

文章编号 : 1000-8055(2003)01-0024-08

六阶精度的群速度直接控制紧致格式 及其应用

高 慧, 马延文, 傅德薰

(中国科学院 力学研究所 LNM 国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 : 差分数值解产生非物理振荡的直接原因是非均一的波群的群速度, 因此本文利用直接群速度控制的方法重新构造具有六阶精度的紧致型差分格式, 以达到改善激波数值解的目的。对所构造的格式的精度及数值解随控制参数变化的行为进行了分析。最后文中给出了一些典型算例, 证明了文中所构造的格式具有方法简便、物理含义清楚、精度高、网格基架点小、和捕捉激波能力较强的优点。

关键词 : 航空、航天推进系统; 群速度控制; 紧致型格式; 精度高; 网格基架点; 捕捉激波

中图分类号 : O354; O355

文献标识码 : A

Sixth Order Accurate Compact Scheme with Group Velocity Control and Application

GAO Hui, MA Yan-wen, FU De-xun

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract : The direct reason of nonphysical oscillations in numerical solution is the non-uniform group velocity. This essay developed a modified sixth order accurate compact scheme with the method of group velocity control, and analyzed its accuracy and the behavior of numerical solution with Taylor method and Fourier method. The scheme is high order accurate with less stencil, simple, clear in physical explaining, and efficient in shock capturing. At last, some numerical experiments show the efficiency of the method.

Key words : aerospace propulsion; group velocity control; compact scheme; high accuracy; grid stencil; shock capturing

1 引言

我们知道, 即使初始条件是光滑的, 气动方程的解随着时间的推移解中也可能有间断产生^[1]。因此对激波的捕捉便成为计算流体力学的一个重要的研究内容。本文的目的即希望能在激波捕捉的方法上进行一些有效的探索。

近年来, 在改善激波附近数值解的分辨率方面已取得了很大进展, 如 TVD 格式, ENO 格式, NIVD 格式, MmB 格式等^[1], 此外还包括马延文和傅德薰提出的高精度迎风紧致型格式^[2]。这些格式均有着较高的精度和激波分辨率。但是存在着这样一个事实, 即利用通常的高于一阶精度的格式求解激波问题时, 在激波附近的数值解中总有非物理的振荡产生^[3, 4]。事实表明这些格式仍没

收稿日期 : 2001-02-06; 修订日期 : 2002-05-21

基金项目 : 973 项目(NKBRF G1999032805); 国家自然科学基金联合资助项目(NSAF 10176033); 国家自然科学基金重点资助项目(10135010); 863 项目(863-804-1-8-4)

作者简介 : 高慧(1974-), 女, 河南濮阳人, 中国科学院力学研究所 LNM 国家重点实验室博士生, 主要从事计算流体力学研究。

能很好地解决激波附近的数值解中产生非物理振荡的问题,且它们多为传统型的差分格式。

分析可知,数值振荡产生的直接原因是在于非均一的波群的群速度^[4]。最近,马延文和傅德薰提出了群速度直接控制的四阶精度紧致格式^[5],并证明该格式有着很好的激波捕捉能力。作者在这个思想基础上,从六阶精度的紧致格式和五阶精度的迎风紧致格式出发^[6],引入一个函数用以控制数值解的群速度,构造了具有六阶精度的群速度直接控制紧致格式,使得在激波之前格式为慢型,而在激波之后格式为快型,以完善激波解^[2]。

本文格式具有方法简便,物理含义清楚,精度高,网格基架点小,和捕捉激波能力较强的优点。比如与典型的捕捉激波的 TVD 格式相比较, TVD 格式是一个五点格式,在一般区域具有二阶逼近精度,而在极值点和拐点只有一阶逼近精度^[1]。本文所构造的格式也是一个五点格式,在一般区域却可达六阶精度,在极值点和拐点也还具有五阶精度。

文中进一步对所构造的格式的精度及数值解随控制参数变化的行为进行了分析,最后给出了部分算例。

2 依赖于自由参数的紧致差分

考虑如下的模型方程及其对应的半离散化方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$f = cu, \quad c = \text{const.} \quad (1)$$

