

正交各向异性功能梯度材料 反平面裂纹尖端应力场*

李春雨¹ 邹振祝² 段祝平³

(¹石家庄铁道学院建筑工程系, 石家庄, 050043)

(²石家庄铁道学院交通工程系, 石家庄, 050043)

(³中国科学院力学研究所非线性连续介质力学实验室, 北京, 100080)

摘要 采用积分变换-对偶积分方程方法,研究了正交各向异性功能梯度材料反平面裂纹问题.文中假定材料沿两个主轴方向的剪切模量成比例按双参数梯度模型变化,通过求解对偶积分方程并考虑变形 Bessel 函数的渐近特性,推导出了裂纹尖端应力场.最后考察了材料非均匀性及正交性对应力强度因子的影响.

关键词 正交各向异性,功能梯度材料,应力强度因子,裂纹

1 引言

功能梯度材料(FGM)断裂力学研究对于功能梯度材料的设计、制造及应用具有十分重要的指导意义.从应用力学的观点来看,FGM是非均匀体,其非均匀性对材料的断裂力学性能有很大影响.目前,国内外力学工作者已经在 FGM 断裂力学性能的理论 and 实验研究上做了大量工作.但是,由于数学处理上的困难,目前大多数有关 FGM 裂纹问题的理论分析均假设材料为各向同性弹性体.然而,根据制备工艺特点,FGM 很少是各向同性的.例如,采用等离子喷射技术通常导致横向强化结构,而采用物理气相沉积技术通常得到纵向强化结构^[1].所以,实际的 FGM 往往是各向异性体,在力学分析中有必要考虑其各向异性特征. Ozturk 和 Erdogan 曾采用指数模型,运用奇异积分方程技术,研究了正交各向异性非均匀材料型裂纹问题^[1],获得了一些有意义的结果.对正交各向异性非均匀材料反平面裂纹问题尚未见有人研究.

因此,本文采用剪切模量双参数模型,应用积分变换-对偶积分方程方法,研究了正交各向异性功能梯度材料反平面裂纹问题.本文的主要目的是揭示裂纹尖端应力场变化特征,考察材料的非均匀性及正交性对裂纹尖端应力强度因子的影响.

2 问题的描述

如图 1 所示,设一无限大正交各向异性功能梯度材料, x 和 y 坐标轴为正交主轴,剪切模量 μ_x 和 μ_y 仅是坐标 y 的函数,并且 μ_x 和 μ_y 按比例变化,即

$$\mu_x(y) = (\mu_x)_0(1 + |y|)^k, \quad \mu_y(y) = (\mu_y)_0(1 + |y|)^k \quad (1)$$

其中非均匀性双参数 (> 0) 和 $k(k > 0)$ 可以调整,以便更好地近似 FGM 的实际材料特性

* 国家自然科学基金(19772029 和 19891180)资助.

1999-03-30 收到第 1 稿,1999-12-15 收到修改稿.

分布, $(\mu_x)_0$ 和 $(\mu_y)_0$ 为 $y=0$ 处剪切模量. 设 $y=0$ 平面有一长为 $2a$ 的裂纹, 裂纹面受反平面剪切荷载作用, x, y 和 z 方向的位移分量分别为 u_x, u_y 和 u_z . 对于反平面剪切变形情形, u_x 和 u_y 处处为零, $u_z = w(x, y)$. 非零应力分量 τ_{xz} 和 τ_{yz} 如下

$$\tau_{xz} = \mu_x \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu_y \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

由应力平衡条件有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

其中 μ_y 为 $\mu_y(y)$ 对坐标 y 的导数.

假设裂纹面受一对反平面剪切应力作用, 则边界条件为

$$\tau_{yz}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < a \quad (4a)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < a \quad (4b)$$

3 积分方程的导出

引入如下关于变量 x 的 Fourier 余弦变换对, 并令 $S = s \sqrt{(\mu_x)_0 / (\mu_y)_0}$, 则由式(3)求得

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(s) (1 + y)^{-1} K \left[(1 + y)^{-1} \frac{S}{s} \right] \cos(sx) ds \quad (5)$$

将式(5)代入式(2)的应力分量表达式, 则有

$$\tau_{yz}(x, y) = \mu_y(y) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(s) \left\{ - (1 + y)^{-1} K \left[(1 + y)^{-1} \frac{S}{s} \right] + S (1 + y)^{-1} K \left[(1 + y)^{-1} \frac{S}{s} \right] \right\} \cos(sx) ds \quad (6a)$$

$$\tau_{xz}(x, y) = -\mu_x(y) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(s) (1 + y)^{-1} K \left[(1 + y)^{-1} \frac{S}{s} \right] \sin(sx) ds \quad (6b)$$

