

二维切口问题完备特征解的研究现状与进展*

徐永君 袁 驹* 柳春图

中国科学院力学研究所, 北京 100030
* 清华大学土木工程系, 北京 100084

摘 要 简要回顾和介绍了文献中常见的几种求解二维切口问题特征根的方法, 评述这些方法的特点及其求解范围. 重点介绍了在求解二维切口问题完备特征根方面的一些进展, 包括特征根的求解方法、特征根的重根探讨以及相应的特征函数计算, 这一问题基本上得到了解决. 为基于特征展开研究二维断裂问题打下了基础.

关键词 二维切口问题, 特征展开, 特征根, 重根, 特征函数

1 引 言

Williams^[1,2] 利用特征函数法建立了 V 型切口问题的特征方程, 指出应力在切口尖端处奇异性的强弱与切口张角有关, Hartranft 和 Sih^[3] 给出了三维裂纹问题的特征方程, 柳春图^[4] 给出了含裂纹的 Reissner 板广义位移和广义应力的特征展开式. 许多文献采用不同的算法对各种问题的应力强度因子分析计算, 文 [5~12] 采用边界配置法, 文 [13, 14] 用边界积分方程法求解了带 V 型切口梁的弯曲问题, 文 [15, 16] 提出了互等功围线积分法并对应力强度因子进行近似分析, 1982 年龙驭球^[17] 等提出了分区有限元法. 徐永君和袁驹^[18,19] 提出了余能积分提取法和正交积分提取法, 并将分区原理引入有限元线法用以计算应力强度因子. 还有许多非常有效的数值方法, 诸如 J 积分、保角变换、积分变换等, 这里不再一一列出.

对于大多数数值方法, 若要有效地计算应力强度因子, 都要在不同程度上直接或间接地利用问题的特征解. 文 [1] 和 [20] 从单材料平面切口问题的特征方程入手, 解析地对第一阶特征根的分布作了讨论. 文 [21] 从单材料平面问题复势出发, 讨论了特征值随切口角度的变化规律, 指出了高阶特征值曲线的分支现象和临界角概念. 文 [22] 利用逆幂迭代法研制了高效、高速、高精度的常微分方程 (ordinary differential equation, 简称 ODE) 特征值问题的求解器解法, 但仅对实特征根有效. Müller 法^[23] 对于一般实和复特征根的求解均能快速收敛, 文 [24] 对单材料平面切口问题进行了计算, 文 [25] 对双材料平面切口问题进行了计算, 取得了很好的效果, 但不能保证完备性 (依序无漏根地收敛). 文 [26, 27] 利用嵌入法求解矩阵特征根问题, 表明嵌入法是一种实复通用的方法, 特别是在复平面区域内判断特征根个数方面具有较大的优势. 文 [28] 利用有限元特征根法求解了具有相同角度的双材料平面切口问题. 基于 Williams 特征展开理论研究二维断裂问题和计算应力强度因子的文献较多, 但对所依赖的特征根的求解几乎没有

收稿日期: 1998-09-02, 修回日期: 1999-05-19

* 国家自然科学基金和中国博士后科学基金资助项目

专门文献,特别是系统地研究通用地(即对任意多材料、任意切口张角、任意切口边界条件)、完备地和高效地计算二维断裂问题特征根方面的文献.作者在二维断裂问题特征根求解方面作了一些工作,文[29]从特征方程入手,将双材料反平面和单材料平面问题的各阶特征根分布区间给出,并利用二分法进行求解.文[30,31]将反平面断裂问题对应的特征值问题纳入 Hilbert 空间,证明其特征值都是实根并提出了高效快速完备求解的超逆幂迭代法.文[32]基于嵌入法,以常微分方程求解器 COLSYS^[33~35]为支撑软件,结合等价 ODE 积分技巧^[36],研究了切口问题特征解的完备求解方法,精确有效且通用.嵌入法对断裂问题特征解的定界和求解具有很大的优势,但材料数目增多和材料特性差异增大,求解效率降低. Müller 法具有精度高、收敛快、易于实施等优点,但不能保证不漏根.文[37]证明了联合求解是一种很好的改进.以文[3]的推广幂级数特征展开式为基础,文[38]从基本方程出发推证了 Reissner 板的特征根等价于反平面和平面切口问题组合,可直接调用已有程序或直接引用相应的已有特征根.文[39]从反平面和平面切口问题的边界条件和交界连续条件所对应的特征矩阵入手,确定了可能的最大重根数.文[40]进一步给出反平面、平面和 Reissner 板问题对应特征函数的计算方法.