其中:

$$\alpha_j = \frac{1}{5} + \sigma_{j-1/2}, \quad \beta_j = \frac{3}{5} - \sigma_{j+1/2} + \sigma_{j-1/2}, \quad \gamma_j = \frac{1}{5} - \sigma_{j+1/2}$$

$$h_{j+1/2} = \frac{1}{60} [28(f_{j+1} + f_j) + (f_{j+2} + f_{j+1} + f_j + f_{j-1})] - \frac{\sigma_{j+1/2}}{6} [12(f_{j+1} - f_j) + (f_{j+2} - 3f_{j+1} + 3f_j - f_{j-1})] - \epsilon_{i+1/2} \delta_x^5 f_{j+1/2} \quad (6a)$$

$$h_{j-1/2} = \frac{1}{60} [28(f_j + f_{j-1}) + (f_{j+1} + f_j + f_{j-1} + f_{j-2})] - \frac{\sigma_{j-1/2}}{6} [12(f_j - f_{j-1}) + (f_{j+1} - 3f_j + 3f_{j-1} - f_{j-2})] - \epsilon_{i-1/2} \delta_x^5 f_{j-1/2} \quad (6b)$$

$$\sigma_{j+1/2}^\pm = \pm \sigma [1 \pm \gamma_0 \text{ss}(u_{j+1/2})] \cdot \frac{|p_{j+2} - p_{j+1}| + 2|p_{j+1} - p_j| + |p_j - p_{j-1}|}{p_{j+2} + 3(p_{j+1} + p_j) + p_{j-1}} \quad (7)$$

$$\text{ss}(u_{j+1/2}) = \text{sigr}[(u_{j+1} - u_j) \chi (u_{j+2} - u_{j+1} - u_j + u_{j-1})] \quad (8)$$

$$\epsilon_{j+1/2}^\pm = \pm \sigma_2 \frac{|p_{j+2} - p_{j+1}| + 2|p_{j+1} - p_j| + |p_j - p_{j-1}|}{p_{j+2} + 3(p_{j+1} + p_j) + p_{j-1}} \quad (9)$$

$$\delta_x^5 f_{j+1/2} = f_{j+3} - 5f_{j+2} - f_{j-1} + 10(f_{j+1} - f_j) - f_{j-2} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{F_j}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

这里 $\frac{F_j}{\Delta x}$ 是一阶导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的一种近似。

本文中 $\frac{F_j}{\Delta x}$ 是利用下式求出的:

$$\left[1 + \frac{1}{5} \delta_x^2 \mp 2\sigma \delta_x^0\right] F_j^\pm = \frac{1}{60} \cdot [56 \delta_x^0 f_j^\pm + f_{j+2}^\pm - f_{j-2}^\pm] \mp \frac{\sigma}{6} \cdot [8 \delta_x^2 f_j^\pm + f_{j+2}^\pm - 2f_j^\pm + f_{j-2}^\pm] \mp \epsilon \delta_x^5 f_j^\pm \quad (3)$$

其中, σ 和 ϵ 是自由参数,并有:

$$\delta_x^2 = \delta_x^+ \delta_x^-, \quad \delta_x^0 = \frac{1}{2} (\delta_x^+ \delta_x^-)$$

$$\delta_x^5 f_j = (f_{j+3} + f_{j-3}) - 6(f_{j+2} + f_{j-2}) + 15(f_{j+1} + f_{j-1}) - 20f_j \quad (4)$$

其中: $\epsilon \delta_x^5 f_j$ 为加入的耗散项。显然,在(3)式中,若 $\epsilon = 0$, 当取 $\sigma \equiv 0$ 时得到六阶精度的紧致差分格式, 当取 $\sigma = \pm 1/5$ 时得到五阶精度的迎风紧致差分格式。

3 直接群速度控制紧致格式

对于自左向右运动的 N-S 激波,其左侧称为波后,其右侧称为波前。如果在波前使用慢型格式,而在波后使用快型格式,那么激波解将得到改善。通过以上的分析,当取 σ 值为零或较小时格式为慢型,当取 σ 值较大时格式为混合型,但总的呈现出快型格式的特性。为了实现这一目的,将格式(3)写成如下的守恒形式:

$$(5)$$

$$\delta_{j-1/2}^5 = f_{j+2} - 5(f_{j+1} - f_{j-2}) + 10(f_j - f_{j-1}) - f_{j-3} \quad (10b)$$

其中 $ss(u_{j+1/2})$ 称为激波结构函数。显然, 在一个自左向右运动的 N-S 激波的左侧有 $ss(u_{j+1/2}) > 0$, 在其右侧有 $ss(u_{j+1/2}) < 0$ 。当取 $ss(u_{j+1/2}) > 0$ 时, σ 取较大值, 格式在波后主要呈现快型格式的特性, 当取 $ss(u_{j+1/2}) < 0$ 时, σ 取零或较小值, 格式在波前呈现慢型格式的特性。由此即达到了改善激波数值解的目的。

