

研究简报

# 计算 Reissner 理论各向异性板应力强度因子的半权函数法<sup>\*</sup>

## SEMI-WEIGHT FUNCTION METHOD FOR CALCULATING STRESS INTENSITY FACTORS OF REISSNER THEORY ANISOTROPIC CRACKED PLATE

杨丽敏<sup>\*\*</sup> 柳春图 曾晓辉

(中国科学院力学研究所 工程科学部, 北京 100080)

YANG LiMin LIU ChunTu ZENG XiaoHui

(Division of Engineering Sciences, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**摘要** 由功能互等定理导出用半权函数表示的各向异性板应力强度因子的解析表达式,并给出基于 Reissner 板理论含裂纹的各向异性板受弯曲、扭转和剪切作用的半权函数。计算含中心裂纹四边自由受纯弯曲作用板的应力强度因子,并与有关的结果进行比较,表明此方法简便、可靠。

**关键词** 各向异性板 半权函数 应力强度因子 Reissner 理论

**中图分类号** O346.1

**Abstract** A simple and accurate method—semi-weight function method to determine stress intensity factors in anisotropic cracked plates based on Reissner plate theory is proposed. The semi-weight function, including the effect of transverse shear deformation, in an anisotropic plate under bending, twisting moments, and transverse shear loads is presented with Stroh formalism. The stress intensity factors defined in terms of the integral are derived from the Betti's reciprocal work theorem and expressed in terms of plate resultant quantities on a path and semi-weight function. The method is easily appended to Ansys finite element computer codes. Numerical results of a center-cracked plate under pure bending moment with four lateral boundaries free are given and demonstrate the accuracy and practicality of the method. Accurate computations can be achieved with coarse grids and there is no need for high resolution near the crack tip. The contour of integration can be taken well removed from the singularity thereby using data from regions in which the numerical results are generally smooth. The calculations are not sensitive to the choice of contour.

**Key words** Anisotropic plate; Semi-weight function; Stress intensity factors; Reissner theory

Corresponding author: YANG LiMin, E-mail: yang.liminimech@yahoo.com.cn, Fax: +86-10-62561284

Manuscript received 20040425, in revised form 20040526.

## 1 引言

柳春图<sup>[1]</sup>在断裂力学中提出了一个新的计算应力强度因子方法——半权函数法,它在二维问题中已得到满意应用<sup>[2~5]</sup>。半权函数法从功能互等定理出发,构造限制条件较权函数少且易于获得的半权函数,以半权函数与裂尖围线参考解的围道积分形式表示应力强度因子。该方法可以消除裂尖应力奇异性计算精度的影响,使应力强度因子计算变得简单、可靠,并且改进权函数法存在的一些问题和困难。

随着复合材料与智能材料的发展和广泛应用,各向异性材料的强度分析日益受到人们的重视。因为复合材料和智能材料的一个显著的特点是各向异性。关于二维变形各向异性材料力学性能的研究,目前代表性理论有两种,一是 Lekhnitskii<sup>[6]</sup>理论,另一个是 Eshelby-Stroh 理论(一般称为 Stroh 理论或 Stroh 公式)。

前者在工程领域的应用比较广泛,而后者在材料科学、应用数学和物理领域日益得到关注。

对于位移  $u_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 与坐标  $x_3$  无关的二维各向异性弹性力学问题, Eshelby<sup>[7]</sup> 基于 Navier 方程提出了一种解决各向异性弹性问题的方法,该方法的显著特点是将矩阵运算引入弹性理论。在此基础上, Stroh<sup>[8,9]</sup> 提出了六维本征理论,该理论的应力和位移有着几乎一致的表达式。其后 Barnett 和 Lothe<sup>[10]</sup>、Ting<sup>[11]</sup> 等人的工作使 Stroh 公式更加完美和有力,这些成果被系统地总结在专著中<sup>[11]</sup>。目前, Stroh 公式已经成为解决二维各向异性弹性问题的有力工具。

对于含裂纹板的弯曲问题, Williams<sup>[12]</sup> 第一个用特征展开的方法推出基于经典板理论弯曲问题的尖端场。由于采用经典板理论研究裂纹问题存在严重的理论缺陷,所以后来大都采用更为合理的 Reissner 板理