2 逆幂迭代法、嵌入法、Müller 法的基本原理

2.1 逆幂迭代法^[22]

结构分析中,许多特征根问题都可化为常微分方程(组)形式

$$[L]\{x\} = \lambda[M]\{u(x)\}, \quad a < x < b \quad (1a)$$

边界条件 (boundary conditions, BCs)

$$[B_a]\{u(a)\} = \{0\}, \quad [B_b]\{u(b)\} = \{0\} \quad (1b)$$

其中 λ 为问题特征根, $\{u\}$ 为相应的特征函数, $[L]$, $[M]$, $[B_a]$ 和 $[B_b]$ 为相应的线性常微分方程算子,大多数问题中 $[L]$ 具有自伴随性、正定性和非奇异性. λ 的 Rayleigh 商表示为

$$\lambda = \int_a^b \{u\}^T [L] \{u\} dx / \int_a^b \{u\}^T [M] \{u\} dx \quad (2)$$

特征根求解的逆幂迭代格式为

$$\{\tilde{u}\}^{(k)} = [L]^{-1}[M]\{u\}^{(k-1)}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{1}{\|\tilde{u}^{(k)}\|_M}, \quad \{u\}^{(k)} = \frac{\{\tilde{u}\}^{(k)}}{\|\tilde{u}^{(k)}\|_M}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

由于通常 $[L]^{-1}$ 不能直接给出,因此 $\{\tilde{u}\}^{(k)}$ 可以利用常微分方程求解器从下式解出

$$\left. \begin{aligned} [L]\{\tilde{u}\}^{(k)} &= [M]\{u\}^{(k-1)}, \quad a < x < b \\ [B_a]\{\tilde{u}(a)\}^{(k)} &= 0 \\ [B_b]\{\tilde{u}(b)\}^{(k)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

给出适当的初始特征函数,结合特征根移位技巧和特征函数过滤技术就可求得完备特征解.

逆幂迭代法的优点是能够完备求解,缺点是只能求解实特征根问题.

2.2 嵌入法^[26,27]

对于复函数 $f(\lambda)$,若在复平面上给定的一条简单闭曲线 Γ 内无奇点,则有

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \quad (5)$$

在简单闭曲线 Γ 内若存在 K 个特征根 (重根按重数计算), 特征方程可表示为

$$B(\lambda) = \tilde{B}(\lambda) \prod (\lambda - \lambda_i)^{k_i} = 0 \quad (6)$$

其中 k_i 为 λ_i 的重数. 利用留数定理 (或 Cauchy 积分公式) 可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n \frac{dB(\lambda)/d\lambda}{B(\lambda)} d\lambda = \begin{cases} \sum k_i = K & n = 0 \\ \sum k_i \lambda_i^n & n \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

这样取 K 个不同的 n 值进行积分, 求解复函数零点问题转化为求解 K 个非线性代数方程问题.

本法实复通用且具有特征根定界能力, 缺点是特征方程表达式及其导数必须易于给出.

2.3 Müller 法^[23]

如图 1 所示, 对于复函数 $f(\lambda)$ 的零点问题, 用任意 3 点 $\lambda_i, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-2}$ 作为初值进行迭代, 每一步都有 3 个点唯一确定的一条抛物线 $y = p(\lambda)$

$$p(\lambda) = f(\lambda_i) + (\lambda - \lambda_i)c_i + f[\lambda_i, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-2}](\lambda - \lambda_i)^2 \quad (8)$$

其中 $c_i = f[\lambda_i, \lambda_{i-1}] + f[\lambda_i, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-2}](\lambda_i - \lambda_{i-1})$, 抛物线的两个零点 α 满足如下关系式

$$\alpha - \lambda_i = \frac{-2f(\lambda_i)}{c_i \pm \sqrt{c_i^2 - 4f(\lambda_i)f[\lambda_i, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-2}]}} \quad (9)$$

选取使得式 (9) 分母绝对值大的符号, 令式 (9) 的右端项为 h_{i+1} , 则新的比较好的近似零点 λ_{i+1} 为

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + h_{i+1} \quad (10)$$

以 $\lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}$ 作为新初始值重新进行迭代直到满足用户给定的误差限为止.

Müller 法是求解复变量解析函数零点的有效方法, 它把两点插值的割线法推广到 3 点. 它的最大改进是对实根和复根的求解效果同样理想. 缺点是无法保证完备性.

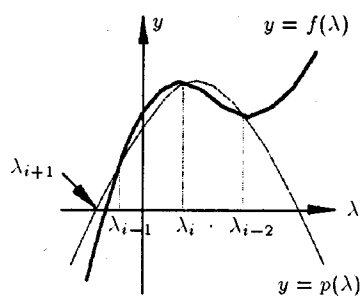


图 1 Müller 法示意图

3 反平面切口问题和平面切口问题

3.1 反平面切口问题

考虑图 2 所示多 (N) 种材料不计体力反平面切口问题, 设特征根 λ 对应的第 j 种材料域内位移的 Williams 特征展开项为 $w_j = r^\lambda f_j(\theta)$, 由特征函数表示的平衡方程为

$$f_j'' + \lambda^2 f_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

应力自由 (stress free, 简记为 F) 和位移给定 (clamped, 简记为 C) 边界对应的切口边界条件为

$$\left. \begin{aligned} F: f'_1(\theta_1) = 0, f'_N(\theta_{N+1}) = 0 \\ C: f_1(\theta_1) = 0, f_N(\theta_{N+1}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

相应的交界位移连续和应力平衡条件为

$$\left. \begin{aligned} f_j(\theta_{j+1}) = f_{j+1}(\theta_{j+1}) \\ G_j f'_j(\theta_{j+1}) = G_{j+1} f'_{j+1}(\theta_{j+1}) \\ j = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