4 差分格式的精度分析

通常有两种分析方法, Taylor 级数展开法和 Fourier 分析法。本文即从这两个方面对问题进行讨论^[2]。

4.1 Taylor 级数展开法

首先讨论在一般区域, 即不过极值点或拐点时的格式精度。

先来看(3)式。我们知道函数 F_{j+1} 和 f_{j+1} 在 j 点的 Taylor 级数展开表达式分别为:

$$F_{j+1} = F_j + \Delta x \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_j + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right)_j + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right)_j + \dots \quad (11)$$

$$f_{j+1} = f_j + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_j + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_j + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_j + \dots \quad (12)$$

其中:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right)_j = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_j$$

以此类推, 可得到其它各点的函数在 j 点的 Taylor 级数展开表达式。将它们代入(3)式, 并对比该式的左右两边后可得到:

$$\frac{F_i}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + O(\sigma \Delta x^5) + O(\epsilon \Delta x^5) \quad (13)$$

即格式(3)的逼近精度的量级是 $O(\sigma \Delta x^5) + O(\epsilon \Delta x^5)$ 。由(7)式和(9)式知道, 在解的光滑区有:

$$\sigma_{j+1/2} \sim \Delta x, \quad \epsilon_{j+1/2} \sim \Delta x$$

即: $\sigma \sim \Delta x, \quad \epsilon \sim \Delta x$

则(13)式可写为:

$$\frac{F_i}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + O(\Delta x^6) \quad (14)$$

即在一般区域, 格式(3)在光滑区具有六阶逼近精度。至于(5)式, 它是(3)式的守恒形式, 具有同样的逼近精度。

下面再来分析一下在极值点或拐点附近的格式精度。

观察(8)式, 显然, 在过极值点或拐点时, $ss(u_{j+1/2})$ 将改变自己的符号。因此, 在极值点或拐点 $\sigma_{j+1/2}$ 或 $\sigma_{j-1/2}$ 中有一个为零, 同样 $\epsilon_{j+1/2}$ 或

$\epsilon_{j-1/2}$ 中也有一个为零。这里只讨论方程(1)中 $c > 0$ 的情况。设 $\sigma_{j+1/2} = 0, \sigma_{j-1/2} > 0$, 且取 $\sigma_{j-1/2} = \sigma$ 为常数; 同样可设 $\epsilon_{j-1/2} = 0, \epsilon_{j+1/2} > 0$, 且取 $\epsilon_{j+1/2} = \epsilon$ 为常数。此时(5)式变为:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{5} + \sigma \right) F_{j-1} + \left(\frac{3}{5} + \sigma \right) F_j + \frac{1}{5} F_{j+1} = \\ & \frac{1}{60} [28(f_{j+1} - f_{j-1}) + (f_{j+2} - f_{j-2})] + \\ & \frac{\sigma}{6} [12(f_j - f_{j-1}) + f_{j+1} - 3f_j + 3f_{j-1} - \\ & f_{j-2}] + \epsilon f_{j+2} - 5(f_{j+1} - f_{j-2}) + \\ & 10(f_j - f_{j-1}) - f_{j-3} \end{aligned} \quad (15)$$

同样地, 对(15)式在各点进行 Taylor 级数展开后得到:

$$\frac{F_i}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + O(\sigma \Delta x^4) + O(\epsilon \Delta x^4) \quad (16)$$

即(15)式的逼近精度的量级是 $O(\sigma \Delta x^4) + O(\epsilon \Delta x^4)$ 。同样地由(7)式和(9)式知道, 在解的光滑区可将(16)式写为:

$$\frac{F_i}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + O(\Delta x^5) \quad (17)$$

对比(13)式和(16)式, 说明在极值点或拐点附近, 格式(3)和(5)在光滑区发生了降阶, 由六阶精度降成了五阶精度。

4.2 Fourier 分析法

也就是对数值解的行为进行分析。

首先讨论在光滑区数值解的行为与自由参数 σ 及 ϵ 之间的关系。这里只讨论(1)式中 $c > 0$ 的情况。设 $f = cu$, 取初值为:

$$u(x, t) = \exp(ikx) \quad (18)$$

则(1)式的准确解为:

$$u(x, t) = \exp[ik(x - ct)] \quad (19)$$

取初值为:

$$u(x_j, 0) = \exp(ikx_j) \quad (20)$$

则(2)式的准确解为:

$$\begin{aligned} u(x_j, t) = & \exp\left[-c \frac{K_r}{\Delta x} t\right] \cdot \\ & \exp\left[ik\left(x_j - c \frac{k_i}{\alpha} t\right)\right] \end{aligned} \quad (21)$$

