

文章编号:1672-3961(2006)02-0122-03

# 一种修正的莫尔-库仑本构模型及其应用

崔新壮<sup>1,2</sup>, 金青<sup>1</sup>, 丁桦<sup>2</sup>

(1. 山东大学 土建与水利学院, 山东 济南 250061; 2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

**摘要:**莫尔-库仑本构模型是理想弹塑性的,只考虑了强度随围压的变化,但没有考虑弹性模量随围压和应力水平的变化情况,这不符合地质材料的实际特性.借助于邓肯-张非线性弹性模型对切线模量的处理方法,对M-C模型中的弹性模量进行了修正.修正以后,弹性阶段的应力-应变曲线将表现为双曲线.为了将该修正模型写进FLAC<sup>3D</sup>程序,特编制了前处理程序,并用来对刚性桩的横向承载力进行了数值分析.因为该模型没有对卸载模量重新定义,所以该模型较适合于持续加载的情况.

**关键词:**莫尔-库仑模型;邓肯-张模型;模型修正

**中图分类号:**TU452

**文献标识码:**A

## A modified Mohr-Coulomb constitutive model and its application

CUI Xin-zhuang<sup>1,2</sup>, JIN Qing<sup>1</sup>, DING Hua<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** Mohr-Coulomb model is a perfect elastoplastic model. It only considers the variation of material strength with lateral compressive stress, while ignoring the variation of elastic modulus with lateral compressive stress and stress level, which doesn't reflect the true characteristic of geological material. The elasticity modulus in Mohr-Coulomb model was modified by employing the processing method of tangential modulus in Duncan-Chang nonlinear model. In the modified model, the stress-strain curve in the elastic phrase behaves as hyperbola. In order to embed the modified model in FLAC<sup>3D</sup>, a preprocessing program was written and was used to analyze the traverse bearing capacity of rigid piles numerically. Because the unloading modulus in the modified model isn't defined renewedly, it only fits the case of persisting loading well.

**Key words:** Mohr-Coulomb model; Duncan-Chang model; model modification

## 0 引言

莫尔-库仑本构模型是理想弹塑性的,它考虑了强度随围压的变化,在主应力空间内其屈服面为一不规则的六面锥.该模型被广泛用来对岩土工程问题进行数值分析.但莫尔-库仑本构模型没有考虑弹性模量

随围压的变化情况,这不符合地质材料的实际特性,使得它在计算变形与位移时有很大出入.本文将借用邓肯-张非线性弹性模型<sup>[1]</sup>对弹性模量的处理方法,来对莫尔-库仑模型进行修正,以便得到一种更能反映地质材料特性的理想弹塑性本构模型.并将该模型与目前常用岩土工程差分计算程序FLAC3D(Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions)相结合,对

收稿日期:2004-09-02

基金项目:国家973项目(2002CB412706)和国家自然科学基金项目(10372104)

作者简介:崔新壮(1974-),男,山东寿光人,中国科学院力学研究所工程力学博士,目前主要从事桩基工程和岩土力学方面的研究.

E-mail: cuixz@sdu.edu.cn

刚性桩横向受载问题进行数值分析.

### 1 修正的莫尔-库仑模型

邓肯-张非线性弹性模型根据三轴试验来确定材料的弹性模量,能较好的反映实际情况,但它毕竟是一种弹性模型.本文将借用邓肯-张非线性弹性模型对弹性模量的处理方法,来对莫尔-库仑模型进行修正,以便得到一种更接近实际的弹塑性模型.

由常规三轴压缩试验所得的  $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \epsilon_a$  曲线一般如图 1 所示,  $a$  为轴向应变. Kondner<sup>[2]</sup> 建议用双曲线来表示  $\sigma_1 - \sigma_3 \sim \epsilon_a$  曲线,即:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{a}{a + b \epsilon_a} \quad (1)$$

上式中:  $a, b$  为试验常数.可将上式改写成:

$$\frac{a}{\sigma_1 - \sigma_3} = a + b \epsilon_a \quad (2)$$

上式可用图 2 来描述.由式(2)知,  $a$  为  $\epsilon_a = 0$  对应的起始弹性模量,  $b$  为  $\sigma_1 - \sigma_3 = a$  对应的偏差应力极限值  $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$  的倒数.两个试验常数极易从图 2 直接量得.

