

# 解非定常不可压缩 N-S 方程的迭代压力 Poisson 方程法<sup>\*1)</sup>

于 欣

(中国科学院力学所 LHD, 北京, 100080)

## ITERATIVE PRESSURE POISSON EQUATION METHOD FOR SOLVING THE UNSTEADY INCOMPRESSIBLE N-S EQUATIONS

Yu Xin

(LHD, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)

### Abstract

We present iterative pressure Poisson equation method for solving the viscous incompressible Navier-Stokes equations. Comparing with the pressure Poisson equation method, it uses the increment of the pressure, the difference of two successive pressures ( $p_k^{n+1}$  and  $p_{k+1}^{n+1}$ ), instead of the pressure  $p^{n+1}$  as an unknown variable. We apply it to a fourth order accurate staggered mesh compact difference scheme, simulate the driven flow in a square cavity with  $Re = 5000$  and 10000.

**Keywords:** N-S equations, Pressure Poisson Equation Method, incompressible, compact scheme

**关键词:** N-S 方程, 压力 Poisson 方程法, 不可压缩, 紧致格式

### 1. 引 言

数值求解不可压缩流体流动问题可以采用原始变量的方程作为控制方程, 也可以用涡量一流函数方程作为控制方程. 直接求解原始变量的不可压缩 Navier - Stokes 方程存在一个主要困难: 速度向量在每一时刻都必须满足零散度约束条件, 即不可压缩性连续方程. 用涡量一流函数方程求解时, 连续方程自动满足, 所以不存在约束条件的问题, 但涡量的边界条件比较难处理, 且不易应用于三维问题和带有自由表面或其它流体交界面的问题.

解决上述速度向量必须满足零散度约束条件的困难的方法有: 人工压缩法<sup>[3,17]</sup>; 压力 Poisson 方程法<sup>[4,16]</sup>; 另外还有投影法<sup>[17]</sup>, 零散度格式法<sup>[5-7]</sup>等. 对非定常问题, Chorin 的人工压缩法可写成: 在每个时间步迭代计算:

\* 1999 年 10 月 20 日收到.

1) 中国科学院回国人员择优基金 (1999); 国家计算流体力学实验室 (#2000-16).

$$\begin{aligned} (1) & \text{ 计算速度 } \mathbf{V}_{k+1}^{n+1} (\text{用动量方程, 压力取上步迭代值 } p_k^{n+1}) \\ (2) & p_{k+1}^{n+1} = p_k^{n+1} - \lambda^{-1} \operatorname{div}_h \mathbf{V}_{k+1}^{n+1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中  $\lambda > 0$  是小参数, 需要在计算中调整.

压力 Poisson 方程法: 对动量方程取散度, 舍去  $n+1$  层的速度散度, 得到关于压力的 Poisson 方程, 用此方程代替连续方程.

本文将压力 Poisson 方程法改进为多步迭代计算, Poisson 方程中未知量改为压力的增量. 称这样的方法为迭代压力 Poisson 方程法. 其优点如下:

1. 能保证离散的连续方程成立 (达到要求的精度, 见 (2.8));
2. Poisson 方程 (2.7) 中  $\nabla_H^2$  不必用高精度的算子, 例如对二维四阶紧致格式, 可取  $\nabla_H^2$  为五点中心差. Chorin 方法 (1.1) 相当于取 (2.7) 中  $\nabla_H^2$  为  $-\lambda/\Delta t$ ;
3. 与 Chorin 方法 (1.1) 相比, 收敛速度要快得多;
4. 可直接应用于三维问题. (对三维问题,  $\nabla_H^2$  可用七点中心差);
5. 可以推广到有限元格式.

为了提高计算精度, 利用三次样条函数插值的思想构造差分格式, 可以在不增加网格点的情况下提高差分精度, 见 [9]. 紧致格式是在三次样条差分格式的基础上发展起来的, 其基本思想是利用三次样条函数对空间导数进行差分. [10] 用紧致格式模拟了圆柱绕流问题, 对  $Re = 1000$  状态的计算结果与实验的结果符合得很好. 刘宏<sup>[1]</sup> 曾用 [11] 中的二阶格式计算了驱动方腔流动, 仅在低  $Re$  流动情况下结果好. 他<sup>[1]</sup> 参照 [14] 构造了一个紧致格式, 用于求解方腔问题, 在计算过程中发现方腔左上角附近有振荡产生,  $Re$  较高时, 底部角区也有振荡产生, 使计算不能进行下去. 这说明中心差分非交错网格紧致格式在流动参数变化很大的区域产生非物理的数值振荡. 他<sup>[1]</sup> 将 [12] 中的迎风紧致差分法应用到求解不可压缩流动, 成功地解决了上述振荡问题. 他的主要结果<sup>[1]</sup> 发表在 [19] 中.