其中:

$$\alpha = k\Delta x$$

若设:

$$F_j = e^{ikx_j}$$

其中:

$$K_e = K_r + iK_i, \quad f_j = e^{ikx_j}$$

并将之代入(3)式, 则有:

$$K_e = \frac{C + iD}{A + iB} \quad (22)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} A &= 6\{5 + [\cos(\alpha) - 1]\} \\ B &= -60\sigma \sin(\alpha) \\ C &= -10\sigma\{8 + [\cos(\alpha) - 1] + \cos(2\alpha) - 1\} - 2\epsilon[\cos(3\alpha) - 6\cos(2\alpha) + 15\cos(\alpha) - 10] \\ D &= 28\sin(\alpha) + \sin(2\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

从而得到：

$$\left. \begin{aligned} K_r &= \frac{A \cdot C + B \cdot D}{A^2 + B^2} \\ K_i &= \frac{A \cdot C - B \cdot D}{A^2 + B^2} \\ D(\alpha) &= \frac{dK(\alpha)}{d\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中： $K_r(\alpha)$ 反映了数值解的耗散特性， $K_i(\alpha)$ 则与数值波的传播方向有关， $D(\alpha)$ 为群速度^[2]。对于模型方程(1)的准确解，有 $K_r(\alpha)=0$ ， $K_i(\alpha)=\alpha$ ， $D(\alpha)=1$ 。根据以上表达式，分别作出在不同自由参数 σ 和 ϵ 的情况下，数值解的 $K_r(\alpha)$ 、 $K_i(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 随 α 的变化曲线，并与对应的准确解进行比

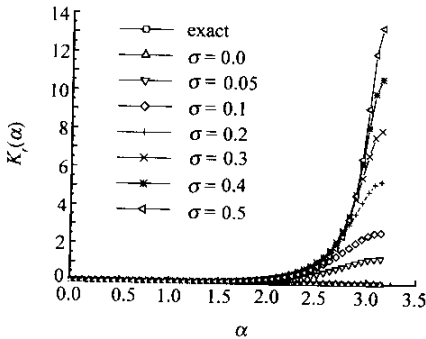


图1 $\epsilon=0$ 时 K_r 随 α 的变化曲线
Fig.1 The curve of K_r varying with α when $\epsilon=0$

较。图1~图3分别给出了在 $\epsilon=0$ 时，在不同的 σ 取值条件下， $K_r(\alpha)$ 、 $K_i(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 随 α 的变化曲线。图4~图5则分别给出了在 $\sigma=0.2$ 时，在不同的 ϵ 取值条件下， $K_r(\alpha)$ 、 $K_i(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 随 α 的变化曲线。

由图1~图3可以看出：对于低波数和中波数分量，数值解有着很好的逼近精度。随着波数增加，数值解偏离于准确解的程度加大，从而导致对应于不同的波数分量，在数值解中产生了错位，随即产生了非物理的振荡。其中群速度 $D(\alpha)$ 随 α 的变化曲线反映了高波束的这种非物理振荡的传播速度。随着 σ 取值的不同，差分格式所能模拟的波数范围也有所不同。当取 σ 值为零或较小时，高波束的传播方向与物理波的传播方向相反，格式表现为慢型；当取 σ 值较大时，高波束有两种传播方向，但总体上与物理波的传播方向一致。格

式是混合型的，但总的呈现为快型。因而可通过参数 σ 来控制数值解的群速度，使得激波前后满足对不同格式的要求。同时，高波数所对应的 $K_i(\alpha)$ 很大，即满足了格式的耗散性要求，因而使得这些难以控制的高频波有着很小的幅值，抑制了数值误差的增长。