特征值 λ 所对应的特征函数 $f_j(\theta)$ 的通解为

$$\left. \begin{aligned} f_j(\theta) = A_j \cos(\lambda\theta) + B_j \sin(\lambda\theta) \\ j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

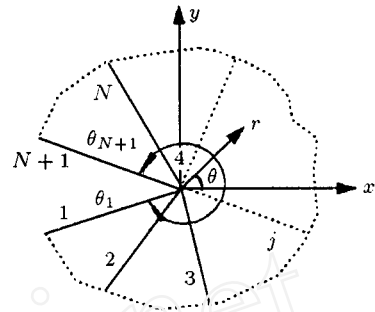


图 2 N 种材料切口示意图

3.2 平面切口问题

图 2 所示多 (N) 种材料不计体力的平面切口问题, 极坐标下的基本方程为

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (14)$$

对应的切口两沿边界条件为

$$F: \sigma_\theta |_{\theta=\theta_j} = 0, \quad \sigma_{r\theta} |_{\theta=\theta_j} = 0, \quad C: u_r |_{\theta=\theta_j} = 0, \quad u_\theta |_{\theta=\theta_j} = 0, \quad j = 1, N+1 \quad (15a)$$

交界线上的应力平衡和位移连续性条件分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^{j-1} - \sigma_\theta^j |_{\theta=\theta_j} = 0, \quad \tau_\theta^{j-1} - \tau_\theta^j |_{\theta=\theta_j} = 0 \\ u_r^{j-1} - u_r^j |_{\theta=\theta_j} = 0, \quad u_\theta^{j-1} - u_\theta^j |_{\theta=\theta_j} = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

第 j 种材料域内引入应力函数 $\phi_j(r, \theta)$, 设特征根 λ 对应的 Williams 特征展开项为

$$\phi_j(r, \theta) = r^{\lambda+1} F_j(\theta), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

相应的应力场和位移场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rrj} = r^{\lambda-1} [F_j'' + (\lambda+1)F_j], \quad \sigma_{\theta\theta j} = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda+1)F_j], \quad \sigma_{r\theta j} = r^{\lambda-1} [-\lambda F_j'] \\ u_{rj} = r^\lambda \frac{(1-\nu_j\lambda)(1+\lambda)F_j(\theta) + F_j''(\theta)}{\lambda E_j} \\ u_{\theta j} = r^\lambda \frac{(1+\lambda - (1-\lambda)\lambda\nu_j + 2\lambda^2)F_j'(\theta) + F_j'''(\theta)}{\lambda(1-\lambda)E_j} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由于应力函数 $\phi_j(r, \theta)$ 是双调和方程的通解, 所以 $F_j(\theta)$ 应为下列形式

$$F_j(\theta) = A_j \sin(\lambda+1)\theta + B_j \cos(\lambda+1)\theta + C_j \sin(\lambda-1)\theta + D_j \cos(\lambda-1)\theta \quad (18)$$

多材料问题很难将特征方程显式表达 (从特征方程入手求解可参见文 [29]). 反平面问题和平面问题特征展开为单级数展开且式 (13) 和式 (18) 直接就是其特征函数的基本形式.

4 Reissner 型板壳切口问题

4.1 Reissner 型板

考虑图 2 所示的多 (N) 种材料不计体力平板弯曲切口问题, 三广义位移^[4]的特征展开式

分别为如下双级数

$$\psi_r^j = \sum_i \sum_n r^{\lambda_i+n} a_{ni}^j(\theta), \quad \psi_\theta^j = \sum_i \sum_n r^{\lambda_i+n} b_{ni}^j(\theta), \quad w^j = \sum_i \sum_n r^{\lambda_i+n} c_{ni}^j(\theta) \quad (19)$$

对于固定的 n 关于 r^{λ^*-2} 的基本方程可表示为

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} D_j \left((\lambda^{*2} - 1)a_n^j + \frac{1-\nu_j}{2} a_n^{j''} + \left(\frac{1+\nu_j}{2} \lambda^* - \frac{3-\nu_j}{2} \right) b_n^{j'} \right) + \\ C_j ((\lambda^* - 1)c_{n-1}^j - a_{n-2}^j) = 0 \\ D_j \left(\frac{1-\nu_j}{2} (\lambda^{*2} - 1)b_n^j + b_n^{j''} + \left(\frac{1+\nu_j}{2} \lambda^* + \frac{3-\nu_j}{2} \right) a_n^{j'} \right) + \\ C_j (c_{n-1}^{j'} - b_{n-2}^j) = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

$$(ii) \quad c_n^{j''} + \lambda^{*2} c_n^j - \lambda^* a_{n-1}^j - b_{n-1}^{j'} = 0, \quad \lambda^* = \lambda + n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

式中 ν_j 为泊桑比, D_j 为弯曲刚度 ($D_j = E_j h^3 / 12(1 - \nu_j^2)$, E_j 为弹性模量), C_j 为剪切刚度 ($C_j = 5G_j h / 6$, G_j 为剪切模量). 当 $n = 0$ 时, (i) 和 (ii) 解耦, 退化为反平面和平面两类切口问题的组合^[37~39,41]. 特征根求解可以用相应问题来代替. 式 (20) 的通解分别为