我们给出的交错网格紧致差分格式在计算同样的方腔流动时不用迎风法也未出现上述振荡问题. 这个三点中心差分格式是四阶精度的 (三点迎风紧致格式为三阶). 这说明了交错网格法的一个长处.

由于涉及到非定常现象, 对时间导数的高阶逼近是必要的. 本文采用四阶 Runge-Kutta 法, 见 §3.4.

本文是 [18] 的修改稿.

## 2. 迭代压力 Poisson 方程法

非定常粘性 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{V}) + \nabla p = \mathbf{0}, \text{ 在 } \Omega \text{ 中, } (\text{其中 } \mathbf{A}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nu \nabla^2 \mathbf{V}) \quad (2.1)$$

不可压缩连续性方程:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中} \quad (\text{对二维问题: } \mathbf{V} = (u, v)^T) \quad (2.2)$$

我们考虑 (2.1)(2.2) 的显式离散形式:

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla_h p^{n+1} = 0, \quad (\text{其中 } \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n)), \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}_h \mathbf{V}^{n+1} = 0, \quad (\text{对二维问题 } \mathbf{V}^{n+1} = (u^{n+1}, v^{n+1})^T) \quad (2.4)$$

(我们将在 §3.1 中给出一个具体格式 (紧致差分格式)). 则关于压力的 Poisson 方程可写成:

$$\nabla_h^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}_h \mathbf{V}^* \quad (2.5)$$

其中  $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n)$ ,  $\Delta t$  为时间步长. (2.5) 左端和右端都有多种不同形式, 对应于一类不同的压力 Poisson 方程法. [16] 中给出了一些满足等价性的压力 Poisson 方程<sup>1</sup>. 迭代压力 Poisson 方程法:

取  $n$  层的值为初值,  $\mathbf{V}_0^{n+1} = \mathbf{V}^n, p_0^{n+1} = p^n$ , 迭代计算  $\mathbf{V}_{k+1}^{n+1}, p_{k+1}^{n+1}, k = 0, 1, 2, \dots$ :

(1) 计算速度  $\mathbf{V}_{k+1}^{n+1}$ :

$$\frac{\mathbf{V}_{k+1}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla_h p_k^{n+1} = 0, \quad (\text{其中 } \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n)), \quad (2.6)$$

(2) 用一个近似的 Poisson 方程解压力  $p_{k+1}^{n+1}$  (先将  $p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}$  作为一个变量解出):

$$\nabla_H^2 (p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}) = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}_h \mathbf{V}_{k+1}^{n+1} \quad (2.7)$$

(3) 迭代到满足下式则取  $\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}_{k+1}^{n+1}$

$$\|\operatorname{div}_h \mathbf{V}_{k+1}^{n+1}\| \leq \epsilon \quad (2.8)$$

其中  $\epsilon > 0$  是预先给定的小量,  $\|\cdot\|$  是一种模. 当 (2.3)(2.4) 为四阶精度时,  $\epsilon$  可取为  $O(h^4)$ .

(2.7) 和 (2.8) 中的  $\operatorname{div}_h$  是原格式的一部分, 而 (2.7) 中的  $\nabla_H^2$  则可用简单的差分算子. 例如对二维紧致格式, 可取  $\nabla_H^2$  为五点中心差.

上述迭代法是求解原格式 (例如紧致格式) 的一种手段, 不改变原格式的数值解, (在这一点上很象求解线性方程组的 Gauss-Seidel 迭代法). [5]-[7] 中的零散度格式 (降阶法) 也同样是求解原方程的手段, 不改变原有限元格式的解.

将上述迭代法写成一般的形式: 对线性方程组

$$Lp = b \quad (2.9)$$

迭代求解  $\{p_{k+1}\}$ :

$$L_1(p_{k+1} - p_k) = b - Lp_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

<sup>1</sup> 连续形式的等价性 (对照 [16] 中的离散形式的等价性) 为: 微分方程  $\operatorname{div}(\mathbf{V} - \alpha \mathbf{NS}) = 0$  (对应于 [16] 中的 (3.3)) 与 (2.1) 一起等价于 (2.2)(2.1), 这里  $\mathbf{NS}$  为 (2.1) 的左端项,  $\alpha$  为任意常数  $\operatorname{div}(\mathbf{V} - \alpha \mathbf{NS}) = 0$  可导出压力的 Poisson 方程.