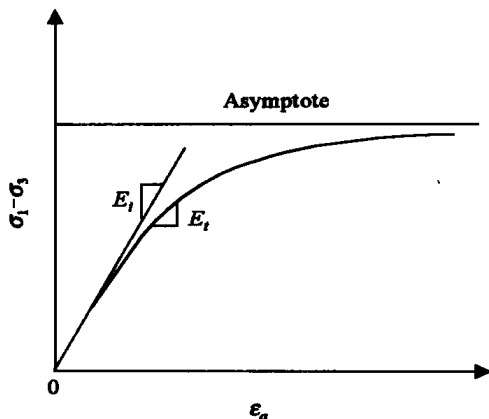


图 1 双曲线型应力-应变曲线  
Fig. 1 The hyperbolic stress-strain diagram

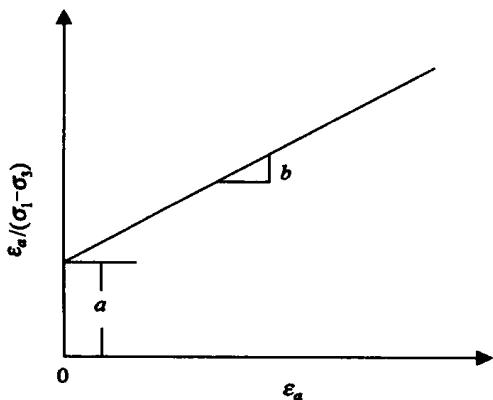


图 2 a 和 b 的意义  
Fig. 2 Meanings of a and b

令试样破坏时的实际偏差应力为  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$  值总是比  $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$  小.令  $R_f = (\sigma_1 - \sigma_3)_f / (\sigma_1 - \sigma_3)_u$ ,  $R_f$  称为破坏比,其值一般在 0.75 ~ 1.00 之间.

由莫尔-库仑模型破坏准则可得:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \phi + 2 \sigma_3 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3)$$

上式中:  $c$  和  $\phi$  分别为土的粘聚力和内摩擦角.

由式(3),  $b$  可写为:

$$b = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_u} = \frac{R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} = \frac{R_f (1 - \sin \phi)}{2c \cos \phi + 2 \sigma_3 \sin \phi} \quad (4)$$

应力-应变曲线的切线模量  $E_t$  为:

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \epsilon_a} = \frac{a}{(a + b \epsilon_a)^2} \quad (5)$$

由式(1), (4) 及式(5)可得:

$$E_t = \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \sin \phi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \phi + 2 \sigma_3 \sin \phi} \right]^2 E_i \quad (6)$$

对起始弹性模量,建议采用下式表达:

$$E_i = K P_a \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (7)$$

上式中:  $P_a$  为大气压力;  $K, n$  是试验常数,对于不同的土类,  $K$  值可能小于 100,也可能大于 3500,  $n$  值一般在 0.2 ~ 1.0 间<sup>[3]</sup>.

式(6), (7) 反映了弹性模量随围压和应力水平的变化.

对修正的莫尔-库仑模型,由式(3), (6) 知,在进入塑性阶段后,卸载弹性模量为  $(1 - R_f) E_t$ .另外,因为没有对弹性阶段的卸载弹性模量重新进行定义,所以卸载弹性模量总与加载弹性模量相同.这比较适合解决持续加载问题.

在进入塑性阶段后,塑性流动准则为:

$$d \epsilon_{ij}^p = \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{if } F = 0 \text{ and } dF = 0, \\ 0, & \text{if } F < 0, \text{ or if } F = 0 \text{ and } dF < 0. \end{cases} \quad (8)$$

上式中:  $d \epsilon_{ij}^p$  是塑性应变增量;  $\lambda$  是正的标量比例因子;  $F$  为莫尔-库仑屈服函数;  $Q$  为势函数.

在商用软件 FLAC<sup>3D</sup> 中  $Q$  的函数形式与  $F$  相同,为:

$$Q = \sigma_1 \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - \sigma_3 + \text{常数} \quad (9)$$

上式中:  $\phi$  为剪胀角,表示了土的剪胀特性.  $\phi = 0$  表示塑性变形时土无剪胀;  $\phi = \phi$  时,塑性流动规律是

正交的,即相关的;当  $\phi$  时,塑性流动规律是非正交的,即非相关的<sup>[4]</sup>.

图3示出了邓肯-张模型、莫尔-库仑模型及修正的莫尔-库仑模型三者之间关系.可见修正的莫尔-库仑模型在弹性段与邓肯-张模型相同,在塑性段与莫尔-库仑模型相同.