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} a_n^j(\theta) = A_{n1}^j \cos(\lambda^* + 1)\theta + A_{n2}^j \sin(\lambda^* + 1)\theta + A_{n3}^j \cos(\lambda^* - 1)\theta + \\ A_{n4}^j \sin(\lambda^* - 1)\theta \\ b_n^j(\theta) = -A_{n1}^j \sin(\lambda^* + 1)\theta + A_{n2}^j \cos(\lambda^* + 1)\theta - \rho_j A_{n3}^j \sin(\lambda^* - 1)\theta + \\ \rho_j A_{n4}^j \cos(\lambda^* - 1)\theta \end{array} \right. \quad (21)$$

$$(ii) \quad C_{n1}^j(\theta) = D_{n1}^j \cos \lambda^* \theta + D_{n2}^j \sin \lambda^* \theta$$

其中 $\rho_j = ((1 + \nu_j)\lambda^* + 3 - \nu_j) / ((1 + \nu_j)\lambda^* - (3 - \nu_j))$. 对于式 (20(ii)), 其特解可统一为

$$c_{n特}^j = \int (\lambda^* a_{n-1}^j + b_{n-1}^{j'}) \frac{\cos(\lambda^* \theta)}{\lambda^*} d\theta \sin(\lambda^* \theta) - \int (\lambda^* a_{n-1}^j + b_{n-1}^{j'}) \frac{\sin(\lambda^* \theta)}{\lambda^*} d\theta \cos(\lambda^* \theta) \quad (22)$$

当 $n = 1$ 时, 零级特征函数的特解为

$$c_{1特}^j(\theta) = \frac{(1-\nu)}{E} (C_{j0} \sin(\lambda - 1)\theta + D_{j0} \cos(\lambda - 1)\theta) \quad (23)$$

对于式 (20(i)), 由于方程太复杂而无法给出统一形式. $n = 1$ 时相应的一种形式的特解为

$$\left. \begin{array}{l} a_{1特}^j = -\frac{C_j}{D_j} \frac{D_{01}}{\lambda^*(1+\nu_j)+3-\nu_j} \cos(\lambda^* - 1)\theta - \frac{C_j}{D_j} \frac{D_{02}}{\lambda^*(1+\nu_j)+3-\nu_j} \sin(\lambda^* - 1)\theta \\ b_{1特}^j = 0 \end{array} \right\} \quad (24)$$

4.2 Reissner 扁壳

考虑如图 2 所示的多 (N) 种材料 Reissner 扁壳切口问题, 五个广义位移分别为 $u_r^j, u_\theta^j, w^j, \psi_r^j, \psi_\theta^j$, 特征展开式分别为如下双级数

$$\left. \begin{array}{l} u_r^j = \sum_i \sum_n r^{\lambda_i+n} f_{ni}^j(\theta), \quad \psi_r^j = \sum_i \sum_n r^{\lambda_i+n} a_{ni}^j(\theta) \\ u_\theta^j = \sum_i \sum_n r^{\lambda_i+n} h_{ni}^j(\theta), \quad \psi_\theta^j = \sum_i \sum_n r^{\lambda_i+n} b_{ni}^j(\theta) \\ w^j = \sum_i \sum_n r^{\lambda_i+n} c_{ni}^j(\theta) \end{array} \right\} \quad (25)$$

与 Reissner 型板弯曲特征问题的零级部分相一致, Reissner 扁壳断裂问题的特征根也可以分为两部分, 即相应平面应力问题和相应 Reissner 型板弯曲问题的组合.

Reissner 型板壳为双级数特征展开式. 反平面切口问题和平面切口问题的特征根求解类型为两种基本类型, Reissner 型板壳特征根求解可分为这两种基本类型的组合.

5 特征根的最大重根数^[40]

5.1 反平面切口问题的最大重根数

对于式 (11) 和式 (12) 描述的问题, 将式 (13) 代入式 (12b) 可得相邻两材料域对应的系数间的关系为

$$\begin{Bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{Bmatrix} = [\Delta_j] \begin{Bmatrix} A_j \\ B_j \end{Bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (26)$$

其中

$$[\Delta_j] = \begin{bmatrix} \cos(\lambda\theta_{j+1}) & -\sin(\lambda\theta_{j+1}) \\ \sin(\lambda\theta_{j+1}) & \cos(\lambda\theta_{j+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{G_j}{G_{j+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\lambda\theta_{j+1}) & \sin(\lambda\theta_{j+1}) \\ -\sin(\lambda\theta_{j+1}) & \cos(\lambda\theta_{j+1}) \end{bmatrix} \quad (27)$$

由于 $|\Delta_j| = G_j/G_{j+1} \neq 0$, 所以相邻两材料域对应的系数是一一对应的. 从而可得

$$\begin{Bmatrix} A_N \\ B_N \end{Bmatrix} = [\Delta] \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix}, \quad [\Delta] = [\Delta_{N-1}], \dots, [\Delta_2][\Delta_1] \quad (28)$$

以切口两边界均为应力自由边为例, 相对于 $[A_1, B_1]^T$ 的特征方程为

$$|M| = \left| \begin{bmatrix} [-\sin(\lambda\theta_1), \cos(\lambda\theta_1)] \\ [-\sin(\lambda\theta_{N+1}), \cos(\lambda\theta_{N+1})][\Delta] \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (29)$$

矩阵 M 的秩至少为 1, 特征函数的基础解系最大线性无关个数为 1, 即反平面切口问题的特征根不存在重根.