其中  $L_1$  为  $L$  的近似. 通常取  $L_1$  比  $L$  简单, (2.10) 比 (2.9) 容易求解. 下面简单分析一下 (2.6)–(2.8) 的收敛性. (2.10) 可写成:

$$p_{k+1} = L_1^{-1}(L_1 - L)p_k + L_1^{-1}b \quad (2.11)$$

收敛的条件为迭代矩阵  $L_1^{-1}(L_1 - L)$  的谱半径小于 1. 比较 (2.6)–(2.10),  $L = \text{div}_h \nabla_h$ ,  $L_1 = \nabla_H^2$ . 因此  $L_1^{-1}(L_1 - L)$  的谱半径小于 1 通常应该是没有问题的.

### 3. 紧致差分格式 (二维、交错网格、四阶精度)

考虑二维非定常粘性不可压缩 N-S 方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}_h(\mathbf{V}) + \nabla p = 0, \quad \text{在 } \tilde{\Omega} \text{ 中}, \quad (3.1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \quad (3.2)$$

其中  $\mathbf{A}(\mathbf{V}) = (uu_x + vu_y - \nu(u_{xx} + u_{yy}), uv_x + vv_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}))^T$ ,  $\nabla p = (p_x, p_y)^T$ ,  $\text{div } \mathbf{V} = u_x + v_y$

#### 3.1 二维交错网格上的四阶精度紧致差分格式

这类格式, 导数 (和速度压力本身一样) 也作为变量列方程, 对于显式格式及其它没有隐式紧致差分的格式, 可以首先用  $u$  解出  $u_x, u_y$ , 计算方式有些象 ADI 方法: 在  $x$  和  $y$  方向分别求解  $x$  和  $y$  方向的偏导数. 对均匀剖分: 考虑 (3.1)(3.2) 的有限差分格式

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n) + \nabla_h p^{n+1} = 0, \quad (3.3)$$

$$\text{div}_h \mathbf{V}^{n+1} = 0, \quad (3.4)$$

其中  $\mathbf{V}^n = (u^n, v^n)^T$ ;  $\mathbf{A}_h, \nabla_h, \text{div}_h$  分别为  $\mathbf{A}, \nabla, \text{div}$  的差分形式:

(1)  $\mathbf{A}_h(\mathbf{V})$  中的一阶导数  $u_x, u_y$  的差分形式分别为:

$$\frac{u'_{i-1, j-\frac{1}{2}} + 4u'_{i, j-\frac{1}{2}} + u'_{i+1, j-\frac{1}{2}}}{6} = \frac{u_{i+1, j-\frac{1}{2}} - u_{i-1, j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x}, \quad (i \geq 1, j \geq 1), \quad (3.5)_1$$

$$\frac{u'_{i, j-\frac{1}{2}} + 4u'_{i, j+\frac{1}{2}} + u'_{i, j+\frac{3}{2}}}{6} = \frac{u_{i, j+\frac{3}{2}} - u_{i, j-\frac{1}{2}}}{2\Delta y}, \quad (i \geq 1, j \geq 1), \quad (3.5)_2$$

$\mathbf{A}_h(\mathbf{V})$  中的  $v_y, v_x$  类似于 (3.5).

(2)  $\mathbf{A}_h(\mathbf{V})$  中的二阶导数  $u_{xx}, u_{yy}$  的差分形式分别为:

$$\frac{u''_{i-1, j-\frac{1}{2}} + 10u''_{i, j-\frac{1}{2}} + u''_{i+1, j-\frac{1}{2}}}{12} = \frac{u_{i-1, j-\frac{1}{2}} - 2u_{i, j-\frac{1}{2}} + u_{i+1, j-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2}, \quad (i \geq 2, j \geq 1) \quad (3.6)_1$$

$$\frac{u''_{i, j-\frac{1}{2}} + 10u''_{i, j+\frac{1}{2}} + u''_{i, j+\frac{3}{2}}}{12} = \frac{u_{i, j-\frac{1}{2}} - 2u_{i, j+\frac{1}{2}} + u_{i, j+\frac{3}{2}}}{(\Delta y)^2}, \quad (i \geq 1, j \geq 1), \quad (3.6)_2$$

$A_h(\mathbf{V})$  中的  $v_{yy}, v_{xx}$  类似.

(3)  $\nabla_h p$  中的  $p_x$  的差分公式为:

$$\frac{p'_{i-1,j-\frac{1}{2}} + 22p'_{i,j-\frac{1}{2}} + p'_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{24} = \frac{p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, (i \geq 2, j \geq 1), \quad (3.7)$$

$p_y$  的差分公式类似.