\* 20040425 收到初稿, 20040526 收到修改稿。

\*\* 杨丽敏,女,1971年8月生,辽宁省鞍山市台安县人,汉族。中国科学院力学研究所博士研究生,主要研究方向为压电材料的强度分析。

论来研究含裂纹板弯曲问题<sup>[13~17]</sup>。上述求解应力强度因子的方法大都是针对含裂纹的无穷大板,柳春图<sup>[15]</sup>对含裂纹有限板应力强度因子的分析方法进行了深入研究。上述研究均针对各向同性材料,对于各向异性含裂纹板,基于经典板理论,Ang 和 Williams<sup>[18]</sup>给出正交各向异性无穷大板含有限裂纹受弯曲作用的完备解,Sih<sup>[19]</sup>用 Lekhnitskii 方法进一步扩展到含裂纹的各向异性板。Yuan<sup>[20]</sup>用 Stroh 公式给出基于 Reissner 板理论的各向异性板裂纹尖端场的渐近场,并用  $J$  积分和能量释放率的方法求解相关的应力强度因子。但是这种方法比较复杂和繁琐,对有限元的求解精度要求比较高。本文把文献[2]关于各向同性材料 Reissner 板应力强度因子的半权函数法推广到各向异性材料,给出与 Yuan<sup>[20]</sup>的各向异性板裂纹尖端场相对应的半权函数,进而由功能互等定理导出应力强度因子的表达式,结合有限元法,可以非常简捷并且较准确地求出含裂纹有限大各向异性板受弯曲、扭转和剪切作用时的应力强度因子。

## 2 各向异性板裂纹尖端的渐近场

取直角坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  进行研究,板厚为  $h$ ,板的上下表面为  $x_3 = \pm h/2$ ,含有一个穿透裂纹,如图 1 所示。考虑具有关于板中面 ( $x_3 = 0$ ) 的弹性对称面各向异性板,这种材料是单斜晶系,它的的弹性关系为

$$= s$$

其中

$$s = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 & 23 & 13 & 12 \\ 11 & 22 & 33 & 23 & 13 & 12 \\ s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & s_{55} & 0 \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix}^T$$

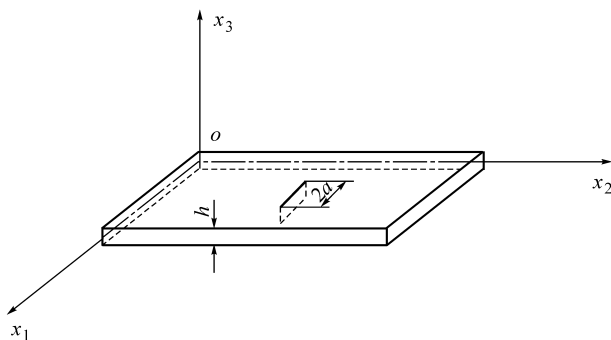


图 1 含裂纹板的几何形状示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the anisotropic cracked plate

$s_{ij}$  是弹性柔度系数。

各向异性 Reissner 型板的变形可用三个独立的广义位移分量描述,即中面挠度  $w$ 、变形前垂直于中面的直线段分别在  $ox_1x_3$  与  $ox_2x_3$  平面内的转角  $\phi_1$  和  $\phi_2$  (为了方便,此处定义的方向与 Yuan<sup>[20]</sup> 的方向相反)。由于只研究小变形,所以板内任意一点的直角坐标位移分量  $u, v$  和  $w$  可由这三个广义位移分量表示为

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 \cdot \phi_1(x_1, x_2) \\ v(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 \cdot \phi_2(x_1, x_2) \\ w(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Yuan<sup>[20]</sup> 给出上述各向异性板在裂纹尖端的渐近场,具体作法可参见原文献[20],渐近场首项以 Stroh 公式的形式来表示,  $\phi^{(0)}, w^{(0)}, M^{(0)}, Q^{(0)}$  为(以下公式中  $\phi_1$  和  $\phi_2$  是以本文定义的方向为正方向)

$$= \text{Re} \left[ \begin{matrix} B & z^{k+1} & B^{-1} g_k \end{matrix} \right] \quad (2)$$

$$- \frac{h}{2} \left[ \phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)} \right]^T = \text{Re} \left[ \begin{matrix} A & z^{k+1} & B^{-1} g_k \end{matrix} \right] \quad (3)$$

$$\frac{6}{h^2} \left[ M_{11}^{(0)}, M_{21}^{(0)} \right]^T = - \begin{matrix} (k+1) \text{Re} \left[ B & z^k & B^{-1} g_k \right] \end{matrix} \quad (4)$$

$$\frac{6}{h^2} \left[ M_{12}^{(0)}, M_{22}^{(0)} \right]^T = \begin{matrix} (k+1) \text{Re} \left[ B & z^k & B^{-1} g_k \right] \end{matrix} \quad (5)$$

$$= \begin{matrix} \text{Re} \left[ z_3^{k+1} \right] \end{matrix} \quad (6)$$

$$w^{(0)} = \frac{1}{\mu} \begin{matrix} \text{Im} \left[ z_3^{k+1} \right] \end{matrix} \quad (7)$$

$$\frac{1}{kh} \begin{Bmatrix} Q_1^{(0)} \\ Q_2^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \\ .2 \\ .1 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} (k+1) \text{Re} \left\{ \begin{Bmatrix} - \\ p \\ 1 \end{Bmatrix} z_3^k \right\} \end{matrix} \quad (8)$$