5.2 平面切口问题的最大重根数

将切口边界和交界条件相关的应力和位移表示为

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta_j} = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)[f_{11}^j & f_{12}^j & f_{13}^j & f_{14}^j]\{\delta_j\} \\ \sigma_{r\theta_j} = r^{\lambda-1}\lambda[f_{21}^j & f_{22}^j & f_{23}^j & f_{24}^j]\{\delta_j\} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{rj} = r^\lambda[f_{31}^j & f_{32}^j & f_{33}^j & f_{34}^j]\{\delta_j\} \\ u_{\theta j} = r^\lambda[f_{41}^j & f_{42}^j & f_{43}^j & f_{44}^j]\{\delta_j\} \end{cases} \quad (30)$$

其中 $\{\delta_j\} = [A_j \ B_j \ C_j \ D_j]^T$, f_{mn}^j ($m, n = 1, 2, 3, 4$) 可比较容易地由式 (18) 代入式 (16) 得到. 任一交界 θ_j ($j = 2, 3, \dots, N$) 的交界条件可表示为

$$[M_{j-1}]\{\delta_{j-1}\} = [M_j]\{\delta_j\}, \quad M_j = [f_{mn}^j]_{4 \times 4} \quad (31)$$

易于得到矩阵 M_j 的行列式值为

$$|M_j| = (\lambda+1) \frac{(\kappa_j+1)^2}{4G_j^2} \quad (32)$$

当 $\lambda = -1$ 时矩阵奇异, 但在求解特征根时 $\lambda = -1$ 不涉及到.

由式 (31) 可得相邻两材料域对应的系数间的关系为

$$\{\delta_{j+1}\} = [\Delta_j]\{\delta_j\} = [M_{j+1}]^{-1}[M_j]\{\delta_j\} \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (33)$$

$|\Delta_j| = ((\kappa_j + 1)^2 G_{j+1}^2) / ((\kappa_{j+1} + 1)^2 G_j^2) \neq 0$, 相邻两材料域系数一一对应. 从而可得

$$\{\delta_N\} = [\Delta]\{\delta_1\}, \quad [\Delta] = [\Delta_{N-1}], \dots, [\Delta_2][\Delta_1] \quad (34)$$

以切口两边界均为应力自由边为例, 相对于 $\{\delta_1\}$ 的特征方程为

$$|M| = \left| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} f_{11}^1 & f_{12}^1 & f_{13}^1 & f_{14}^1 \\ f_{21}^1 & f_{22}^1 & f_{23}^1 & f_{24}^1 \end{array} \right]_{\theta=\theta_1} \\ \left[\begin{array}{cccc} f_{11}^N & f_{12}^N & f_{13}^N & f_{14}^N \\ f_{21}^N & f_{22}^N & f_{23}^N & f_{24}^N \end{array} \right]_{\theta=\theta_{N+1}} \end{array} \right| [\Delta] = 0 \quad (35)$$

矩阵 M 的秩至少为 2, 可知特征函数基础解系最大线性无关个数为 2, 特征根最多存在 2 重根.

5.3 Reissner 型板壳切口问题的最大重根数

Reissner 型板壳断裂问题的特征根可分为相应的反平面和平面应力断裂问题的组合. Reissner 扁壳断裂问题的特征根可分为相应的平面问题和板弯曲问题两部分组合, 即相应的平面应力问题和反平面问题两类特征根的组合. 当平面类基本问题的特征根为重根并等于反平面类问题的特征根时为最大重根数, 所以最大可能重特征根数与问题的自由度相等, 即 Reissner 型板壳断裂问题为 3, Reissner 扁壳断裂问题为 5. 求解过程中最大的独立重特征根数为 2, 即平面应力类问题特征根可能出现的最大重根数.

6 超逆幂迭代法、等价 ODE 积分嵌入法、嵌入法和 Müller 法联合求解

6.1 超逆幂迭代法^[30,31]

对于式 (11) 和式 (12) 描述的特征值问题, 定义函数内积和其导出模为

$$(f, g) = \sum_{j=1}^N \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} G_j f_j(\theta) g_j(\theta) d\theta, \quad \|f\|_M^2 = (f, f) \quad (36)$$

再引入常微分方程算子 $D^2 = d^2(\cdot)/d\theta^2$

$$-D^2 f = \lambda^2 f, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_{N+1} \quad (37)$$

连同边界和交界条件 (式 12) 构成一标准的常微分方程特征值问题, 相应的 Rayleigh 商表达式为

$$\lambda^2 = (f', f') / (f, f) \quad (38)$$

而不同阶的特征函数间有如下正交性质

$$(f'_i, f'_j) = (f_i, f_j) = 0, \quad i \neq j \quad (39)$$

其中 f_i 为第 i 阶特征函数, 除两边界均为应力自由时算子 $(-D^2)$ 奇异, 其余均正定. 为在这种情况下克服奇异性, 对特征值作适当的移位 μ^2 , 则方程 (37) 等价地变换为

$$Lf = \lambda^* f \quad (40)$$

其中, $L = -(D^2 + \mu^2)$, $\lambda^* = (\lambda^2 - \mu^2)$, 算子 L 正定, 边界条件、特征值 λ 和特征函数 f 的性质均不变. 常规逆幂迭代法可归结为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}^{(k)} &= L^{-1} f^{(k-1)}, \quad \lambda^{*(k)} = \frac{1}{\|\tilde{f}^{(k)}\|_M} \\ \lambda^{2(k)} &= \lambda^{*(k)} + \mu^2, \quad f^{(k)} = \lambda^{*(k)} \tilde{f}^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