由式(5), (6a)和边界条件(4), 可得一组对偶积分方程

$$\int_0^a B(s) \cos(sx) ds = 0, \quad x > a \quad (7a)$$

$$\int_0^a sB(s) G(s) \cos(sx) ds = \frac{0}{2(\mu_y)_0}, \quad 0 \leq x < a \quad (7b)$$

其中

$$B(s) = A(s) K \left(\frac{S}{s} \right), \quad G(s) = \frac{K \left(\frac{S}{s} \right) - sK \left(\frac{S}{s} \right)}{sK \left(\frac{S}{s} \right)} \quad (8)$$

采用 Copson 方法^[3], 求得对偶积分方程(7)的解为

$$B(s) = \frac{0 a^2}{2(\mu_y)_0} \int_0^a \sqrt{(\cdot)} J_0(sa) d \quad (9)$$

其中函数 (\cdot) 满足如下第二类 Fredholm 积分方程,

$$(\cdot) + \int_0^a (\cdot) N(\cdot, \cdot) d = \sqrt{\cdot} \quad (10)$$

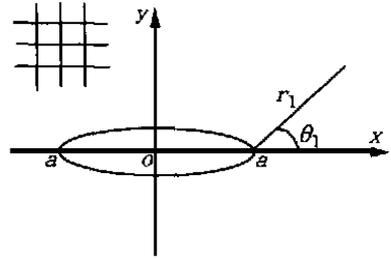


图1 正交各向异性功能梯度材料反平面裂纹问题

式(11)中核函数 $N(\cdot, \cdot)$ 为

$$N(\cdot, \cdot) = \sqrt{\frac{(\mu_x)_0}{(\mu_y)_0}} \int_0^1 \left[G\left(\frac{s}{a}\right) - 1 \right] J_0(s) J_0(s) ds \tag{11}$$

4 裂纹尖端局部应力场

对式(9)中 $B(s)$ 实施分部积分,再代入式(6),并考虑 $x \rightarrow 0$ 时 $K(x)$ 和 $K'(x)$ 的渐近特性,可得应力的低阶项如下

$$\sigma_{yz}(x, y) = - \frac{\sqrt{(\mu_x)_0}}{\sqrt{(\mu_y)_0}} \int_0^1 \frac{1}{a(1+y)^{k/2}} J_1(sa) \exp(-Sy) \cos(sx) ds \tag{12a}$$

$$\sigma_{xz}(x, y) = - \frac{(\mu_x)_0}{(\mu_y)_0} \int_0^1 \frac{1}{a(1+y)^{k/2}} J_1(sa) \exp(-Sy) \sin(sx) ds \tag{12b}$$

整理可得如下裂纹尖端局部应力场

$$\sigma_{yz}(r_1, \theta_1) = \frac{K}{\sqrt{2} r_1} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}} \right] + O(r_1^0) \tag{13a}$$

$$\sigma_{xz}(r_1, \theta_1) = - \frac{K}{\sqrt{2} r_1} \operatorname{Re} \left[\frac{i}{\sqrt{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}} \right] + O(r_1^0) \tag{13b}$$

式(13)中 $K = \sqrt{(\mu_x)_0} / (\mu_y)_0$, 极坐标 r_1 和 θ_1 的定义如图 1 所示, 应力强度因子 K 表达式为

$$K = \frac{\sqrt{(\mu_x)_0}}{\sqrt{(\mu_y)_0}} \int_0^1 \sqrt{a} \tag{14}$$

其中 \int_0^1 和 \sqrt{a} 在相应裂纹尖端点 $r_1 = 1$ 的值.

5 结果和讨论

式(15)所示裂纹尖端局部应力与 r_1 和 θ_1 的函数关系表明: 在正交各向异性功能梯度材料中, 裂纹尖端应力场同样具有 $1/\sqrt{r_1}$ 的奇异性, 并且关于 θ_1 的角分布函数也和正交各向异性均匀材料情况完全相同^[2]. 这一结论与各向同性功能梯度材料反平面裂纹问题的结论^[4]一致. 这一结论的重要性在于: 根据这一理论依据, 我们可以应用已经广泛应用于均匀材料的常规的断裂力学数值方法(如计算断裂力学有限元法)去分析大量的复杂的实际功能梯度材料断裂问题, 包括各向同性和正交各向异性情形.