其中  $\phi$  为势函数,  $k = 5/6$ ,  $\mu = \mu_k$ ,  $\mu_k = (k-1)/2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $g_k$  是一个任意与  $k$  有关的常向量(特征矢量),并且有

$$g_k = \begin{bmatrix} g_{k1} & g_{k2} \end{bmatrix}^T = \begin{cases} \text{实数} & k = 0, 2, 4, \dots \\ \text{纯虚数} & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (9)$$

$\mu_k$  是一个与  $k$  有关的常数,并且有

$$\mu_k = \begin{cases} \text{实数} & k = 0, 2, 4, \dots \\ \text{纯虚数} & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (10)$$

$$z^{-1} = \begin{bmatrix} z_1^{-1} & 0 \\ 0 & z_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中  $z_i = x_1 + p_i x_2$ ,  $\text{Im}[p_i] > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。  $p_i$  是特征值,  $A$  是特征向量矩阵,  $B$  是与  $p_i$  和  $A$  有关的矩阵。  $p_i$ 、  $A$  和  $B$  只与材料弹性常数有关,具体数值可以参见文献[20],这里不再详细列出。上面的解对于具有不同特征值  $p$  的情况有效。裂纹尖端场的首项可以写为

$$\begin{cases} M_{11} \\ M_{21} \end{cases} = -\frac{h^2}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \left[ B \frac{p}{\sqrt{z}} B^{-1} \right] K \quad (12)$$

$$\begin{cases} M_{12} \\ M_{22} \end{cases} = -\frac{h^2}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \left[ B \frac{1}{\sqrt{z}} B^{-1} \right] K \quad (13)$$

$$\begin{cases} Q_1 \\ Q_2 \end{cases} = \frac{2h}{3} \frac{K_3}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \left\{ \begin{matrix} -p_3 \\ 1 \end{matrix} \right\} / \sqrt{z_3} \quad (14)$$

其中  $K = [K_2, K_1]^T$  和  $K_3$  分别是弯曲、扭转和剪切的应力强度因子,定义如下

$$K_1 = \frac{h}{2x_3} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r_{22}(r, 0, x_3) = \frac{6}{h^2} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r M_{22}(r, 0) \quad (15)$$

$$K_2 = \frac{h}{2x_3} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r_{12}(r, 0, x_3) = \frac{6}{h^2} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r M_{12}(r, 0) \quad (16)$$

$$K_3 = \left( 1 - 4 \frac{x_3^2}{h^2} \right)^{-1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r_{32}(r, 0, x_3) = \frac{3}{2h} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2} r Q_2(r, 0) \quad (17)$$

实常数  $K, K_3$  需要由外载荷和裂纹体的几何尺寸决定。

### 3 应力强度因子的积分表达式

如果两组状态在板内的作用力都为零,则板的功互等定理可以写为<sup>[2]</sup>

$$\int_C \left( Q_n^{(s)} w - M_n^{(s)} \phi_n - M_{ns}^{(s)} \phi_s \right) ds = \int_C \left( Q_n w^{(s)} - M_n \phi_n^{(s)} - M_{ns} \phi_s^{(s)} \right) ds \quad (18)$$

$C$  为任何一个围成单连通区域的闭合曲线。如果令外边界  $C = C_s + C_r + \dots$ , 其中  $C_r$  为去掉裂纹顶端后的顶端边界,  $C_s$  为裂纹面, 为裂纹顶端以外的弹性体的外边界, 它们的正方向如图 2 所示。

考虑裂纹面上

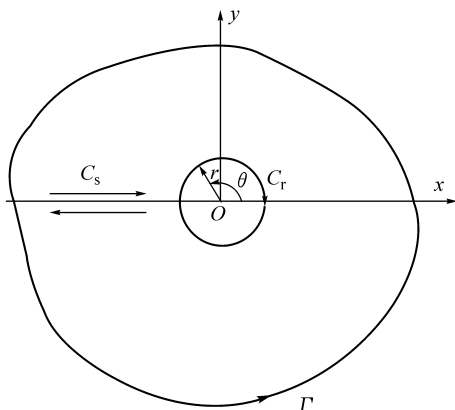


图 2 闭合曲线示意图

Fig. 2 The schematic diagram of closed integral path

$$Q_n = 0 \quad M_n = 0 \quad M_{ns} = 0$$

则式(18)经变换后化为

$$\int_{C_r} \left[ \left( Q_n^{(s)} w - M_n^{(s)} \phi_n - M_{ns}^{(s)} \phi_s \right) - \left( Q_n w^{(s)} - M_n \phi_n^{(s)} - M_{ns} \phi_s^{(s)} \right) \right] ds = \int_C \left[ \left( \bar{Q}_n^{(s)} w - \bar{M}_x^{(s)} \phi_x - \bar{M}_y^{(s)} \phi_y \right) - \left( \bar{Q}_n w^{(s)} - \bar{M}_x \phi_x^{(s)} - \bar{M}_y \phi_y^{(s)} \right) \right] ds \quad (19)$$