其中 L^{-1} 表示 L 的逆算子, 未归一化的解 $\tilde{f}^{(k)}$ 是满足条件 (12) 的如下方程的解

$$L\tilde{f}^{(k)} = f^{(k-1)}, \quad \theta_1 < \theta < \theta_{N+1} \quad (42)$$

对于一般特征值问题, 须反复求解常微分方程. 对于反平面切口问题, 其解可以显式给出 (式 (13)), 式 (42) 的解可分为齐次方程的通解加上对应于右端项 $f^{(k-1)}$ 的特解 $F_p(f^{(k-1)})$

$$\tilde{f}^{(k)} = a^{(k)} \cos \mu \theta + b^{(k)} \sin \mu \theta + F_p(f^{(k-1)}) \quad (43)$$

其中系数 $a^{(k)}$ 和 $b^{(k)}$ 可由条件 (12) 确定, 而特解可由如下的积分求得

$$F_p(f^{(k-1)}(\theta)) = \frac{\cos \mu \theta}{\mu} \int f^{(k-1)}(\theta) \sin \mu \theta d\theta - \frac{\sin \mu \theta}{\mu} \int f^{(k-1)}(\theta) \cos \mu \theta d\theta \quad (44)$$

记式 (42) 中齐次方程的通解为 $q(\mu\theta)$, 则不难得到

$$\left. \begin{aligned} k = 1: \tilde{f}^{(1)} &= q^{(1)}(\mu\theta) + \frac{\bar{f}}{\bar{\lambda}_0^2 - \mu^2} \\ k > 1: \tilde{f}^{(k)} &= q^{(k)}(\mu\theta) + \sum_{i=1}^{k-1} F_p^{k-i}(q^{(i)}(\theta)) + \frac{\bar{f}}{(\bar{\lambda}_0^2 - \mu^2)^k} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

对于前几步迭代, 不难得到特解积分的显式表达, 但仅采用上述直接积分法求特解, 项数累加使显式表达越来越困难. 为克服这一困难, 作二至三步积分后, 作一适当移位 μ_k^2 , 即用 $L_k = -(D + \mu_k^2)$ 代替算子 L , 且 $\lambda^{2(k)} = \lambda^* + \mu_k^2$. 第 k 次迭代时通解为

$$q^{(k-1)}(\theta) = a^{(k-1)} \cos \mu_{k-1} \theta + b^{(k-1)} \sin \mu_{k-1} \theta \quad (46)$$

而对应于右端项为 $f^{(k-1)}$ 的特解易显式地表示为

$$F_p(f^{(k-1)}) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q^{(i)}(\theta)}{\prod_{j=i+1}^k (\mu_j^2 - \mu_i^2)} + \frac{\bar{f}}{(\bar{\lambda}_0^2 - \mu^2) \prod_{i=1}^{k-1} (\bar{\lambda}_0^2 - \mu_i^2)} \quad (47)$$

由于特征函数的形式已知, 进行几次直接积分迭代和移位迭代后就进行换元, 即由 Rayleigh 商估算新的近似特征值 $\bar{\lambda}_{\text{new}}$ 重新代替. 达到一定精度后就采用纯迭代.

6.2 等价 ODE 积分嵌入法^[32]

对于平面切口问题, 将特征矩阵式 (35) 记为

$$B(\lambda) = |M| = 0 \quad (48)$$

采用极坐标对图 3 所示的环形域围线 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$) 进行积分, 记

$$F(\lambda) = \lambda^n \frac{dB(\lambda)/d\lambda}{B(\lambda)}, \quad \lambda = re^{i\theta} \quad (49)$$

则式 (7) 可写为

$$\operatorname{Re} + \operatorname{Im} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma} F(re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta - \int_{\Gamma} F(re^{i\theta}) ie^{i\theta} dr \right) = \begin{cases} \sum k_i = K & n = 0 \\ \sum k_i \lambda_i^n & n \neq 0 \end{cases} \quad (50)$$

其中 Re 和 Im 分别为实部和虚部。特征根共轭成对出现, 所以虚部 Im 恒为零。考虑如图 3 所示的环形区域围线 Γ , 以 Re 在 Γ_1 ($r = R_1$) 圆弧线上的积分为例, 在圆弧 Γ_1 上 $dr = 0$

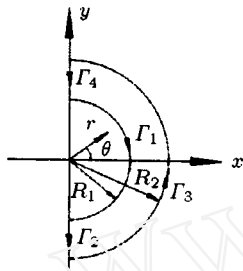


图 3 λ 平面内的环形区域

$$\operatorname{Re} |_{r=R_1} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(R_1 e^{i\theta}) R_1 e^{i\theta} d\theta \right) \quad (51)$$