(4)  $\text{div}_h \mathbf{V}$  中  $u_x$  的差分公式:

$$\frac{u'_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + 22u'_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + u'_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}}{24} = \frac{u_{i+1,j-\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, (i \geq 1, j \geq 1), \quad (3.8)$$

$\text{div}_h \mathbf{V}$  中  $v_y$  的差分公式类似.

(5)  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  中  $uv_x$  里的  $u$  需插值计算:

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{\bar{u}_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}} + \bar{u}_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}}{4}, (i \geq 1, j \geq 1), \quad (3.9)_1$$

$$\bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}} = u_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}[(\Delta x)^2 u_{xx} + (\Delta y)^2 u_{yy}]_{i,j-\frac{1}{2}}, (i \geq 0, j \geq 1), \quad (3.9)_2$$

其中  $u_{xx}, u_{yy}$  可利用 (3.6) 的结果,  $vu_y$  里的  $v$  插值公式类似. (3.9)\_3

(6)  $\mathbf{V}_t$  的差分公式: (3.3) 用了一阶前差公式, §3.4 将给出四阶 Runge-Kutta 法.

### 3.2 边界上的差分公式

边界  $\Gamma = \partial\Omega$  上  $\mathbf{V}|_{\Gamma} = \mathbf{V}_{\Gamma} = (u^{\Gamma}, v^{\Gamma})^T$ , 下面主要给出靠近左边界  $x = 0$  的差分公式.

$$(1)_1 \quad (u_x)_{0,j-\frac{1}{2}} = (-v_y^{\Gamma})_{0,j-\frac{1}{2}}, (j \geq 1) \quad (\text{由连续方程 (3.2)}), \quad (3.10)$$

$$(1)_2 \quad u_y \text{ 在 } y = \frac{3}{4}\Delta y \text{ 及 } v_x \text{ 在 } x = \frac{3}{4}\Delta x:$$

$$\frac{3u'_{i,\frac{1}{2}} + u'_{i,\frac{3}{2}}}{4} = \frac{u_{i,\frac{3}{2}} - u_{i,0}}{\frac{3}{2}\Delta y}, (i \geq 1); \quad \frac{3v'_{\frac{1}{2},j} + v'_{\frac{3}{2},j}}{4} = \frac{v_{\frac{3}{2},j} - v_{0,j}}{\frac{3}{2}\Delta x}, (j \geq 1), \quad (3.11)$$

这里  $u_{i,0} = (u^{\Gamma})_{i,0} = u^{\Gamma}|_{x=i\Delta x, y=0}, v_{0,j} = (v^{\Gamma})_{0,j} = v^{\Gamma}|_{x=0, y=j\Delta y}$

$$(2)_1 \quad u_{xx} \text{ 在 } x = \frac{10}{9}\Delta x:$$

$$\frac{8u''_{1,j-\frac{1}{2}} + u''_{2,j-\frac{1}{2}}}{9} = \frac{9u_{0,j-\frac{1}{2}} - 16u_{1,j-\frac{1}{2}} + 7u_{2,j-\frac{1}{2}}}{6(\Delta x)^2} + \frac{u'_{0,j-\frac{1}{2}}}{3\Delta x}, (j \geq 1) \quad (3.12)$$

其中  $u'_{0,j-\frac{1}{2}} = -(v_y^{\Gamma})_{0,j-\frac{1}{2}} = -v_y^{\Gamma}|_{x=0, y=(j-\frac{1}{2})\Delta y}, v_{yy}$  在  $y = \frac{10}{9}\Delta y$  类似于 (3.12).

$$(2)_2 \quad u_{yy} \text{ 在 } y = \frac{2}{3}\Delta y:$$

$$\frac{5u''_{i,\frac{1}{2}} + u''_{i,\frac{3}{2}}}{6} - \frac{1}{48}(u''_{i,\frac{1}{2}} - 2u''_{i,\frac{3}{2}} + u''_{i,\frac{5}{2}}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{2u_{i,0} - 3u_{i,\frac{1}{2}} + u_{i,\frac{3}{2}}}{(\Delta y)^2}, (i \geq 1), \quad (3.13)$$

$u_{i,0} = u_{i,0}^{\Gamma}, v_{xx}$  在  $x = \frac{2}{3}\Delta x$  类似于 (3.13).

(3)  $p_x$  在  $x = \Delta x$ :

$$p'_{1,j-\frac{1}{2}} + \frac{p'_{1,j-\frac{1}{2}} - 2p'_{2,j-\frac{1}{2}} + p'_{3,j-\frac{1}{2}}}{24} = \frac{p_{\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (j \geq 1) \quad (3.14)$$

$p_y$  在  $y = \Delta y$  类似.