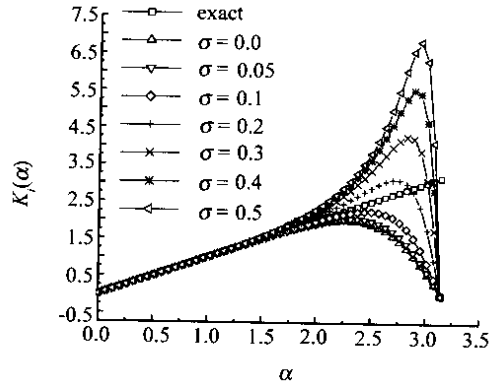


图2 $\epsilon=0$ 时 K_i 随 α 的变化曲线

Fig.2 The curve of K_i varying with α when $\epsilon=0$

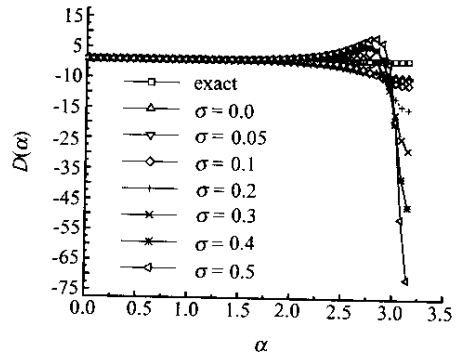


图3 $\epsilon=0$ 时群速度 D 随 α 的变化曲线

Fig.3 The curve of D varying with α when $\epsilon=0$

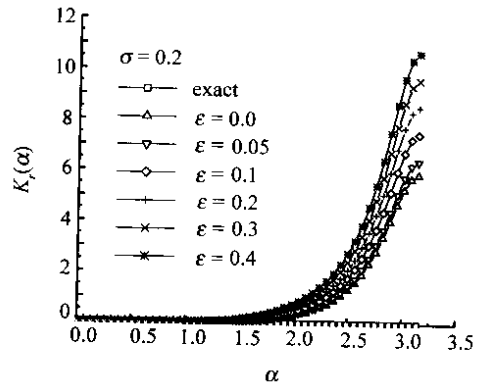


图4 引入耗散项时 K_r 随 α 的变化曲线

Fig.4 The curve of K_r varying with α when $\epsilon \neq 0$

在实际计算中，为了使激波附近的解具有较

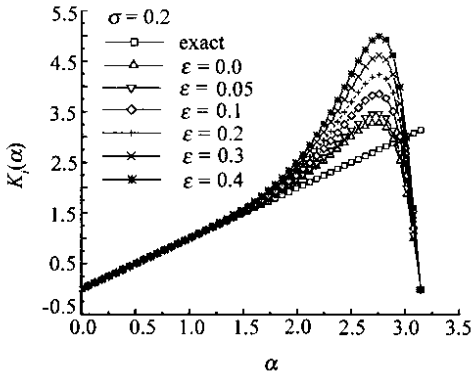


图 5 引入耗散项时 K_r 随 α 的变化曲线
 Fig.5 The curve of K_r varying with α when $\epsilon \neq 0$

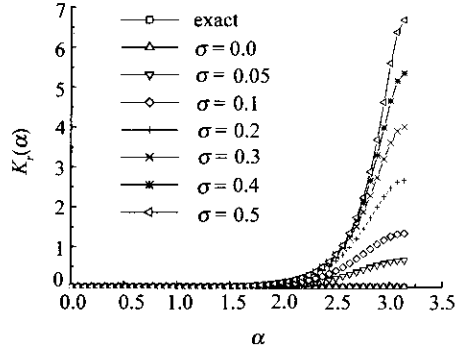


图 7 $\epsilon=0$ 时变点处的 K_r 随 α 的变化曲线
 Fig.7 The curve of K_r varying with α when $\epsilon=0$

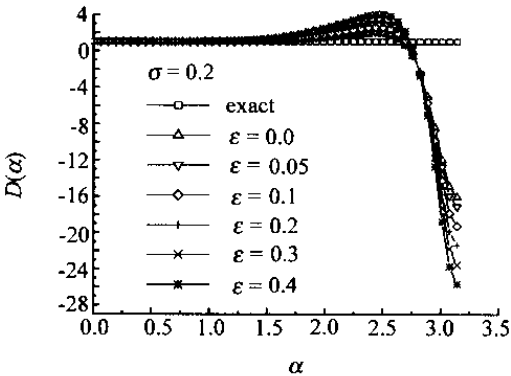


图 6 引入耗散项时群速度 D 随 α 的变化曲线
 Fig.6 The curve of D varying with α when $\epsilon \neq 0$

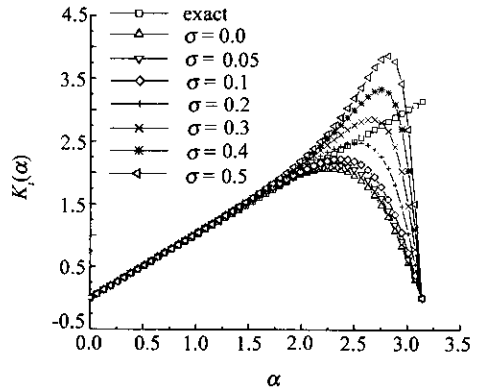


图 8 $\epsilon=0$ 时变点处的 K_r 随 α 的变化曲线
 Fig.8 The curve of K_r varying with α when $\epsilon=0$

