

不可压 N-S 方程高效算法及 二维槽道湍流分析¹⁾

李新亮²⁾ 马延文* 傅德薰
(LNM, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)
*(LHD, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 构造了基于非等距网格的迎风紧致格式, 并将其与三阶精度的 Adams 半隐方法相结合, 构造了求解不可压 N-S 方程高效算法. 该算法利用基于交错网格的离散形式的压力 Poisson 方程求解压力项, 解决了边界处的残余散度问题; 同时还利用快速 Fourier 变换将方程的隐式部分解耦, 离散后的代数方程组利用追赶法求解, 大大减少了计算量. 通过对二维槽道流动的数值模拟, 证实了所构造的数值方法具有精度高, 稳定性好, 能抑制混淆误差等优点, 同时具有很高的计算效率, 是进行壁湍流直接数值模拟的有效方法.

在数值模拟的基础上对二维槽道流动进行了分析, 得到了 Reynolds 数从 6000 到 15000 的二维流动饱和态解 (所谓“二维槽道湍流”); 定性及定量结果均与他人的数值计算结果吻合十分理想. 对流场进行了统计分析, 指出了“二维湍流”与三维湍流统计特性的区别.

关键词 非等距网格的迎风紧致格式, 不可压 N-S 方程, “二维湍流”, 混沌, 湍应力

前 言

湍流现象是自然界最复杂的物理现象之一, 人类对湍流进行了上百年的研究, 至今虽取得重大进展, 但离最终弄清其本质还需要相当长的时间. 对湍流的研究不但有重大的理论意义, 也有巨大的应用价值^[1]. 直接数值模拟 (DNS) 方法是研究湍流的重要手段, 它和实验相互补充, 在目前发挥着重要作用. 随着计算方法的改进和计算机技术的提高, 其应用越来越广泛^[2]. 高精度差分方法是目前进行湍流 DNS 的重要方法; 和谱方法相比, 差分法具有方法简单, 边界处理灵活等优点. 特别是近年流行的紧致型差分方法, 由于具有精度高、低色散、低耗散等优点, 在湍流 DNS 中得到广泛应用^[3~6].

以往的紧致型差分方法是基于均匀网格的; 对于非均匀网格, 通常是通过 Jacobian 变换将其变为计算域的均匀网格, 这在物理域网格变换剧烈的地方会产生较大的误差. 本文构造出直接针对非均匀网格的迎风紧致差分格式, 该格式不但具有普通迎风紧致格式的优点 (如精度高, 对高频非物理振荡有衰减作用, 能抑制非线性效应产生的混淆误差), 还可适应空间网格的剧烈变化. 将其与谱方法结合, 构造出求解二维不可压 N-S 方程的高效算法. 数值计算的结果表明, 该方法是进行壁湍流数值模拟的有效方法.

湍流从本质上说是三维的, 由于二维数值计算无法模拟从二维到三维的失稳过程, 因而无法模拟湍流流场. 但由二维数值模拟得到的饱和态流场仍具有许多和三维湍流相似的特征, 如

1999-10-10 收到第一稿, 2000-12-01 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (59876002) 和国家攀登 A 资助项目, 国家重点基础研究专项经费 (G1999032805) 资助项目.

2) 现单位: 清华大学工程力学系 SMC 气动中心, 北京 100084.

都具有上抛、下扫、间歇等现象,因而该流场有时也被称为“二维湍流”.该流场对于湍流的机理和本质研究有一定的参考和借鉴价值,同时由于易于得到,易于研究,因而对其进行探讨很有意义^[8].

本文运用上文构造的方法对“二维槽道湍流”进行了数值模拟,得到了对应不同 Reynolds 数的饱和态流场(“二维槽道湍流”),定性及定量的结果均与文^[8]吻合.对其进行了统计分析,并与三维湍流进行了对比,指出了三维扰动对于湍流核心区的重要性.

1 基于非等距网格的迎风紧致格式

计算网格为 $\{x_k\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, N$), 网格间距为 $h_k = x_k - x_{k-1}$. 以模型方程为例说明如何构造基于非等距网格的迎风紧致格式.

考虑下模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

设 u' 是 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的差分近似. 当 $c > 0$ 时令 u' 满足

$$\alpha_i u'_{i-1} + u'_i = A_i u_{i+1} + B_i u_{i-1} + C_i u_{i+2} + D_i u_{i-2} + E_i u_i \quad (1.2)$$

其中 $\alpha_i, A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$ 与网格间距 $h_k = x_k - x_{k-1}$ 有关.