为了降低代数方程的阶数, 选较窄的环形域以使其最多含两个根。能否精确地计算围线积分是嵌入法的关键, 为此采用高质量的 ODE 求解器 COLSYS 间接地计算线积分。利用区间映射技巧 $t = 2\theta/\pi$ 映射到标准区间 $[-1, 1]$, 采用等价 ODE 变换技巧将其变换为标准 ODE 边值问题

$$\begin{cases} \frac{d(R(t))}{dt} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(F(R_1 e^{i\pi t/2}) R_1 e^{i\pi t/2}) \\ R(-1) = 0 \end{cases} \quad t \in (-1, 1) \quad (52)$$

用 COLSYS 求解上述 ODE 问题, 就可得到满足用户指定误差限的解 $R(t)$, 进而得到所需的积分值 $\operatorname{Re} = R(1)$ 。实施时也可以再分为若干段分别进行积分而后累加。

$n = 0$ 时, 若 $K = 1$, 则所围区域内仅存在单实根, 其值为取 $n = 1$ 时的积分结果; 若 $K = 2$, 则此区域可能包含两个根, 若 $n = 1$ 时实部为 a , $n = 2$ 时实部为 b , 令 $\Delta = 2b - a^2$, 有

$$\left. \begin{aligned} \Delta \geq 0, \text{ 两实根: } \lambda'_1 &= \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda'_2 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \Delta < 0, \text{ 两复根: } \lambda'_1 &= \frac{a + i\sqrt{-\Delta}}{2}, \quad \lambda'_2 = \overline{\lambda'_1} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

两复根时仅取虚部大于零的一个。

6.3 嵌入法和 Müller 法联合求解^[33]

利用嵌入法求解时, 随着 n 和材料数目的增加求解效率降低比较明显, 并且可解域为最多包含两个根的环形域。联合求解的目的就是利用嵌入法确定所给环域内的特征根个数, 而后利用 Müller 法在定界后的区域内有目的地进行求解。

Müller 法的每次迭代只能收敛到一个根, 劈因子法技巧保证了求解多个根而不重复收敛, 即已求得 n 个根, 求下一个根就在劈掉因子后的函数上进行 Müller 迭代

$$f_n(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1^0)(\lambda - \lambda_2^0) \cdots (\lambda - \lambda_n^0)} \quad (54)$$

7 小结

简要回顾和介绍了文献中常见的求解二维切口问题特征根的方法, 重点介绍了作者的工作, 基本解决了完备求解这类特征根问题。为基于特征展开研究二维断裂问题打下了基础。

二维切口问题的特征根问题及其求解方法具有以下一些特性:

(1) 反平面和平面切口问题的特征展开为单级数, Reissner 板壳的特征展开为双级数.

(2) 反平面和平面切口问题的特征根求解类型为两种基本类型, Reissner 型板壳特征根求解可分为这两种基本类型的组合.

(3) 最大可能重根数与问题的自由度数同. 求解过程中最大的独立重特征根数为 2.

(4) 超逆幂迭代法是仅对反平面类特征问题研制的. 嵌入法具有实复通用的优点, 但随着材料数目的增加求解效率降低比较明显. 嵌入法与 Müller 法联合求解则是比较理想的方法.

参 考 文 献

- 1 Williams M L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension. *J Appl Mech*, 1952, 14: 526~528
- 2 Williams M L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J Appl Mech*, 1957, 24: 109~114
- 3 Hartranft R J, Sih G C. The use of eigenfunction expansions in the general solution of three-dimensional crack problems. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1969, 19(2): 123~138
- 4 柳春图. 承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形. *固体力学学报*, 1983, 3: 441~448
- 5 Gross B, Srawley J E, Brown W F. Stress intensity factors for a single-edge-notch tension specimen by boundary collocation. NASA TN D-2395, 1964
- 6 Gross B, Srawley J E. Stress intensity factors for a single-edge-notch specimens in bending or combined ending and tension. NASA TN D-2603, 1965
- 7 Gross B, Srawley J E. Stress intensity factors for three point bend specimens by boundary collocation. NASA TN D-3092, 1965
- 8 Kobayashi A S, Cherepy R B, Kinsel W C. A numerical procedure for estimating the stress intensity factor of a crack in a finite plate. *Journal of Basic Engineering*, 1964, 86: 681~684
- 9 Gross B, Mendelson A. Plane elastic analysis of V-notched plates. *Int J Fract Mech*, 1972, 8: 267~276
- 10 Wilson W K. Numerical method for determining stress intensity factors of an interior crack in a finite plate. *Journal of Basic Engineering*, 1971: 685~690
- 11 Carpenter W C. A collocation procedure for determining fracture mechanics parameters at a corner. *Int J Fract*, 1984, 24: 255~266
- 12 Carpenter W C. The eigenvector solution for a general corner or finite opening crack with further studies on the collocation procedure. *Int J Fract*, 1985, 27: 63~74
- 13 Rzasnicki W, Mendelson A, Albers L U. Application of boundary integral method to elastic analysis of V-notched beams. NASA TN F-7424, 1973
- 14 Rzasnicki W, Mendelson A. Application of boundary integral method to elastoplastic analysis of V-notched beams. *Int J Fract*, 1975, 11: 329~342
- 15 Sterm M, Becker E B, Dunham R S. A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *Int J Fract*, 1976, 12(3): 359~368
- 16 Mohan Lal Soni, Sterm M. On the computation of stress intensity factors in composite media using a contour integral method. *Int J Fract*, 1976, 12(3): 331~344
- 17 龙驭球, 支秉琛, 匡文起等. 分区混合有限元法计算应力强度因子. *力学学报*, 1982, 4: 341~353
- 18 徐永君. 断裂问题特征根的完备求解和基于有限元线法的应力强度因子计算: [博士学位论文]. 清华大学土木工程系, 1996
- 19 徐永君, 袁骊. 余能积分提取法计算应力强度因子. *工程力学*, 1996 (增刊): 196~201
- 20 England A H. On stress singularities in linear elasticity. *Int J Engng Sci*, 1971, 9: 571~585
- 21 Fan Zhong, Long Yuqiu. Sub-region mixed finite element analysis of V-notched plates. *International Journal of Fracture*, 1992, 56: 333~344
- 22 袁骊, 张亿果. 常微分方程特征值问题的求解器解法. *地震工程与工程震动*, 1993, 13(2): 94~102
- 23 Conte S D, Carl de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, 1980
- 24 Lin K Y, Tong Pin. Singular finite elements for the fracture analysis of V-notched plate. *Int J Num Meth Eng*, 1980, 15: 1343~1354
- 25 钱俊. 切口尖端应力应变场与分区混合有限元法计算切口应力强度因子: [博士学位论文]. 清华大学土木工程系, 1990
- 26 Kalaba R, Mease K. An imbedding method for matrix eigenvalue problem. *Computation & Mathematics with Applications*, 1978, 4(1): 53~59