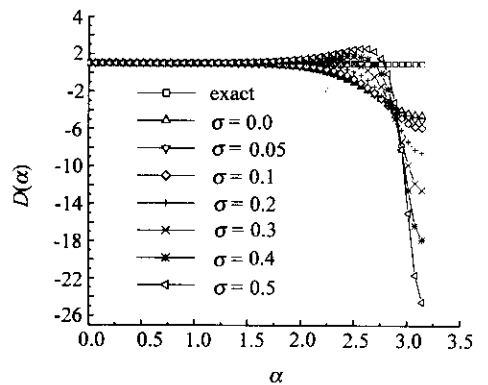


图 9 $\epsilon=0$ 时变点处的群速度 D 随 α 的变化曲线
 Fig.9 The curve of D varying with α when $\epsilon=0$

好的光滑性,往往需加入耗散项,以增加格式的耗散。为了说明问题,在此仅讨论 $\sigma = 0.2$ 的情况下,随参数 ϵ 的不同数值解的行为所发生的变化。

图 4~图 6 说明:随参数 ϵ 值的增加,高波数对应的 $K_r(\alpha)$ 在增长,即格式的耗散性有所增加。对比图 1~图 3 和图 4~图 6,进一步知道对于适当的 ϵ 值,格式的精度并没有受到影响,却能使难以控制的高波数对应的 $K_r(\alpha)$ 有所增加,从而更好地抑制了它们的幅值。

进而再分析在极值点和拐点附近数值解的行为。同样可求出对应于(15)式的 $K_r(\alpha)$, $K_i(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$, 分别给出在不同 σ 和 ϵ 情况下的 $K_r(\alpha)$, $K_i(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 随 α 的变化曲线,并与对应的准确解进行比较。图 7~图 9 分别给出了在 $\epsilon=0$ 时,在不同 σ 取值条件下, $K_r(\alpha)$, $K_i(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 随 α 的变

化曲线。图 10~图 12 则分别给出了在 $\sigma = 0.2$ 时,在不同 ϵ 取值条件下, $K_r(\alpha)$, $K_i(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$ 随 α 的变化曲线。

对比图 4~图 6 和图 10~图 12,分析可知:在变号点附近,格式有着很好逼近精度的波数的范围减小了,即格式的精度降低了,同时还说明格式

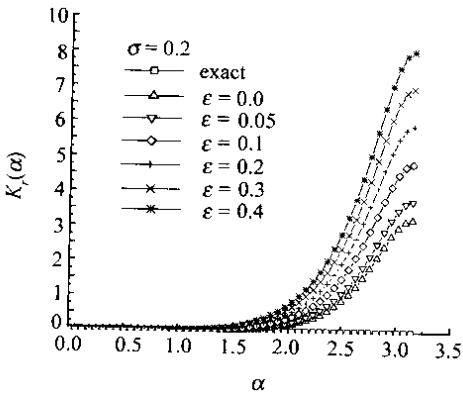


图 10 引入耗散项时变点处的 K_r 随 α 的变化曲线

Fig. 10 The curve of K_r varying with α when $\epsilon \neq 0$

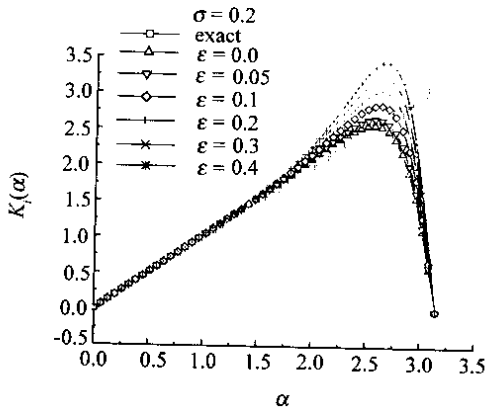


图 11 引入耗散项时变点处的 K_i 随 α 的变化曲线

Fig. 11 The curve of K_i varying with α when $\epsilon \neq 0$

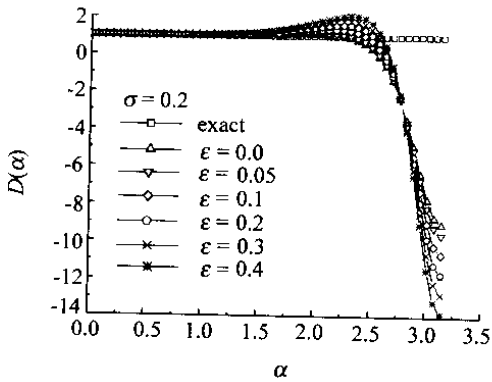


图 12 引入耗散项时, 变点处的群速度 D 随 α 的变化曲线

Fig. 12 The curve of D varying with α when $\epsilon \neq 0$

(3)和(5)中耗散项的引入,并没有影响到精度,却能更好地抑制高波数的幅值,达到改善激波数值解的目的。

进一步从所构造的格式可以看出,该格式的精度较高,在一般区域具有六阶精度(在极值点和拐点附近降为五阶精度),且所需网格基架点小

(只有五个点)。通常的 TVD 格式在一般区域只具有二阶精度(在极值点和拐点附近降成一阶精度),但也需五个基架点。后面的算例可进一步证明本文方法对激波有较强的捕捉能力。

