泥,其强度大大降低,据我们的测量,扰动淤泥的内聚力 $C_{\text{un}}$ 比原状淤泥低约 $30 \sim 100$ 倍。

### 2.2 淤泥的黏塑性变形

综合多方面文献的结论,淤泥质软黏土具有三种不同的流变特性。在很低剪切率情况下,淤泥剪切力基本保持常值,在低剪切率范围,表现为宾汉流体性质,在高剪切率时,其应力—应变率关系从宾汉流体过渡到幂律流体。因此,当涉及淤泥的黏塑性变形时,就必须依据不同的应变率状态分别来讨论。

在淤泥内形成爆炸空腔(排淤)的阶段,淤泥处于高应变率和大变形状态,此时淤泥的黏性力与应变率大致成幂律关系<sup>[6-8]</sup>,表现出幂律流体的特点。不过现有文献所提供的实验数据离散程度非常大,难以成为参数估计的依据,同时这些实验结果都是在淤泥的应变率低于 $10^3 \text{ s}^{-1}$ 条件下得到的,与我们所关心的应变率( $10^3 \sim 10^4 \text{ s}^{-1}$ ,甚至更高)还有一定差距。从解决问题的角度,借鉴文献<sup>[9]</sup>,可以采取这样的办法:暂不考虑黏性力,假定淤泥为 Prandtl-Reuss 理想弹塑性模型,通过计算结果与实验结果的对比来考察该模型是否可行。后面的数值计算结果(图1)表明,采用 Prandtl-Reuss 理想弹塑性模型是可行的,而且,除淤泥的密度以外,其他参量(强度、模量)的变化对计算结果影响都很小(图7、图9)。实际上,此时淤泥表现为理想不可压缩流体的性质。

在堆石和淤泥向爆坑方向滑落的阶段,淤泥处于重力作用下的较低应变率(一般低于 $50 \text{ s}^{-1}$ )的大变形状态。此时淤泥呈现出 Bingham 体特点<sup>[7,10]</sup>,它的一维本构关系可表达为:

$$\dot{\gamma} = 0, \tau \leq \tau_B$$

$$\tau = \tau_B + \eta_B \cdot \dot{\gamma}, \tau > \tau_B$$

式中: $\tau_B$ 和 $\eta_B$ 分别为宾汉屈服应力和黏性系数, $\tau$ 和 $\dot{\gamma}$ 分别为剪应力和剪应变率。

对于扰动淤泥,呼和敖德等<sup>[7]</sup>给出了连云港西墅淤泥的宾汉体屈服应力和黏性系数:

$$\tau_B = 0.4997e^{16.46C_v}, \eta_B = 0.0167e^{20.48C_v}$$

式中: $C_v$ 为淤泥的体积含量( $C_v = \text{土颗粒体积} / \text{总体积}$ ), $\tau_B$ 和 $\eta_B$ 均为千克米秒制,适用范围为 $C_v = 0.057 \sim 0.410$ ,对应的含水量大致在 $50\% \sim 600\%$ 之间。

当含水量  $\omega$  介于 60% ~ 80% 之间时(爆炸排淤填石法多数遇到的地质条件),淤泥的体积含量  $C_v$  介于 0.32 ~ 0.38 之间,黏性系数在 10 ~ 40 Pa·s 之间变化,屈服应力在 90 ~ 300Pa 之间变化。在某些情况下,黏性力可以与强度、惯性力处于同一量级,因此单靠定性分析不能确定黏性的影响到底有多大。我们做了一个数值模拟试验,考察一个 10m × 10m × 10m 的淤泥堆积体在自重作用下的变形过程,分别采用 Bingham 体模型和不考虑黏性的 Prandtl-Reuss 理想弹塑性模型,根据计算结果对比淤泥堆积体脚点的位移—时间关系,发现两者的计算结果十分接近(图 10)。因此可以得出结论,在尺度足够小的前提下,淤泥在重力作用下的变形过程中,黏性力是可以忽略不计的。