传统的迎风紧致格式要求网格间距 h 为一常数. 而本文中的 h_k 可以任意变化, 对于不同的网格点, 空间步长可以是不同的. 将 (1.2) 式中的 $u_{i+1}, u_{i-1}, u_{i+2}, u_{i-2}, u'_i$ 在 i 点做 Taylor 级数展开, 比较两端 Taylor 展式中同阶导数的系数可得如下关系式

$$\left. \begin{aligned} A_i + B_i + C_i + D_i + E_i &= 0 \\ h_{i+1}A_i - h_iB_i + (h_{i+2} + h_{i+1})C_i - (h_i + h_{i-1})D_i &= 1 + \alpha_i \\ h_{i+1}^2A_i + h_i^2B_i + (h_{i+2} + h_{i+1})^2C_i + (h_i + h_{i-1})^2D_i &= -2h_i\alpha_i \\ h_{i+1}^3A_i - h_i^3B_i + (h_{i+2} + h_{i+1})^3C_i - (h_i + h_{i-1})^3D_i &= 3h_i^2\alpha_i \\ h_{i+1}^4A_i + h_i^4B_i + (h_{i+2} + h_{i+1})^4C_i + (h_i + h_{i-1})^4D_i &= -4h_i^3\alpha_i \\ h_{i+1}^5A_i - h_i^5B_i + (h_{i+2} + h_{i+1})^5C_i - (h_i + h_{i-1})^5D_i &= 5h_i^4\alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

若式 (1.2) 中的系数 $\alpha_i, A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$ 满足 (1.3) 式, 则分析等式两端 Taylor 展式余项的系数可知 u' 以五阶精度逼近于 $\frac{\partial u}{\partial x}$. 式 (1.2), (1.3) 为针对内点构造的基于非等距网格的迎风紧致格式.

同样, 当 $c < 0$ 时 u' 满足

$$u'_i + \beta_i u'_{i+1} = A_i u_{i+1} + B_i u_{i-1} + C_i u_{i+2} + D_i u_{i-2} + E_i u_i \quad (1.4)$$

其系数可仿照 (1.3) 式得到.

以上构造的差分格式适用于网格的内点, 对于边界点, 可采用降低精度的普通型差分逼近格式 (Rai et al. 1991)^[9].

可以看出, 格式中的系数只与计算网格有关, 一旦网格给定, 这些系数就固定下来. 在数值计算中, 如果计算网格不随时间变化, 则这些系数只需计算一次, 因此该格式并不比传统的紧致格式增加计算量.

2 不可压槽道湍流 DNS 的高效算法

以二维槽道流动为例阐述本计算方法,该方法可直接推广到三维情况.上下两个无穷平板间充满黏性不可压缩流体,在均匀的平均压力梯度驱动下流动.控制流动的无量纲 N-S 方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\nabla p + L(\mathbf{V}) + N(\mathbf{V}) + f e_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中

$$L(\mathbf{V}) = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}, \quad N(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$$

f 为平均压力梯度, e_1 为 x 方向的单位向量. \mathbf{V}, p 在流向和展向满足周期条件,在壁面处 \mathbf{V} 满足无滑移条件.无量纲参数的定义为: $Re = \frac{U_m L}{\nu}$, 其中 $U_m = \frac{3Q}{4L}$ 为流量平均速度, Q 为槽道的流量, L 为槽道半宽度, ν 为流体黏度.流向和展向采用均匀网格,法向采用非均匀的交错网格.其中, ν 在整数网格上; u, p 在半网格上.

2.1 时间推进格式

采用 Karniakakis et al. (1991)^[7] 构造的基于 Adams 方法的时间分裂格式,时间推进分为三个子步:

(1) 非线性步

$$\frac{\hat{\mathbf{V}} - \sum_{q=0}^2 \alpha_q \mathbf{V}^{n-q}}{\Delta t} = \sum_{q=0}^2 \beta_q N(\mathbf{V}^{n-q}) \quad (2.2)$$

(2) 压力步

$$\frac{\hat{\mathbf{V}} - \hat{\mathbf{V}}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}, \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{V}} = 0 \quad (2.3)$$

(3) 黏性步

$$\frac{\gamma_0 \mathbf{V}^{n+1} - \hat{\mathbf{V}}}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}^{n+1} + f e_1 \quad (2.4)$$

其中, $\alpha_0 = 3, \alpha_1 = -3/2, \alpha_2 = 1/3, \beta_0 = 3, \beta_1 = -3, \beta_2 = 1, \gamma_0 = 11/6$.

2.2 非线性步的计算

对于 (2.2) 式中的导数项采用前文构造的基于非等距网格的迎风紧致格式计算.例如:对于 $v \frac{\partial u}{\partial y}$ 当 $v > 0$ 时,对 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 采用前文构造的后差格式 (1.2); 当 $v < 0$ 时采用前文构造的前差格式 (1.4).由于采用了交错网格,因而在计算不同网格点上值的乘积项时需要进行插值.本文运用六阶 Langrange 中心插值对 u, v 进行插值.

2.3 压力步的计算

直接从基于交错网格的离散形式的动量方程处出发,构造压力的离散方程,同时利用流向周期性,采用快速 Fourier 变换使压力方程解耦,大大减少了计算量.