5 算例

为了验证上文所构造的差分格式是一种具有高精度的,能够提高激波附近数值解的分辨率的格式,将在这一节中给出一些典型算例。首先简要说明一下求解一维欧拉方程的数值方法。在时间方向上采用三步三阶精度的 Runge-Kutta 方法。在空间上,先对流通矢量进行 Steger-Warming 分裂^[7],再利用式(5)求解一阶导数。

5.1 SOD 模型的计算

求解一维的欧拉方程。计算区域 $x \in [0, 1]$, 初始条件为:在区域 $[0, 0.5]$, $p = 1, \rho = 1, u = 0$; 在区域 $[0.5, 1]$, $p = 0.1, \rho = 0.125, u = 0$ 。计算网格点 $N = 100$ 。图 13~图 15 给出了在 $t = 0.14$ 时刻压力、密度以及速度的分布。通过与标准的 SOD 解进行比较,可以看出,在激波和接触间断

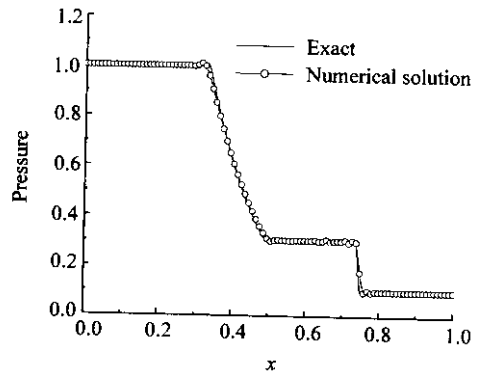


图 13 SOD 模型的压力分布

Fig. 13 The curve of pressure of SOD model

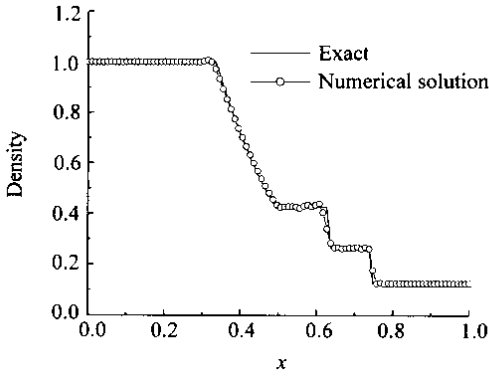


图 14 SOD 模型的密度分布

Fig. 14 The curve of density of SOD model

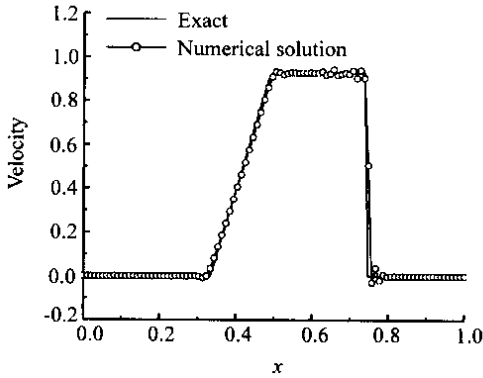


图 15 SOD 模型的速度分布

Fig. 15 The curve of velocity of SOD model

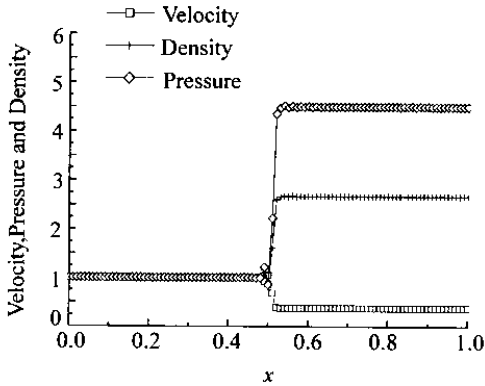


图 16 对 $Ma = 2.0$ 时的定常激波解

Fig. 16 The solutions of the steady shock at $Ma = 2.0$

附近压力和密度的分辨率是很好的。

5.2 一维定常激波解的计算

同样是对一维欧拉方程进行计算。求解域 $x \in [0, 1]$ 设 $f = \rho, u, T$, 则初始条件为: 在 $x \in [0, 0.45]$ 区间, $f =$ 均匀来流; 在 $x \in [0.45, 0.55]$