### 3 炸药的状态方程

采用 JWL 状态方程描述炸药爆轰产物的压力—体积关系:

$$p = Ae^{-R_1 V} + Be^{-R_2 V} + \omega E_0 / V$$

式中: $p$  为爆轰产物的压力; $A$ 、 $B$ 、 $\omega$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  为实验拟合的常数; $E_0$  为炸药的初始内能密度; $V$  为爆轰产物的相对体积( $V$  = 爆轰产物体积/炸药初始体积)。对于装药密度为 1.2g/cm<sup>3</sup> 的 TNT 炸药,各参数分别取值如下<sup>[11,12]</sup>: $A = 741\text{GPa}$ , $B = 18\text{GPa}$ , $\omega = 0.35$ , $R_1 = 5.56$ , $R_2 = 1.65$ , $E_0 = 3.6 \times 10^9\text{J/m}^3$ 。此外,炸药的爆速  $D = 5500\text{m/s}$ ,爆压  $p_{\text{CJ}} = 1.0 \times 10^{10}\text{Pa}$

### 4 数值计算结果及分析

#### 4.1 计算结果与实验结果的对比

计算采用 Prandtl-Reuss 理想弹塑性模型,各模型参数取值如下:初始密度  $\rho_0 = 1600\text{kg/m}^3$ ,弹性模量  $E = 5.0 \times 10^6\text{Pa}$ ,屈服强度  $k = 400\text{Pa}$ ,体变模量  $B = 3.6 \times 10^9\text{Pa}$ ,塑性硬化模量  $ETAN = 0.0$ 。

计算区域取为 1.5m × 1.5m × 1.2m,自由表面加大气压力载荷,其他各面均为法向约束,全部区域的介质都受重力作用。为防止大变形计算中出现的单元畸变现象,单元采用等大小的 8 节点 6 面正立方体单元,共划分单元 36000 个。这种划分实际上已经把炸药单元等效为一个尺寸放大的单元,等效的原则是炸药单元的总能量保持不变,只降低它的能量密度。当然这样做会捕捉不到爆炸前期产生的冲击波,但是对于冲击波过后淤泥爆坑的形成过程来说影响并不大,两者的对比证实了这一点。

文献[4]的实验在铁箱中进行。实验中所用淤泥为取自连云港的扰动淤泥,密度  $\rho = 1600\text{kg/m}^3$ 。取海底淤泥放在爆炸箱中,爆炸箱高 1.6m,长和宽各 1.5m。其上装有照明窗口和摄影窗口,窗口镶嵌 4cm 厚的无色透明有机玻璃。箱中泥面高度基本和窗口底边平齐,以利高速摄影。爆破的最小抵抗线  $W$  为 10 ~ 25cm,即  $W$  不超过爆炸箱边长的 1/3,以消除边界影响。集中药包装药量  $Q$  为 10g(TNT),装药密度为 1.2g/cm<sup>3</sup>,用工业电雷管起爆,雷管的 1/2 ~ 1/3 插入药包,其当量按 1.5g TNT 计算,故总装药量为 11.5g TNT。实验中用 ZL-1 型高速摄影机拍摄鼓包运动过程,爆后直接测量断面来确定爆坑的形状和尺寸。

将淤泥鼓包破裂前顶点位移的计算结果与实验结果进行对比,如图 1 所示。

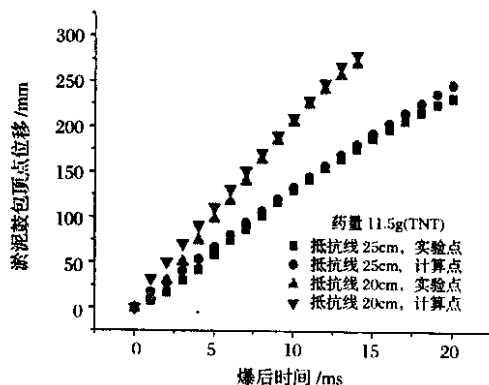


图 1 淤泥鼓包破裂前顶点的位移—时间关系

Fig. 1 Relation of pinnacle displacement to time before the heave breaks

计算结果与实验结果能够较好地符合。在淤泥鼓包上升过程中,鼓包顶点最初做加速运动,中间经历一段近似匀速运动后,进入减速阶段直至鼓包破坏(鼓包顶点上升速度如图 2 所示)。数值计算比实验结果偏大,原因来自以下三个方面:①炸药爆轰产生的冲击波会带走一部分能量;②爆轰气体在推动介质运动的过程中有少部分能量以热能形式损失;③淤泥并非严格的连续介质,在空腔形成的后期会出现少量爆轰产物泄漏现象。