对物理量 $f(x, y)$ 定义 Fourier 变换

$$f(x, y) = \sum_{k_1} f^*(y) e^{ik_1 x}$$

f^* 为函数 f 的谱, 对 (2.3) 式进行 Fourier 变换得

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}^* &= \hat{u}^* - ik_1 p^* \Delta t \\ \hat{v}^* &= \hat{v}^* - \Delta t \frac{\partial p^*}{\partial y} \\ ik_1 \hat{u}^* + \frac{\partial \hat{v}^*}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

可以看出式 (2.5) 沿流向解耦 (即各物理量沿流向是独立的), 只需对其沿法向离散. 由于以上方程沿 x 方向是独立的, 为了书写方便, 在下文的推导中各物理量只标明沿 y 方向的下标 j (或 j').

约定下标 j 表示某物理量在 v 所在的网格点上取值, 下标 j' 表示物理量在 u, p 所在网格上的点上取值. 如果在一个等式中同时出现 j 和 j' , 则二者在数值上是相同的 (但二者含义不同, j' 代表的网格点在 j 代表的网格点的上方半个网格处).

对于 $\frac{\partial p^*}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial \hat{v}^*}{\partial y}$ 采用三阶精度的中心差分离散

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial y} \right|_j = a_j^{(1)} p_{j'-2}^* + a_j^{(2)} p_{j'-1}^* + a_j^{(3)} p_{j'}^* + a_j^{(4)} p_{j'+1}^* \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{v}^*}{\partial y} \right|_{j'} = a_j^{(1)} \hat{v}_{j-1}^* + a_j^{(2)} \hat{v}_j^* + a_j^{(3)} \hat{v}_{j+1}^* + a_j^{(4)} \hat{v}_{j+2}^* \quad (2.7)$$

由于所在坐标网格不同, 系数 $a_j^{(k)}$ 和 $a_j'^{(k)}$, ($k = 1, 2, 3, 4$) 通常是不同的. 这些系数可以通过比较该等式两点 Taylor 展开式中的系数得到. 这些系数只与网格有关, 因此可以在计算之前求出, 并不占用计算量.

由式 (2.5)~(2.7) 得

$$c_j^1 p_{j'-3}^* + c_j^2 p_{j'-2}^* + c_j^3 p_{j'-1}^* + c_j^4 p_{j'}^* + c_j^5 p_{j'+1}^* + c_j^6 p_{j'+2}^* + c_j^7 p_{j'+3}^* = d_j \quad (2.8)$$

式 (2.8) 为针对内点的方程. 对于边界点和邻近边界点, 利用速度的边界条件及较低阶精度的差分格式可同样构造出 p^* 的方程; 该方程形式上与 (2.8) 相同, 只是系数有些差异. 式 (2.8) 为一个七对角方程组, 可用 LU 分解法求解. 将系数矩阵分解成一个上三对角和下四对角矩阵 (只需存储共七个对角线上的非零元素). 由于该方程的系数与时间推进无关, 因而该分解可以在计算前求得, 不占用计算量. 在时间推进过程中, 只需进行回代过程. 由于 L 矩阵和 U 矩阵中只有七个对角线上有非零元素, 因此求解整个流场 p^* 的计算量只有 $7R$. (R 为总网格点数).

求解出 p^* 后由式 (2.5), 便可求出 \hat{u}^*, \hat{v}^* .

2.4 黏性步及流量修正

由式 (2.4) 得

$$\gamma_0 \mathbf{V}^{n+1} - \frac{\Delta t}{Re} \Delta \mathbf{V}^{n+1} = \hat{\mathbf{V}} + f \Delta t \mathbf{e}_1 \quad (2.9)$$

为了便于进行流量修正, 将 V^{n+1} 分解. 令 $V^{n+1} = V^s + V^p$, 其中 V^s 和 V^p 分别满足

$$\gamma_0 V^s - \frac{\Delta t}{Re} \Delta V^s = \hat{V} \quad (2.10)$$

$$\gamma_0 V^p - \frac{\Delta t}{Re} \Delta V^p = f \Delta t e_1 \quad (2.11)$$

V^s 和 V^p 在流向满足周期条件, 法向满足无滑移条件.