区间 $f =$ 线性插值; 在 $x \in [0.55, 1]$ 区间 $f =$

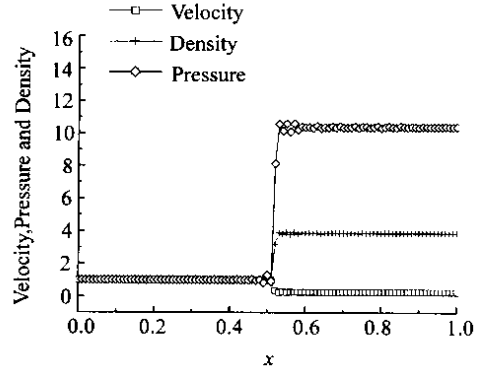


图 17 对 $Ma = 3.0$ 时的定常激波解

Fig. 17 The solutions of the steady shock at $Ma = 3.0$

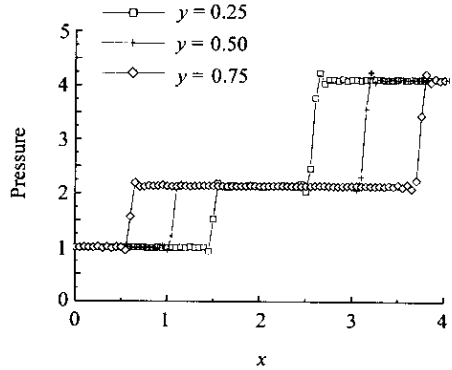


图 18 二维激波反射问题 $y = 0.25, 0.5, 0.75$ 时的压力分布

Fig. 18 The distribution of pressure at $y = 0.25, 0.5, 0.75$ for the 2-D shock reflection

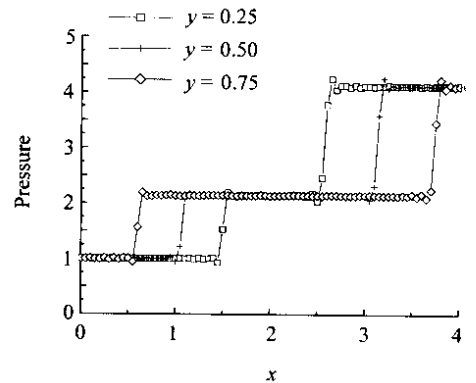


图 19 二维激波反射问题 $y = 0.25, 0.5, 0.75$ 时的密度分布

Fig. 19 The distribution of density at $y = 0.25, 0.5, 0.75$ for the 2-D shock reflection

利用 R-H 关系式。计算网格点 $N = 101$ 。图 16 ~

图 17 分别给出了 $Ma_\infty = 2.0$ 和 $Ma_\infty = 3.0$ 时的计算结果。其中图中所示的压力分布表示的是压力比 p/P_∞ 。对比可知, $Ma_\infty = 3.0$ 时的压力比是比较大的。

5.3 二维激波反射问题

求解二维的欧拉方程。计算域 $x \in [0, 4], y \in [0, 1]$, 激波入射角取 $\theta = 29^\circ$, 来流的马赫数 $Ma_\infty = 2.9$, 计算网格 $x \times y = 101 \times 51$ 。图 18 和图 19 分别给出了 $y = 0.25, 0.50, 0.75$ 时压力和密度随 x 的变化曲线。可见, 本文的格式对于激波的分辨率是很好的。

6 结 论

本文利用群速度直接控制的方法构造了具有六阶精度的紧致型格式。该方法有着精度高, 所需网格基架点少, 对激波捕捉能力强和应用简便的优点。

参考文献:

- [1] 傅德薰. 流体力学数值模拟[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.
- [2] 傅德薰, 马延文. 高精度差分格式及多尺度流场特性的数值模拟[J]. 空气动力学学报, 1998, 16(1): 24-35.
- [3] 马延文, 傅德薰. 计算空气动力学中一个新的激波捕捉法——耗散比拟法[J]. 中国科学(A辑), 1992(3): 263-271.
- [4] FU De-xun, MA Yan-wen, Kobayashi T, Taniguchi N. Nonphysical Oscillations in Numerical Solutions-Reason and Improvement[J]. Computational Fluid Dynamics Journal, 1996, 4(4): 427-450.
- [5] 马延文, 傅德薰. 群速度直接控制四阶迎风紧致格式[J]. 中国科学(A辑), 2001, 31(6): 554-561.
- [6] 王强, 傅德薰, 马延文. 平面可压基频涡卷非线性演化行为数值研究[J]. 力学学报, 2001, 33(1): 1-10.
- [7] 傅德薰. 计算空气动力学[M]. 北京: 宇航出版社, 1994.