需要说明的是,单纯从数值计算的角度完全可以使计算一直进行下去,直到爆炸空腔与鼓包顶点之间的剩余厚度(本文定义为剩余厚度,下同)趋于无穷小值。在实际中,空腔发展到一定阶段时淤泥将发生破坏,因此我们只计算到实测的淤泥发生破坏的时刻。

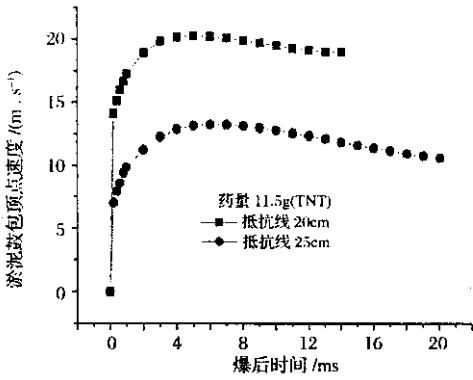


图 2 淤泥鼓包顶点的速度—时间关系(数值计算结果)

Fig.2 Relation of pinnacle velocity to time (numerical results)

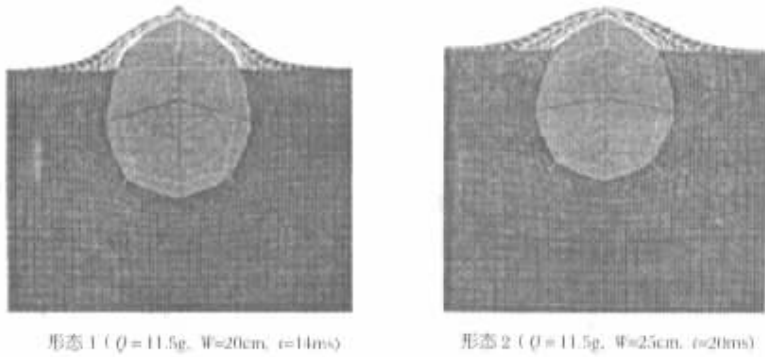


图 3 淤泥爆炸空腔的形态

Fig.3 Shape of blasting crater

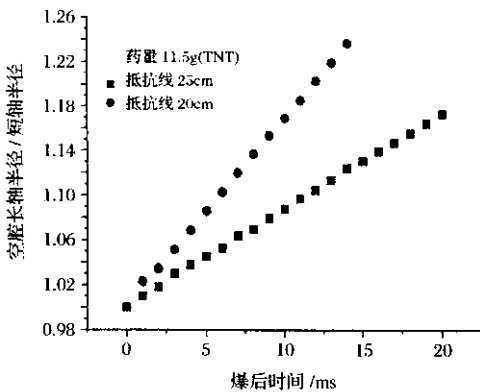


图 4 爆炸空腔长轴半径/短轴半径随时间的关系

Fig.4 Relation of major- and minor-axis radii to time for the blasting crater

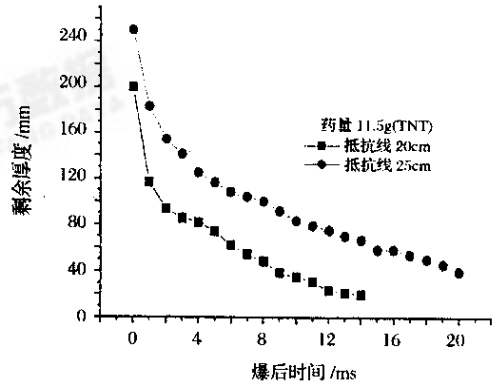


图 5 剩余厚度随时间的关系

Fig.5 Relation of residual thickness to time for the blasting crater

### 4.3 淤泥模型参数的影响

#### 4.3.1 屈服强度的影响

图 6 所示的计算结果除屈服强度以外,其他各模型参数取值如下:初始密度  $\rho_0 = 1600\text{kg/m}^3$ ,弹性模量  $E = 5.0 \times 10^6\text{Pa}$ ,体变模量  $B = 3.6 \times 10^9\text{Pa}$ ,