(1) 黏性步

对式 (2.11) 进行 Fourier 变换得

$$\left[\gamma_0 - \frac{\Delta t}{Re} k_1^2 \right] u^{s*} - \frac{\Delta t}{Re} \frac{\partial^2 u^{s*}}{\partial y^2} = \hat{u}^* \quad (2.12)$$

在内点处运用五阶精度的中心差分有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u^{s*}}{\partial y^2} \right|_{j'} &= a_{j,1} u_{j'-3}^{s*} + a_{j,2} u_{j'-2}^{s*} + a_{j,3} u_{j'-1}^{s*} + a_{j,4} u_{j'}^{s*} + a_{j,5} u_{j'+1}^{s*} + \\ & a_{j,6} u_{j'+2}^{s*} + a_{j,7} u_{j'+3}^{s*} \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中系数 $a_{j,k}$ ($k = 1, 2, \dots, 7$) 与网格有关, 可以通过比较上面等式两端 Taylor 展开式的系数 (在 j' 点展开), 得到 $a_{j,k}$ 所满足的方程来求出它们 (这些系数只与网格有关, 可在计算前求出, 并不占用额外的计算量). 在边界处对 $\frac{\partial^2 u^{s*}}{\partial y^2}$ 采用二阶和三阶精度的中心差分.

将 (2.13) 式代入 (2.12) 得

$$b_{j,1} u_{j'-3}^{s*} + b_{j,2} u_{j'-2}^{s*} + b_{j,3} u_{j'-1}^{s*} + b_{j,4} u_{j'}^{s*} + b_{j,5} u_{j'+1}^{s*} + b_{j,6} u_{j'+2}^{s*} + b_{j,7} u_{j'+3}^{s*} = \hat{u}_{j'}^* \quad (2.14)$$

和求解压力方程的方法类似, 式 (2.14) 同样可以用 LU 分解法求解. 即通过 LU 分解将原七对角系数矩阵分解成为一个上三对角和一个下四对角矩阵. 然后通过回代求解. 方程 (2.14) 中的系数不随时间改变, 因而 LU 分解可在计算之前完成, 并不占用额外的计算量. 求解 (2.14) 的计算量同样为 $7R$. 可以看出, 求解方程的隐式部分的计算量与通常采用的显式方法相当, 远小于通常采用的求解隐式方程的迭代法或直接法.

对于 v^{s*} 可以采用同样的方法求得. 求得 u^{s*}, v^{s*} 后, 通过 FFT 变换便可得到 u^s 和 v^s .

(2) 流量修正

为了有足够能量维持湍流发展, 必须有外力驱动. 在槽道湍流中驱动流体流动的外力为平均压力梯度. 在计算过程中有两种常用的控制方法, 一种是认为平均压力梯度为常数, 另一种是认为槽道的流量为常数. 两种方法各有优缺点, 前者更易于计算, 而后的物理意义更为明显. 当流动达到充分发展的湍流时, 流场的平均压力梯度随时间变化很小 (假设采用定流量的控制方法), 因而当流动达到充分发展湍流时, 二者是等价的. 本文后半部分的计算采用定流量的控制方法, 假定在流动过程中槽道的流量始终保持不变.

定流量是通过改变平均压力梯度来实现的, 令每个时间步的流量保持为常数, 从而由 (2.11) 式确定平均压力梯度 f . 由于在 (2.11) 式中 V^p 对于 f 是线性的, 因而流量修正的计算量非常小 [10].

经过非线性步, 压力步, 黏性步和流量修正后, 便可得到下一时间步的流场.

若网格点总数为 R , 通过分析可知本算法的隐式部分的计算量 (乘法量) 为 $21R$ (压力步 $7R$, 黏性步 $14R$). 显式部分 (非线性步) 的计算量为 $52R$ (求 4 个导数值, 并考虑两种不同的迎风方向, 共需计算 8 次; 采用基于非等距网格的迎风紧致格式, 每次 $6R$, 求完导数后还需 4 次乘法以得到对流项). 可以看出本方法隐式部分 (压力步和黏性步) 的计算量还不到显式部分的一半; 即使将 Fourier 变换的计算量考虑在内, 隐式部分的计算量也不超过显式部分 (Fourier 变换可用 FFT 实现, 效率很高). 一般半隐式算法的隐式部分的计算量通常远大于其显式部分; 在本文构造的算法中, 显式部分的计算量没有增加, 而隐式部分的计算量却大大降低, 因此本算法具有很高的效率.

3 二维槽道流动的非线性行为及统计分析

运用上文构造的高效算法对二维槽道流动进行了数值模拟, 各算例的计算区域均为 $L_y = 2$, $L_x = 2\pi$ (相当于文献 [8] 中流向波数 $\alpha = 1.0$ 的情况), 网格点为 128×129 . 槽道的流量 Q 保持恒定, Reynolds 数用流量平均速度, 槽道的半宽度和流体黏度定义: $Re = \frac{U_m L}{\nu} = \frac{3Q}{4\nu}$ 和文献 [8] 一致.

采用前文构造的高效算法, 以抛物型平均流叠加上线性稳定性理论给出的最不稳定性扰动 (幅值为 10%) 为初值, 在 LSSC 的微机群上计算, 平均每天可推进近 1000 个无量纲时间单位 (以流量平均速度和槽道半宽度定义), 效率很高.