(4)  $\text{div} \mathbf{V}$  中的  $u_x$  在  $x = \frac{1}{2} \Delta x$ :

$$\frac{2u'_{0,j-\frac{1}{2}} + 15u'_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + u'_{\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}}{18} = \frac{u_{1,j-\frac{1}{2}} - u_{0,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (j \geq 1), \quad (3.15)$$

其中  $u'_{0,j-\frac{1}{2}} = -(v_y^\Gamma)_{0,j-\frac{1}{2}} \cdot v_y$  在  $y = \frac{1}{2} \Delta y$  类似.

(5) (3.9)<sub>2</sub> 中  $u_{xx}, u_{yy}$  的边值:

$$(u_{xx})_{0,j-\frac{1}{2}} = 2(u_{xx})_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (u_{xx})_{1,j-\frac{1}{2}}, \quad (u_{xx})_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{(u_x)_{1,j-\frac{1}{2}} - (u_x)_{0,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (3.16)_1$$

$$(u_{yy})_{0,j-\frac{1}{2}} = (u_{yy}^\Gamma)_{0,j-\frac{1}{2}}, \quad (3.16)_2$$

其中  $(u_x)_{1,j-\frac{1}{2}}$  可由 (3.5) 的结果得到,  $(u_x)_{0,j-\frac{1}{2}} = -(v_y^\Gamma)_{0,j-\frac{1}{2}}$ .

### 3.3 迎风紧致差分格式

将计算公式 (3.5)<sub>1</sub> 改为

$$\frac{1}{3}u'_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}u'_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1,j-\frac{1}{2}} + 4u_{i,j-\frac{1}{2}} - 5u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{6\Delta x}, \quad (\text{当 } v_{i,j-\frac{1}{2}} \geq 0) \begin{cases} i \geq 1 \\ j \geq 1 \end{cases} \quad (3.17)_1$$

$$\frac{2}{3}u'_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}u'_{i+1,j-\frac{1}{2}} = \frac{5u_{i+1,j-\frac{1}{2}} - 4u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{6\Delta x}, \quad (\text{当 } v_{i,j-\frac{1}{2}} < 0) \begin{cases} i \geq 1 \\ j \geq 1 \end{cases} \quad (3.17)_2$$

(其中  $v_{i,j-\frac{1}{2}}$  见 (3.9)<sub>3</sub>). (3.5)<sub>2</sub> 作类似改动, 其它公式同 (3.6)-(3.16).

(3.17) 与 [1] 中的 (1.1.26)(1.1.27) 即 [19] 中的 (2.8)(2.9) 不同之处是  $F(=u')$  没有上标 + 和 -, ([19] 中 (2.8) 里的  $I - 4 + 5I^{-1}$  应为  $I + 4 - 5I^{-1}$ ).

### 3.4 Runge-Kutta 法 (对非定常问题, 时间方向)

定义  $f(\mathbf{V}) = \mathbf{A}_h(\mathbf{V}) + \nabla_h p$ , 其中  $p = p(\mathbf{V})$  满足约束条件  $\text{div}_h(\mathbf{A}_h(\mathbf{V}) + \nabla_h p) = 0$ . 这样  $f$  是  $\mathbf{V}$  的函数. 求解  $\mathbf{V}_t + f(\mathbf{V}) = 0$  的四阶 Runge-Kutta 公式为:

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}{6} = 0, \quad (3.18)$$

其中

$$\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{V}^n - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_1, \quad \mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{V}^n - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_2, \quad \mathbf{V}^{(3)} = \mathbf{V}^n - \Delta t\mathbf{k}_3,$$

$$\mathbf{k}_1 = f(\mathbf{V}^n), \quad \mathbf{k}_2 = f(\mathbf{V}^{(1)}), \quad \mathbf{k}_3 = f(\mathbf{V}^{(2)}), \quad \mathbf{k}_4 = f(\mathbf{V}^{(3)})$$

对中间层边条件, 我们在《计算数学》20:1(1998) 第 56 页上给出下列公式, (该文中  $V^{(2)}$  的表达式后一个“-”应改为“+”, 即和下面的  $V^{(2)}$  的表达式一致):

$$V^{(1)} = V^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} \right),$$

$$V^{(2)} = 2(V|_{t=(n+\frac{1}{2})\Delta t}) - V^{(1)}, V^{(3)} = (V|_{t=(n+1)\Delta t}), \text{ (在 } \Gamma \text{ 上)}$$

#### 4. 驱动方腔流动计算

我们考虑由剪切力驱动的二维单位方腔内粘性不可压缩流体流动问题. 控制方程为非定常 Navier-Stokes 方程组 (3.1)(3.2). 计算区域:  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ . 边界条件:

$$V = V_\Gamma = \begin{cases} (-1, 0)^T & \text{当 } y = 1 \\ (0, 0)^T & \text{当 } y = 0 \text{ 或 } x = 0 \text{ 或 } x = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

步长  $\Delta x = \Delta y = 1/N$ , 网格数  $N \times N$ . (2.7) 中的  $\nabla_H^2$  取为五点中心差.