### 4.2 淤泥爆炸空腔的形态和剩余厚度随时间的变化关系

从图 3 可以看到,由于有自由面的影响,爆炸空腔在空间上并不对称,空腔不是球形而是近似椭圆形的(或卵形)。根据图 4,在相同药量下,抵抗线越小,爆炸空腔向椭球形发展越明显,并且发展速度也比较快。也就是说,相同药量下,抵抗线越小,自由表面的影响就越显著。

如图 5 所示,爆炸空腔与鼓包顶点之间的剩余厚度前期随时间衰减很快,2~3ms 后衰减趋于缓慢,之后随时间近似按照线性规律衰减。比较两者的斜率可以发现,在相同药量下,抵抗线越小,剩余厚度的衰减速率越大,实际上也说明自由表面的影响越显著。

塑性硬化模量  $ETNA = 0.0$ 。

计算结果表明,当淤泥强度在 2~20kPa 之间变化时,鼓包顶点位移的变化很小(误差低于 5%),即使强度达到 100kPa(已大大高于实际值),误差不超过 20%。实际上,在这一阶段淤泥的抛速至少

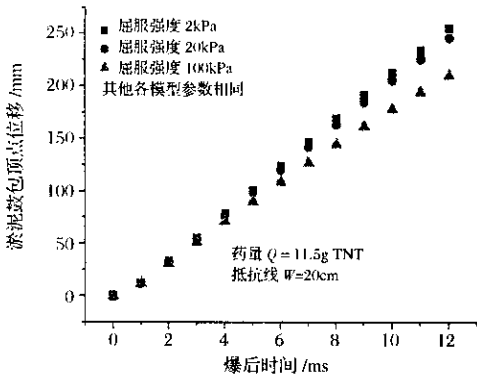


图6 屈服强度对鼓包顶点位移的影响

Fig.6 Influence of yield strength on displacement of heave pinnacle

可达 15m/s, 惯性力  $\rho u^2$  至少可以达到 300kPa, 因此淤泥的强度(在 2 ~ 20kPa 之间时)至少低于惯性力一个量级, 这说明与爆炸强载荷相比, 淤泥的强度失去意义, 可以忽略不计, 介质表现出类似于流体的性质。

#### 4.3.2 初始密度的影响

图 7 的计算结果除初始密度以外, 其他各模型参数取值如下: 弹性模量  $E = 5.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ , 屈服强度  $k = 2000 \text{ Pa}$ , 体变模量  $B = 3.6 \times 10^9 \text{ Pa}$ , 塑性硬化模量  $ETAN = 0.0$ 。

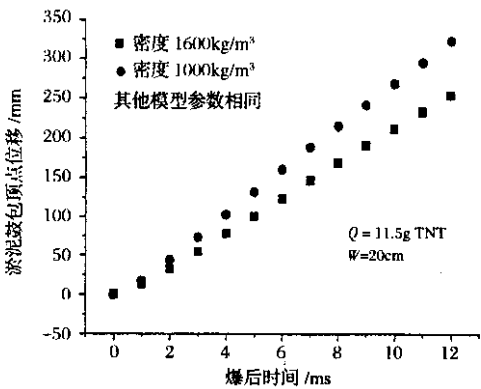


图7 初始密度对鼓包顶点位移的影响

Fig.7 Influence of initial density on displacement of pinnacle

当淤泥的初始密度从  $1000 \text{ kg/m}^3$  变化到  $1600 \text{ kg/m}^3$  时, 计算结果的误差达到 30%, 说明计算结果对初始密度的变化是很敏感的, 也说明了在淤泥爆炸空腔形成和鼓包运动阶段, 介质的运动机制是惯性运动, 密度是起主要作用的物理量。