经过相当长时间 (约几千个无量纲时间单位) 的发展后流动达到了饱和状态 (即“二维湍流”), 本文将对不同 Reynolds 数的二维湍流进行分析.

在“二维湍流”中, 流场的下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 是反映流动状态的重要物理量. Reynolds 数很低时, 流向速度呈抛物状分布, 该物理量为一常数; 随着 Reynolds 数的增加, 流动失稳, 该物理量的时间序列将呈现出各种不同的状态. 文献 [8] 对 $Re \leq 10000$ 的“二维湍流”进行了分析, 给出了 $\bar{\omega}$ 时间序列图并分析了不同 Reynolds 流动 $\bar{\omega}$ 的时均值和脉动量的均方根. 但文献 [8] 并未给出 $Re > 10000$ 的结果, 该文指出: “当 Reynolds 数继续增高时, 有些证据表明 ($\bar{\omega}$) 随时间的振荡将变得混沌, 但由于受数值精度所限本文未能给出……” (文献 [8], 273 页). 本文不但给出了较低 Reynolds 数的结果, 还同时给出 $Re > 10000$ 的结果.

图 1 为不同 Reynolds 数“二维湍流”的下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 的时间序列图, 从中可以看出对应 $Re = 9000$ 的时间序列呈周期状态, $Re = 10000$ 时为拟周期状态; 该结论与文献 [8] 一致. $Re = 12000$ 时该时间序列仍呈现拟周期状态; 而当 $Re = 15000$ 时, 该时间序列呈现混沌状态, 证实了文献 [8] 的推测.

表 1 和表 2 列出了不同 Reynolds 数“二维湍流”下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 的时均值 (即 $\bar{\omega}$ 沿时间方向的平均值) 及其脉动均方根值. 从表中可以看出本文结果与文献 [8] 吻合十分理想, 充分说明了本文计算结果的正确性. 同时本文给出了文 [8] 因数值精度所限未能给出的 $Re = 12000, 15000$ 的结果. (注: 本文的涡量定义为: $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, 和文献 [8] 中涡量的定义符号相反, 因此表 1 对文献 [8] 中的原值进行了取反.)

图 2 给出了“二维湍流”的平均速度剖面, 从中可以看出其速度型在壁面附近较陡, 与三维湍流的情形相似, 但在远离壁面的区域其速度型远没有三维湍流那样饱满 [9].

图 3 为“二维湍流”的脉动速度均方根 (湍流度) 分布. 其中的实线和虚线分别为 u' 和 v' 的均

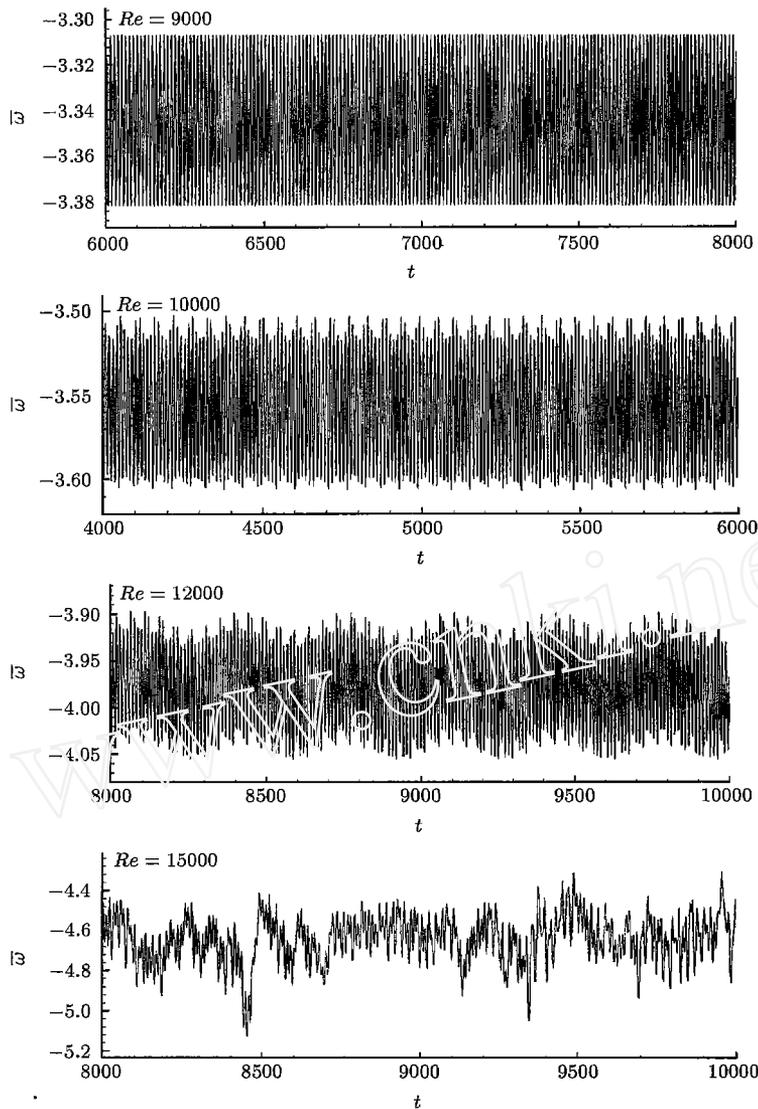


图 1 不同 Reynolds 数“二维湍流”下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 分布图
 Fig.1 Time evolution of averaged vorticity at lower wall