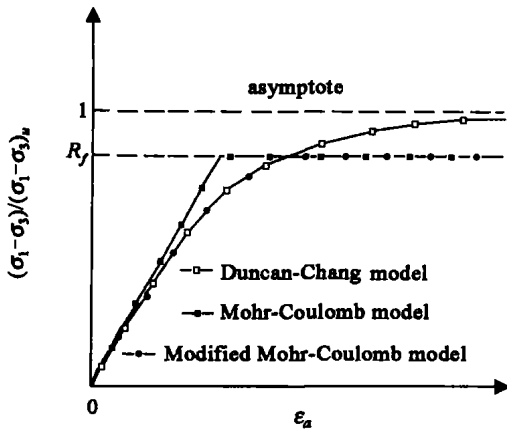


图3 3个模型之间的关系  
Fig. 3 The relation among three models

### 2 修正莫尔-库仑模型的应用

为了将修正的莫尔-库仑模型植入 FLAC<sup>3D</sup>中,

基于 FISH 语言编制了一段前处理程序,并用它对桩头固定刚性桩的横向受载问题进行了分析.刚性桩横向受载问题是对称问题.计算中取圆桩外径为 6 cm,埋深为 0.3 m,加载高度为 0.03 m;取土的容重  $\gamma = 17000 \text{ N/m}^3$ ,  $c = 13 \text{ kPa}$ ,  $\phi = 23^\circ$ ,  $\psi = 23^\circ$ ,泊松比为 0.3,  $K = 363.8$ ,  $n = 0.226$ .计算时控制桩头节点的横向速度,即采用刚性加载方式.

图4所示是桩头处的载荷-位移曲线.而图5所示是当  $P = 4200 \text{ N}$  时对称面上的弹性模量云纹图.可以发现,由于土体内各处的应力分布不同致使各处的弹性模量明显不同.这种现象更接近于真实情况.

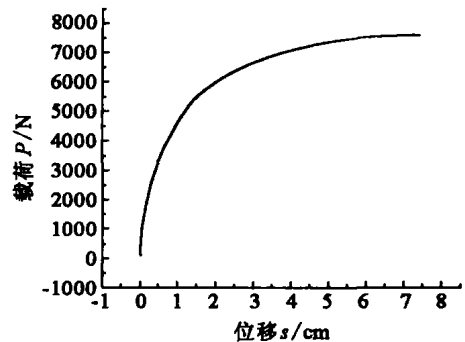


图4 桩的载荷-位移曲线  
Fig. 4 The load-displacement curve of pile

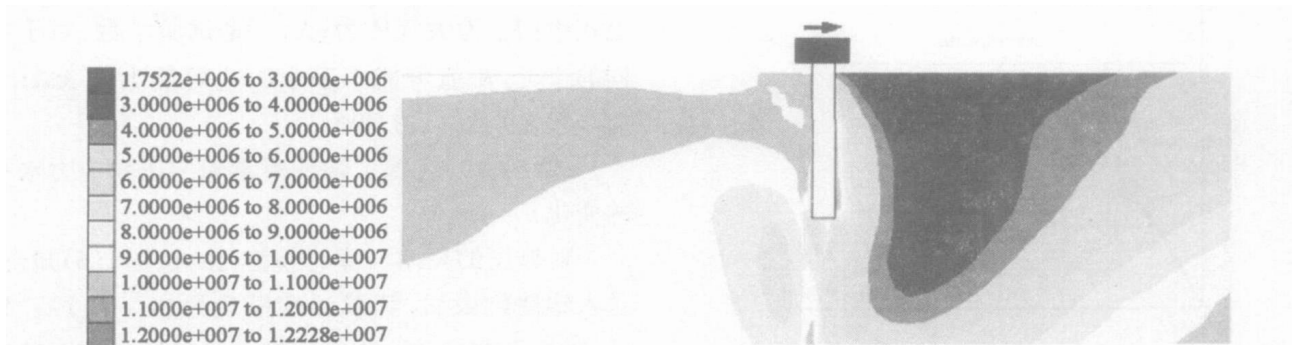


图5 弹性模量在土体对称面上的云纹图  
Fig. 5 The moir étopography of the elastic modulus in symmetric plane in soil mass

### 3 结论

本文借助于邓肯-张非线性弹性模型中对切线模量的处理方法,对莫尔-库仑模型中的弹性模量进行了修正.为了将该修正模型写进 FLAC<sup>3D</sup>程序,用 FISH 语言编制了前处理程序.作为算例,用它对桩头固定刚性桩与土的相互作用问题进行了数值分析,表明该修正的莫尔-库仑模型是一种更能反映地质材料特性的弹塑性本构模型.

参考文献:

[1] DUNCAN J M, CHANG C Y. Nonlinear analysis of stress and

strain in soils[J]. Soil Mech and Found, 1970, 96(SM5): 1629-1653.

[2] KONDNER R L. Hyperbolic stress-strain response of cohesive soils[J]. Soil Mech and Found, 1963, 89(1): 115-143.

[3] 黄文熙. 土的弹塑性应力应变模型理论[J]. 岩土力学, 1979, 1(2): 14-37.

HUANG Wen-xi. Elastoplastic stress-strain model theories of soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 1979, 1(2): 14-37.

[4] GERBALT M, POLIAKOV A N B, DAIGNIERES M. Prediction of faulting from the theories of elasticity and plasticity: what are the limits[J]. Journal of Structural Geology, 1998, 20(273): 301-320.

(编辑:孙广增)