解 (2.7) 只用多重网格法计算一轮 (网格从细到粗, 再从粗到细), 则包括  $k$  循环在内, 更象一个完整的多重网格程序 (这样的“多重网格法”之“第一重网格”中  $\nabla_h^2$  作为细网格,  $\nabla_H^2$  作为粗网格).

图 1 给出了用迭代压力 Poisson 方程法, 但边界上取 [18] 中的边界条件, 时间方向为 [18] 中的方法 (实际上图 1 和图 2 是 [18] 中给出的算例),  $Re = 1/\nu = 5000$ , 网格数为  $128 \times 128$ , 迎风交错网格紧致差分格式 (3.17)(3.6)–(3.9) 的计算结果. 从图 1b 和 1c 中可以看出本文结果与 [14] 中的结果非常吻合. 图 2 给出了用迭代压力 Poisson 方程法, 边界上取 [18] 中的边界条件, 时间方向为 [18] 中的方法,  $Re = 10000$ , 网格数为  $256 \times 256$ , 非迎风交错网格紧致格式 (3.5)–(3.9) 的计算结果. 图 2a1 和图 2a2 与 [1] 中图七即 [19] 中图 5 很接近.

下面用 §3.2 中的边界条件及 §3.4 中的 Runge-Kutta 法 (中间层边界条件用  $V^{(1)} = V^{(2)} = V|_{t=(n+\frac{1}{2})\Delta t}$ ,  $V^{(3)} = V|_{t=(n+1)\Delta t}$  (在  $\Gamma$  上)), §2 中的迭代压力 Poisson 方程法, §3.1 中的非迎风交错网格紧致格式,  $Re = 10^4$ , 初始条件:  $V=0$  (区域内部网格点上),  $V = V_\Gamma$ , 网格数  $256 \times 256$ , 步长比  $\Delta t/\Delta x = 0.6$ , 取 (2.8) 中的  $\epsilon = 10^{-5}$ , 图 3 给出了  $n = 73840, 86800, 121840$  三个时间层上的流线图.

为了验证迭代法 (2.6)(2.7) 与原方程 (2.3)(2.4) 的等价性, 从  $t = 80640 \times 0.6/256$  我们将 (2.8) 中的  $\epsilon$  改为  $10^{-13}$ , 仍然可以计算下去. 这说明该迭代法可以等价地替代原来的方程. 为了验证等价性的试算算了 100 步时, 同时运行的  $\epsilon = 10^{-4}$  的程序计算了 646 步. 另外我们还计算了下列三种情况, 均可以计算下去 (对每种情况试算了 10 个时间步):

- ① 从  $t = 80640 \times 0.6/256$  将 (2.8) 中的  $\epsilon$  改为  $10^{-13}$ ,  $Re$  改为  $10^3$ ;
- ② 改  $N=64, Re = 10^4, \epsilon = 10^{-14}$ , 重新算起;
- ③ 改  $N=64, Re = 10^3, \epsilon = 10^{-13}$ , 重新算起.