表 1 不同 Reynolds 数“二维湍流” $\bar{\omega}$ 的时均值
 Table 1 Time averaged $\bar{\omega}$ for different Reynolds numbers

Reynolds numbers	6 000	7 000	8 000	9 000	10 000	12 000	15 000
present results	-2.625	-2.874	-3.118	-3.345	-3.557	-3.979	-4.646
Ref.[8] results	-2.62	-2.87	-3.12	-3.35	-3.56	—	—

方根 (以壁面摩擦速度无量纲化). 与三维湍流^[9] 相比可以看出, 三维湍流在槽道中心线附近各方向速度脉动量的幅值基本相同 (基本处于各向同性状态), 而“二维湍流”在中心线附近法向速度的脉动量的幅值远大于流向, 速度脉动呈现很大的各向异性.

表 2 不同 Reynolds 数 “二维湍流” \bar{w} 的脉动均方根
 Table 2 RMS of \bar{w} fluctuation for different Reynolds numbers

Reynolds numbers	6 000	7 000	8 000	9 000	10 000	12 000	15 000
present results	0.008 5	0.016 2	0.021 6	0.026 4	0.032 1	0.043 7	0.118
Ref.[8] results	0.008 5	0.016 0	0.021 5	0.026 5	0.032 2	—	—

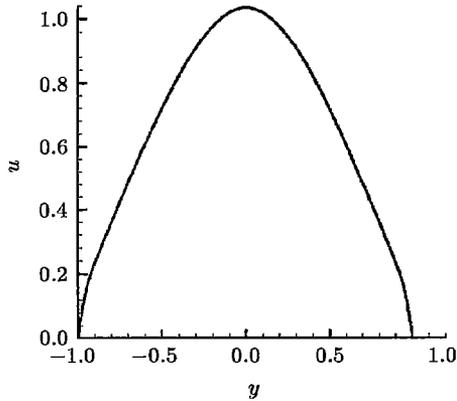


图 2 “二维湍流” 的平均速度剖面
 Fig.2 Average velocity profile of two dimensional turbulence

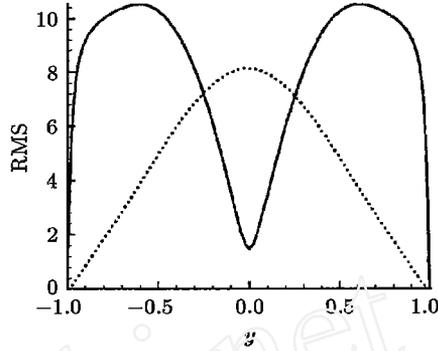


图 3 “二维湍流” 的脉动速度均方根
 Fig.3 RMS velocity fluctuations in two-dimensional turbulence
 — u_{rms}^+ , v_{rms}^+

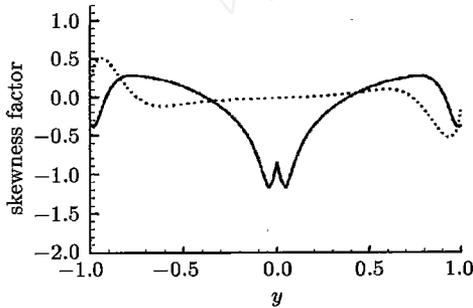


图 4 “二维湍流” 的偏斜因子
 Fig.4 Skewness factors of velocity fluctuations in two-dimensional turbulence
 — $S(u')$, $S(v')$

最近的研究证明湍流脉动并非完全的随机运动, 其脉动量含有一定的规律性, 湍流是有序和无序的混合体, 湍流脉动速度的概率密度分布与 Gauss 分布有一定的差异. 速度脉动的偏斜因子 (三阶统计量) 可以在某种程度上反映这种差异, Gauss 型分布是一种对称分布, 符合该分布的物理量的偏斜因子为 0; 偏斜因子的绝对值越大, 说明其概率密度分布的非对称性越强 (越“偏斜”). 图 4 为“二维湍流”脉动速度的偏斜因子. 与三维湍流^[9]相比可以看出, “二维湍流”脉动速度的偏斜因子的绝对值更高, 说明其概率密度更偏离 Gauss 分布.

根据湍应力在总应力中所占的比重可以把湍流边界层划分为黏性子层区、过渡区和湍流核心区. 在湍流核心区湍应力占总应力的绝大部分, 相比之下, 黏性应力可以忽略^[9].