- 27 Kalaba R, Spingarn K. Numerical approaches to the eigenvalues of Saaty's matrices for Fuzzy Sets. *Computation & Mathematics with Applications*, 1978, 4: 369~375
- 28 Fujitani Y, Fujii D. Analysis of stress singularity in the vicinity of the tip of crack and notch along the bi-material Interface. In: Fujita H, Yamauti M ed. *Lecture Notes in Num Appl Anal, Modeling, Computation and Analysis in Fracture Mechanics*. Kinokuniya, Tokyo, 1994, 13: 75~92
- 29 徐永君, 袁驷. 断裂问题的特征根区间及其二分迭代求解. *工程力学*, 1996, 13(4): 28~40
- 30 徐永君, 袁驷. 多材料反平面断裂问题特征根的超逆幂迭代求解. *固体力学学报*, 1997, 18(4): 290~294
- 31 Xu Yongjun, Yuan Si. Complete eigen-solutions for anti-plane notches with multi-materials by super-inverse iteration. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 10(2): 157~166
- 32 Xu Yongjun, Yuan Si. Complete Eigen-solutions for Plane Notches with Multi-materials by the Imbedding Method. *International Journal of Fracture*, 1996, 81: 373~381
- 33 袁驷. 介绍一个常微分方程边值问题求解通用程序——COLSYS. *计算结构力学及其应用*, 1990, 7(2): 104~105
- 34 Ascher U, Christiansen J, Russell R D. Collocation software for boundary-value ODEs. *ACM Trans Math Software*, 1981, 7(2): 209~222
- 35 Ascher U, Christiansen J, Russell R D. Algorithm 569, COLSYS: Collocation software for boundary-value ODEs[D2]. *ACM Trans Math Software*, 1981, 7(2): 223~229
- 36 Yuan Si. ODE Conversion techniques and their applications in computational mechanics. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 7(3): 283~288.
- 37 袁驷, 徐永君. 嵌入法和 Müller 法联合求解断裂问题特征根的完备解. *计算力学学报*, 1997, 14(增刊): 639~642
- 38 徐永君, 柳春图, 袁驷. Reissner 型平板弯曲断裂问题的特征根. 见: 北京力学学会第四届学术年会论文摘要集, 1997. 1~2
- 39 徐永君, 袁驷, 柳春图. 断裂问题特征根的重根探讨. *力学学报*, 1999, 31(5): 618~624
- 40 柳春图, 徐永君, 袁驷. 断裂问题特征根对应的特征函数. 见: 吕国志, 童小燕编. *疲劳与断裂*, 下册. 第九届全国断裂、疲劳学术会议. 昆明. 北京: 航空工业出版社, 1998 年 12 月. 500~504

THE PROGRESS ON COMPLETE EIGEN-SOLUTION OF TWO DIMENSIONAL NOTCH PROBLEMS

Xu Yongjun Yuan Si[†] Liu Chuntu

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China
[†]Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China

Abstract A brief review on eigen-solution of two-dimension crack/notch problems (anti-plane problem, in-plane problem, Reissner plate) is given. A detailed introduction is given of the authors' work on complete eigen-solutions, including anti-plane problem, in-plane problem, Reissner plate and shallow shell. In this paper, complete eigen-values solution method, characteristics of multiple roots and eigen-functions calculation are described. The present results offer a significant insight into the study of crack/notch problems and a useful guideline for its program design.

Keywords two-dimensional crack/notch problem, eigen-value, multiple roots, eigen-function