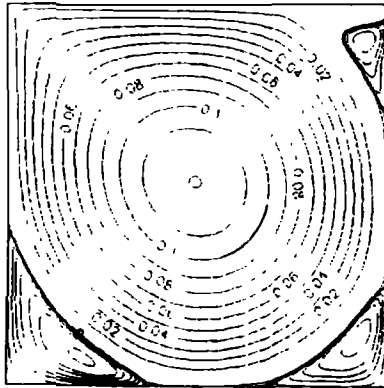


图 1a. 流线图, 网格数  $128 \times 126$ ,  
 $Re = 5000$ , 迎风系数差分格式

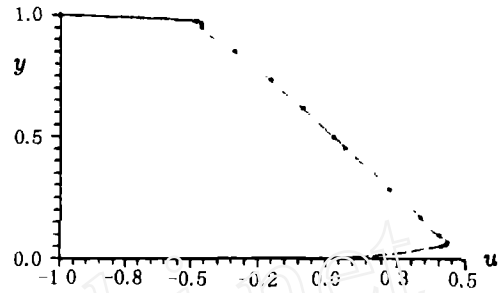


图 1b. 速度  $u$  剖面图,  $x = 0.5$   
— 表示本文结果, ... 表示 [14] 中结果

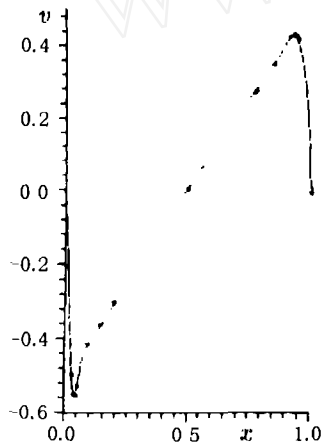


图 1c. 速度  $v$  剖面图,  $y = 0.5$   
— 表示本文结果, ... 表示 [14] 中结果

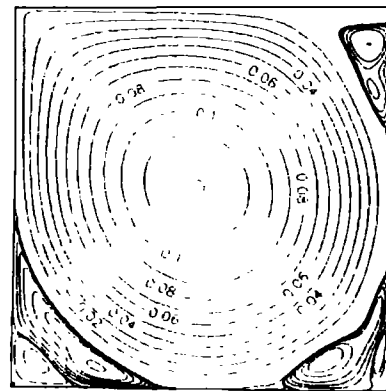


图 2a1. 流线图, 网格数  $256 \times 256$ ,  
 $Re = 10000$ , 紧致差分格式,  $t = t_0 + 12.7490$

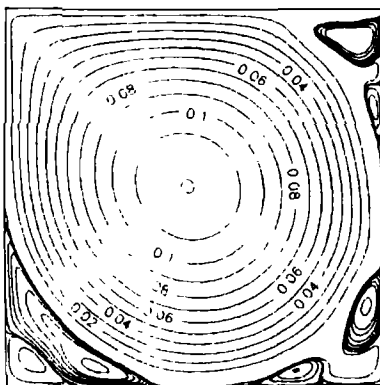


图 2a2. 流线图, 网格数  $256 \times 256$ ,  
 $Re = 10000$ , 紧致差分格式,  $t = t_0 + 13.9111$

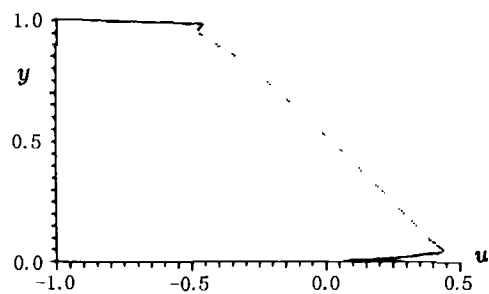
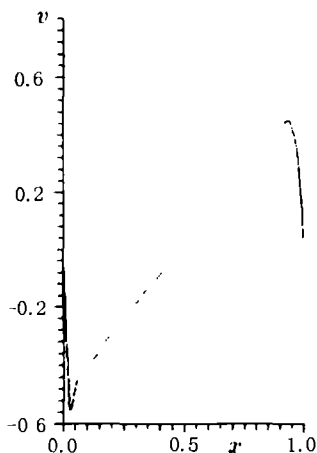
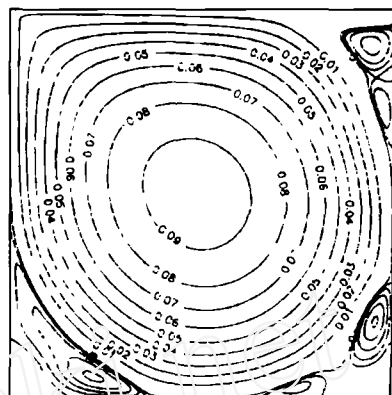
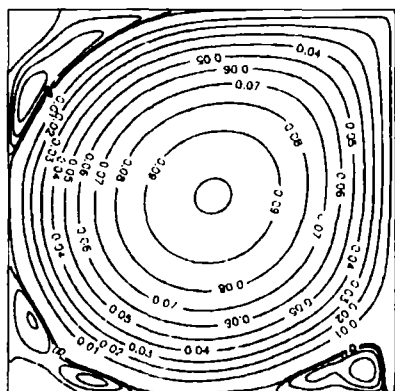
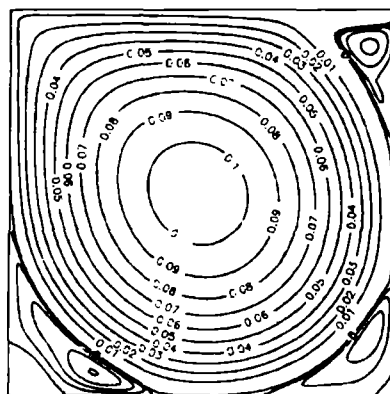