图 5 为不同 Reynolds 数 “二维湍流” 的雷诺剪切应力 $-\overline{u'v'}$ 及总剪应力 $-\overline{u'v'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ 的分布图 (以壁面处的剪应力无量纲化). 在该方式无量纲化下, 所有流动的总剪应力均为从 -1 到 1 的直线, 在图中以实线表示. 图中的虚线表示不同 Reynolds 数 “二维湍流” 的雷诺剪应力. 从图中可以看出, 随着 Reynolds 数的升高, 雷诺剪应力在总剪应力中所占的比重增加. 但即使对于较高 Reynolds 数的情况, “二维湍流” 的雷诺应力在总应力中所占的比重也无法向三维湍

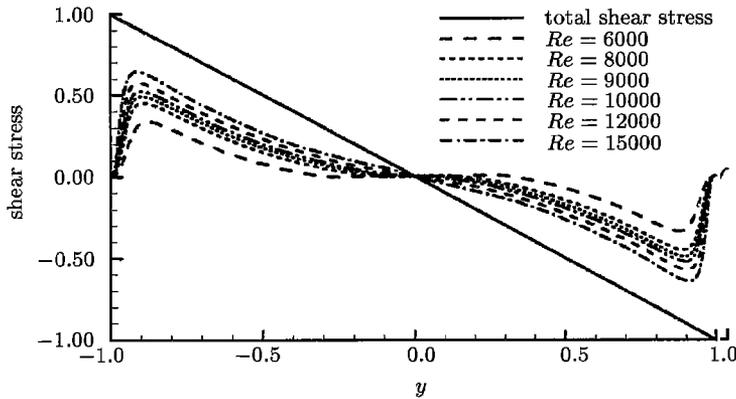


图 5 不同 Reynolds 数“二维湍流”的雷诺剪应力及总剪应力分布

Fig.5 Reynolds and total shear stress profiles in two-dimensional turbulence at different Reynolds numbers

流那样高^[9].

表 3 为 $y = -0.2$ 和 -0.5 处 (本文的坐标选取为: $y = 0$ 为槽道中心, $y = \pm 1$ 为壁面) 的雷诺剪应力在总剪应力中所占的比例, 其中三维湍流的结果出自文 [10] 的数值模拟. 从表中可以看出, 对于三维情况, 雷诺应力所占的比例比黏性应力高出一个量级 (雷诺应力占总应力的 90% 以上); 而对于“二维湍流”, 二者处于同一量级. “二维湍流”中雷诺剪应力所占的比重比三维情况小得多, 这说明展向扰动对于湍应力的贡献是很大的, 同时也说明了展向扰动对于三维湍流核心区的重要性.

表 3 $y = -0.2$ 和 $y = -0.5$ 处雷诺剪应力在总剪应力中所占的比重

Table 3 Weight of Reynolds shear stress in total Reynolds shear stress

Reynolds numbers	6 000	8 000	9 000	10 000	12 000	15 000	3-D turbulent flow ($Re_m = 2800$)
$y = -0.2$	0.96%	8.7%	15.2%	21.4%	31.2%	43.2%	92.81%
$y = -0.5$	14.8%	29.3%	34.2%	39.0%	45.4%	53.1%	93.80%

讨论 本文同文献 [8] 所采用的网格同为 128×129 , 但本文方法的数值分辨率显然高于文献 [8] (文献 [8] 能分辨的最高 Reynolds 数为 10 000, 而本文给出了 $Re = 15 000$ 的流场并证实了该文的推测). 这主要是因为文献 [8] 采用谱方法, 为了抑制混淆误差 (de-aliasing), 实际只使用了 83 个 Fourier 模态和 85 个 Tchebichev 模态, 沿每个方向有 1/3 的网格节点无法参与谱空间的数值计算 (3/2 法则). 而本文采用的迎风紧致格式本身具有很好的抑制混淆误差的能力, 所有的网格点均能参与数值计算, 因而可以取得很好的效果. 可见在混淆误差的处理上, 迎风紧致格式要优于谱方法 (关于迎风紧致格式和谱方法在处理混淆误差方面的比较, 可参考文 [10]).

4 结 论

紧致差分格式是近年来比较流行的差分格式, 目前在多尺度复杂流动的数值模拟中得到了较广泛的应用. 本文构造了基于非等距网格的迎风紧致格式, 格式中的系数随网格变化, 克服了传统迎风紧致格式在网格变化剧烈时降低精度的弱点, 适应了壁湍流的数值模拟在近壁处网

格的剧烈变化.