图 2 显示了标准化的应力强度因子与参数 $\gamma = \sqrt{(\mu_x)_0} / (\mu_y)_0$ 的关系. 可以看出: 对于正交各向异性功能梯度材料, 应力强度因子随着 $\sqrt{(\mu_x)_0} / (\mu_y)_0$ 值的增加而增加. 即: 增大垂直于裂纹面方向的剪切模量可以减小应力强度因子

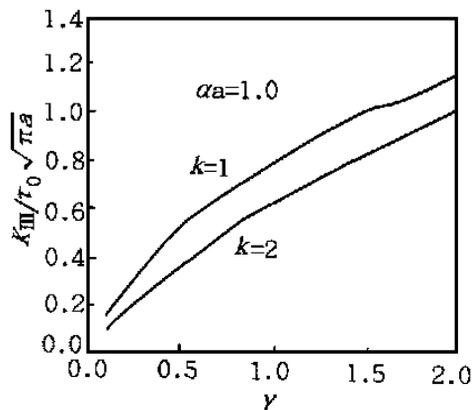


图 2 应力强度因子与正交性参数 γ 的关系

图 3 (a) 和 3 (b) 显示了不同 $\gamma = \sqrt{(\mu_x)_0} / (\mu_y)_0$ 值时应力强度因子 $K / \int_0^1 \sqrt{a}$ 与 a 和 k 的关系. 从中可以看到材料非均匀性对应力强度因子的影响, 即: 应力强度因子随 a 和 k 的增加而减小.

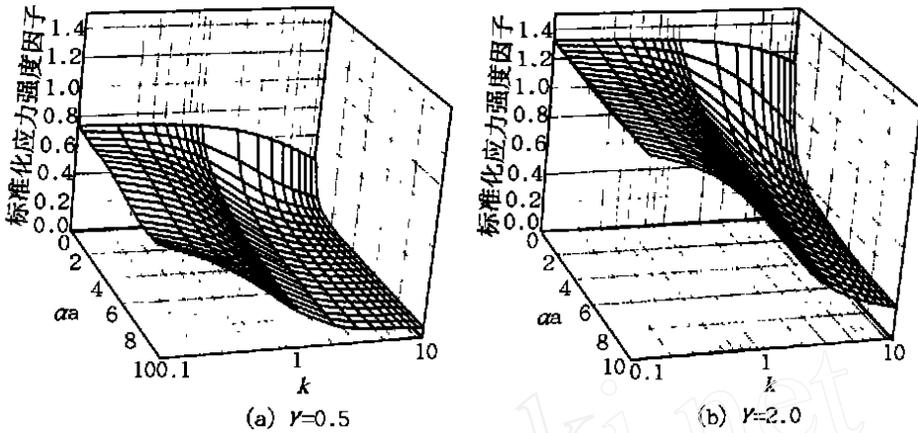


图 3 标准化应力强度因子 $K / \sigma \sqrt{a}$ 与 a 和 k 的关系

参 考 文 献

- 1 Ozurk M, Erdogan F. Mode crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium. *Int J Engng Sci*, 1997, 35 (9) :869 ~ 883
- 2 Sih G C, Chen E P. *Mechanics of fracture, Cracks in Composite Materials*. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1981, 6
- 3 Copson E T. On certain dual integral equations. *Proceedings Glasgow Mathematical Association*, 1961, 5:19 ~ 24
- 4 李春雨. 功能梯度材料静动态断裂力学研究. 哈尔滨工业大学博士学位论文, 1999

STRESS FIELD AROUND THE ANTIPLANE CRACK TIP IN AN ORTHOTROPIC FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL

Li Chunyu¹ Zou Zhenzhu² Duan Zhuping³

(¹ Department of Architectural Engineering, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang, 050043)

(² Department of Communication Engineering, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang, 050043)

(³ LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)

Abstract The problem of an orthotropic functionally graded material with a finite crack subjected to antiplane shear was studied in this paper by using the method of integral transforms and dual integral equations. The shear moduli in the two principal directions of the functionally graded material were assumed to vary proportionately as gradient model of double parameters. By solving dual integral equations and considering the asymptotic behavior, the local stress field around the crack tip was derived. Finally, the influences of material nonhomogeneity and orthotropy on stress intensity factor were investigated.

key words orthotropy, functionally graded materials, stress intensity factor, crack