图 2b1. 速度  $u$  剖面图,  $x = 0.5$



图 2c1. 速度  $v$  剖面图,  $y = 0.5$ 图 3a. 流线图, 网格数  $256 \times 256$ ,  
 $Re = 10000, t = 73840 \times 0.6/256$   
流函数值:  $-0.002, -0.001, -0.0003,$   
 $0, 0.0003, 0.01, 0.02, \dots, 0.09$ 图 3b. 流线图, 网格数  $256 \times 256$ ,  
 $Re = 10000, t = 86800 \times 0.6/256$   
流函数值:  $-0.002, -0.001, -0.0003,$   
 $0, 0.0003, 0.01, 0.02, \dots, 0.09, 0.098$ 图 3c. 流线图, 网格数  $256 \times 256$ ,  
 $Re = 10000, t = 121840 \times 0.6/256$   
流函数值:  $-0.002, -0.001, -0.0003,$   
 $0, 0.0003, 0.01, 0.02, \dots, 0.09, 0.1$ 

本文进一步讨论、证明、推导等见网页: <http://www.cerse.psu.edu/yu/ipp/>.

我们衷心感谢王发民教授, 舒其望教授, 沈捷教授, 陈龙庆教授, 傅德薰教授, 马延文教授, 牛家玉教授, 彭世镛教授, 黄敦教授的帮助和支持。

### 参 考 文 献

- [1] 刘宏, 高精度差分格式的研究与非定常分离涡的直接数值模拟, 中国科学院力学研究所硕士学位论文, 北京, 1992 (主要结果见 [19]).
- [2] 罗奇, 计算流体力学, 科学出版社, 北京, 1983.
- [3] A.J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *J. Comput. Phys.*, 2: 1 (1967), 12-26.

- [4] F. H. Harlow, J. E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, **8**:12 (1965), 2182-2189.
- [5] 于欣, 解不可压缩流体力学方程的零散度格式, 中国科学院力学研究所博士学位论文, 北京, 1990.
- [6] C. Cuvelier, et al., *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*, D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [7] 于欣, 解不可压缩流体力学问题的降阶法, 计算物理, (共四篇), I. 基本算法, 计算物理, **2**:3 (1985), 337-346; II. 空间  $V_h$  的基函数和误差估计, 计算物理, **3**:2 (1986), 217-226; III. 二阶精度有限元格式, 计算物理, **5**:2 (1988), 211-220; IV. 三维 Navier-Stokes 方程, 计算物理, **6**:1 (1989), 104-116.
- [8] 刘宏, 傅德薰, 马延文, 驱动方腔流动的 Hopf 分叉, 计算流体力学的理论、方法和应用, 科学出版社, 北京, 1992, 267-270.
- [9] S. G. Rubin, R. A. Graves, Jr., Viscous flow solution with a cubic spline approximation, *Computers and Fluids*, **3**: 1 (1975), 1-36.
- [10] N. Baba, H. Miyata, H. Kajitani, *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, **159** (1987), 33.
- [11] S. Abdallah, Numerical solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables using a non-staggered grid II, *J. Comput. Phys.*, **70** (1987) 193-202.
- [12] FU Dexun, MA Yanwen, *A Collection of Technical Papers, International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, 1989.
- [13] C. H. Bruneau, C. Jouron, An efficient scheme for solving steady incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, **89** (1990), 389-413.
- [14] U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, **48** (1982), 387-411.
- [15] 于欣, 不可压缩纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程数值解法, 工程应用力学手册, 计算力学第七章, 陕西人民出版社, 西安, 1996.
- [16] 于欣, 交错网格紧致差分格式和满足等价性的压力 Poisson 方程, 计算数学, **19**:1 (1997), 83-90; (英译: *Chinese J. of Numer. Math. and Appl.* **19**: 2 (1997), 73-81).
- [17] R. Peyret, T. D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, 1983.
- [18] 于欣, 解非定常不可压缩 N-S 方程的迭代压力 Poisson 方程法, 北京计算流体力学讨论会文集, **5**, 北京, 1993, 127-136.
- [19] 刘宏, 傅德薰, 马延文, 迎风紧致格式与驱动方腔流动问题的直接数值模拟, 中国科学, **A** 辑, **23**:6 (1993), 657-665.