直接数值模拟 (DNS) 是研究湍流的重要方法, 但 DNS 巨大的计算量在很大程度上限制了其应用. 本文构造了求解不可压 N-S 方程的高效算法, 大大降低了二维和三维槽道湍流 DNS 的计算量. 该算法的效率使得后半部分的二维槽道湍流的数值模拟能够顺利进行 (二维槽道湍流需推进几千个无量纲时间单位才能达到饱和态, 其后还需积累几千个时间单位的数据, 计算量十分巨大, 如无一个高效算法将很难完成计算). 同时, 该算法的精度和分辨率使得能够在 128×129 的网格点上实现 $Re = 15000$ 的二维槽道湍流的正确模拟.

在第二部分, 本文进行了二维槽道流动的数值模拟, 得到了不同 Reynolds 数的二维饱和态流动 (“二维湍流”). 展示了随着 Reynolds 数的增加, 下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 的时间序列从周期、拟周期到混沌的整个过程, 定性及定量结果与文献 [8] 吻合十分理想, 验证了本文结果的正确性. 同时, 给出了文献 [8] 因数值精度所限无法给出的较高 Reynolds 数的结果, 证实了该文的推测.

最后, 本文分析了 “二维湍流” 的剪切应力分布, 发现随着 Reynolds 数的增加, 雷诺应力在总剪应力中所占比重有所增加; 但 “二维湍流” 雷诺剪应力所占的比重始终比三维情况小得多, 这说明展向扰动对于湍应力的贡献是很大的, 也说明了展向扰动对三维湍流核心区的重要性.

致谢 本文的计算是在科学与工程计算国家重点实验室 (LSSC) 的微机群上进行的, 感谢 LSSC 及张林波研究员对本文计算提供指导.

参 考 文 献

- 1 是勋刚. 湍流. 天津: 天津大学出版社, 1994 (Shi Xungang. Turbulence. Tianjin: Tianjin University Publishing Company, 1994)
- 2 Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. *Annu Rev Fluid Mech*, 1998, 30: 539~578
- 3 Rai MM, Moin P. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes. *J Comput Phys*, 1991, 96: 15~53
- 4 Lele SK. Compact finite difference with spectral-like resolution. *J Comput Phys*, 1992, 103: 16~42
- 5 Fu DX, Ma YW. A High Order Accurate Difference Scheme for Complex Flow Fields. *J Comput Phys*, 1997, 134: 1~15
- 6 Gamet L, Dackos F, Nicoud F, et al. Compact finite difference schemes on non-uniform meshes application to direct numerical simulations of compressible flows. *Int J Numer Meth Fluids*, 1999, 29: 159~191
- 7 Karniadakis GE, Israeli MA, Orszag S. High-Order Splitting Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equation. *J Comput Phys*, 1991, 97: 414~443
- 8 Jimenez J. Transition to turbulence in two-dimensional Poiseuille flow. *J Fluid Mech*, 1990, 218: 265~297
- 9 Kim J, Moin P, Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J Fluid Mech*, 1987, 177: 133~166
- 10 李新亮. 槽道湍流的直接数值模拟. [博士论文]. 北京: 中国科学院力学研究所, 2000, 第二章, 第三章 (Li Xinliang. Direct Numerical Simulations of Turbulent Channel Flow. [Ph.D. Thesis]. Beijing: Institute of Mechanics, CAS. 2000, Chapter 2

HIGH EFFICIENT METHOD FOR INCOMPRESSIBLE N-S EQUATIONS AND ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL TURBULENT CHANNEL FLOW ¹⁾

Li Xinliang Ma Yanwen* Fu Dexun

(LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

* (LHD, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

Abstract A new method is developed to solve incompressible Navier-Stokes equations. The method includes 5th order upwind compact difference schemes on non-uniform meshes, high-order time-splitting methods based on staggered grid with discrete pressure equation, and spectral methods. The upwind compact difference schemes on non-uniform grids have very high-order accuracy on interior grids as well as near-boundary grids. The dissipative nature of upwind scheme results in a damping of the higher frequency content, as a result very little energy is alising back. Discrete pressure equation based on staggered grids can avoid difficulties of boundary conditions of pressure. By using FFT the equations of pressure and viscous term can be decoupled, large computing amount can be saved.

In the second part of this paper, fully developed two dimensional turbulent channel flow (Reynolds number from 6 000 to 15 000) is simulated and analysed. According to this paper, time evolutions of averaged vorticity at lower wall goes from the laminar to the chaotic as Reynolds number goes higher. The results are very close to the results of Ref.[8]. In addition, the flows of $Re = 12\,000$ and $15\,000$ are also simulated correctly, indicating that the numerical schemes in this paper are better than those of Ref.[8]. The difference and similarity between two-dimensional and three-dimensional turbulence are also showed in this paper, which shows the importance of the span-wise disturbance to form the core area of turbulence.

Key words upwind compact schemes in non-uniform meshes, incompressible N-S equations, two-dimensional turbulence, chaoties

Received 10 October 1999, revised 1 October 2000.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (59876002) and State Key Project and NKBRSF (CG1999032805).