#### 4.3.3 体变模量的影响

图 8 的计算结果除体变模量以外, 其他各模型参数取值如下: 初始密度  $\rho_0 = 1600 \text{ kg/m}^3$ , 弹性模量

$E = 5.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ , 屈服强度  $k = 2000 \text{ Pa}$ , 塑性硬化模量  $ETAN = 0.0$ 。

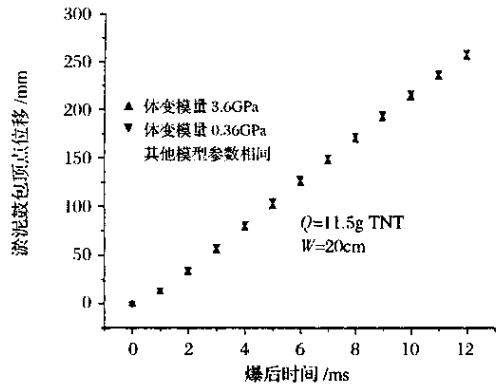


图8 体变模量对淤泥鼓包顶点位移的影响

Fig.8 Influence of volume modulus on displacement of heave pinnacle

可以看到, 当体变模量减小 10 倍时, 对计算结果的影响很小, 这说明尽管爆炸载荷很高, 但淤泥仍表现出不可压缩介质的性质。实际上, 当体变模量  $B = 3.6 \times 10^9 \text{ Pa}$  时, 介质的波速  $c = 1500 \text{ m/s}$ , 与实测值接近; 而当  $B = 0.36 \times 10^9 \text{ Pa}$  时, 波速已降为  $475 \text{ m/s}$ , 已远低于实测值。

#### 4.4 淤泥在自重作用下变形时黏性效应的影响

在爆炸排淤填石法中, 当淤泥表面破裂后, 爆轰产物的压力随即消失, 卸载几乎在瞬间完成。之后淤泥在重力作用下向爆坑方向回流, 淤泥处于低应变率下的大变形状态, 此时除塑性变形外, 淤泥的黏性可能会起作用, 我们通过数值计算分析了黏性的影响。

计算区域取为  $10 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$  的淤泥堆积体, 含水量为 70%。淤泥底面和三个侧面为法向约束, 另一个侧面和顶面为自由面。堆积体只在重力作用下变形和流动。

在不考虑黏性的计算中, 各模型参数取值如下: 初始密度  $\rho_0 = 1600 \text{ kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 5.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ , 屈服强度  $k = 200 \text{ Pa}$ , 体变模量  $B = 3.6 \times 10^9 \text{ Pa}$ , 塑性硬化模量  $ETAN = 0.0$ 。

在考虑黏性的计算中, 各模型参数取值如下: 初始密度  $\rho_0 = 1600 \text{ kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 5.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ , 屈服强度  $k = 200 \text{ Pa}$ , 宾汉黏性系数  $\eta_B = 0.0 \sim 20000 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , 体变模量  $B = 3.6 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。

图 9 给出了有黏性和无黏性对比的计算结果。

五组点的屈服应力相同, 其中方形点  $\eta_B = 0.0 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , 正三角形点  $\eta_B = 20 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  (正三角形点和方形点基本重合), 圆形点  $\eta_B = 200 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , 倒三角形点

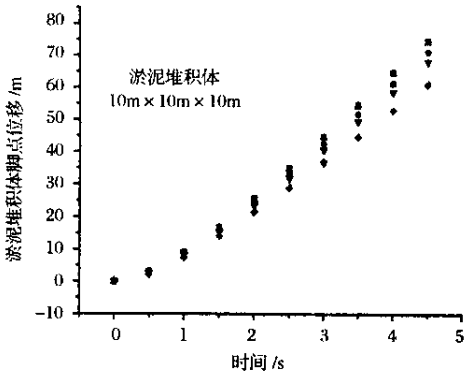


图 9 黏性对淤泥堆积体脚点位移的影响

Fig.9 Influence of viscosity on displacement of toe point in a seaooze accumulation

$\eta_B = 2000\text{Pa}\cdot\text{s}$  菱形点  $\eta_B = 20000\text{Pa}\cdot\text{s}$ 。实际上,当  $\eta_B = 2000\text{Pa}\cdot\text{s}$  时,已经把宾汉黏性系数的正常值放大 100 倍,这说明在小尺度条件下,把正常的黏性系数数值即使放大 100 倍,也不会对淤泥自重作用下的变形产生大的影响。当然,放大 1000 倍影响就较大。

## 5 结论和问题

### 5.1 结论

(1)在爆炸空腔的形成和鼓包运动过程中,淤泥表现出理想不可压缩流体的性质;

(2)在小尺度条件下,在淤泥自重作用下的变形和流动过程中,黏性效应可以忽略不计。

### 5.2 问题

如何给出淤泥的破坏条件,这是我们还没有解决的问题。当然这个问题比较复杂,淤泥的破坏机制至少包括以下几方面:①冲击波反射所形成的拉

伸波,在淤泥表面拉出泥片导致淤泥破裂;②淤泥本身对大变形的容许不是无限制的,变形发展到一定程度会发生断裂或破坏;③淤泥本身的不均匀性也会导致破坏,等等。

### 参考文献:

[1] Zheng Zhemin, Yang Zhensheng, Jin Liao. Underwater explosion treatment of marine soft foundation[J]. China Ocean Engineering, 1991, 5(2): 213-234.

[2] 张建华, 张亮, 顾道良, 武可贵. 爆炸排淤填石法的实验研究[A]. 第四届全国工程爆破会议报告[C]. 1989.

[3] 张翠兵. 厚层淤泥中采用爆炸定向滑移法修筑防波堤机理研究[D]. 北京: 铁道部科学研究院, 2001.8.

[4] 许连坡, 顾道良, 李世海. 在淤中爆破的一些现象和问题[J]. 爆炸与冲击, 1989, 1(4): 328-337.

[5] 章根德. 土的本构模型及其工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[6] 许连坡. 在爆炸载荷作用下连云港海淤的粘性特征[J]. 爆炸与冲击, 1990, 1(4): 297-300.

[7] 呼和敖德, 黄振华, 张袁备, 金. 连云港淤泥流变特性研究[J]. 力学与实践, 1994, 16(1): 21-25.

[8] 赵子丹, 张庆河. 规则波与淤泥质底床的相互作用—波浪衰减[J]. 水利学报, 1997(4): 26-34.

[9] 龙源. 条形装药土中爆炸冲击波及空腔的数值模拟[J]. 爆炸与冲击, 1990(1): 41-48.

[10] 杨光照. 水下及淤泥中施工与地基处理[M]. 北京: 海洋出版社, 1998.

[11] 丁玉奎. 炸药冲击波激励惰性气体闪光及应用研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2000.8.

[12] 董海山, 周芬芬. 高能炸药及相关物性能[M]. 北京: 科学出版社, 1989.

(上接第 11 页)

[2] 潘井渊. 爆破破岩机理的探讨[J]. 爆破, 1994, 11(4): 1-6.

[3] Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides [M]. New York: North Holland Publishing Company, 1990.

[4] Achenbach J D. 弹性固体中波的传播[M]. 徐植信, 洪锦如译. 上海: 同济大学出版社, 1992.

[5] 王礼立. 应力波基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1985.

[6] 杨桂通, 张善元. 弹性动力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1988.

[7] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 1988.

[8] Stehfest H. Remark on Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms[J]. Communications of ACM, 1970, 13(10): 624.

[9] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions (ed. ) [M]. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55 5th Printing, 1966.

[10] 王文龙. 钻眼爆破[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1984.

[11] Henrych J. The Dynamics of Explosion and Its Use [M]. Elsevier Sci. Publishing Co. Amsterdam, 1979.

[12] 徐国元, 古德生, 陈寿如. 爆破破岩机理的实验研究[J]. 中南工业大学学报, 1997, 28(6): 522-525.