为了计算方便,上式可以改写为

其中  $\bar{M}_x = M_x \cos \theta + M_{xy} \sin \theta, \bar{M}_y = M_{xy} \cos \theta + M_y \sin \theta, \bar{Q}_n = Q_x \cos \theta + Q_y \sin \theta, \bar{M}_x^{(s)} = M_x^{(s)} \cos \theta + M_{xy}^{(s)} \sin \theta, \bar{M}_y^{(s)} = M_{xy}^{(s)} \cos \theta + M_y^{(s)} \sin \theta, \bar{Q}_n^{(s)} = Q_x^{(s)} \cos \theta + Q_y^{(s)} \sin \theta$ 。  $\bar{Q}_n^{(s)}, \bar{M}_x^{(s)}, \bar{M}_y^{(s)}, \phi_x^{(s)}, \phi_y^{(s)}, w^{(s)}$  是文献[1]定义的半权函数。半权函数满足以下三个条件, 满足平衡方程。在裂尖处有  $\lim_{r \rightarrow 0} u_i^{(s)} = O(r^{-1/2})$ 。满足裂纹面的边界条件。

当靠近裂尖的圆半径趋近于零时,把裂纹尖端场和半权函数代入式左端,其积分值可表示为

$$H_r = \int_{C_r} \left[ \left( \bar{Q}_n^{(s)} w - \bar{M}_x^{(s)} \phi_x - \bar{M}_y^{(s)} \phi_y \right) - \left( \bar{Q}_n w^{(s)} - \bar{M}_x \phi_x^{(s)} - \bar{M}_y \phi_y^{(s)} \right) \right] ds = c_{11} g_1 K_2 + c_{12} g_2 K_1 + c_{13} K_3 \quad (20)$$

式(19)右端远离裂纹尖端的数值解和半权函数沿路径的积分可以写为

$$H = \int_C \left[ \left( \bar{Q}_n^{(s)} w - \bar{M}_x^{(s)} \phi_x - \bar{M}_y^{(s)} \phi_y \right) - \left( \bar{Q}_n w^{(s)} - \bar{M}_x \phi_x^{(s)} - \bar{M}_y \phi_y^{(s)} \right) \right] ds = c_{21} g_1 + c_{22} g_2 + c_{23} \quad (21)$$

其中  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}$  为积分结果的常数部分。由于  $H_r = H$ , 且  $g_1, g_2$  为任意实常数,所以必有

$$K_1 = c_{22} / c_{12} \quad (22)$$

$$K_2 = c_{21} / c_{11} \quad (23)$$

$$K_3 = c_{23} / c_{13} \quad (24)$$

因此只要已知裂纹体沿路径  $\Gamma$  上的板的广义位移和内力分量,就可以分别求出三种类型裂纹的应力强度因子。裂纹体沿路径  $\Gamma$  上的板的广义位移和内力分量可以通过多种数值方法得到,例如能量法、配点法、有限元法等。

### 4 半权函数的获得

根据半权函数的定义,令  $k = -3/2$ ,由式(2)~(8)可以得到相应的半权函数为

$$-\frac{h}{2} [\phi_1^{(s)}, \phi_2^{(s)}]^T = \text{Re} [A z^{-\frac{1}{2}} B^{-1} g] \quad (25)$$

$$\frac{6}{h^2} [M_{11}^{(s)}, M_{21}^{(s)}]^T = \frac{1}{2} \text{Re} [B p z^{-\frac{3}{2}} B^{-1} g] \quad (26)$$

$$\frac{6}{h^2} [M_{12}^{(s)}, M_{22}^{(s)}]^T = -\frac{1}{2} \text{Re} [B z^{-\frac{3}{2}} B^{-1} g] \quad (27)$$

$$w^{(s)} = \frac{1}{\mu} \text{Im} [z_3^{-\frac{1}{2}}] \quad (28)$$

$$\frac{1}{kh} \begin{Bmatrix} Q_1^{(s)} \\ Q_2^{(s)} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \begin{Bmatrix} -p_3 \\ 1 \end{Bmatrix} z_3^{-\frac{3}{2}} \right\} \quad (29)$$

其中  $g = [g_1, g_2]^T$ , 都是任意实常数

$$z_i = r(\cos \theta + p_i \sin \theta) \quad i = 1, 2, 3$$

$$f(z; p) = \text{diag} [f(z_1; p_1), f(z_2; p_2)]$$

本文将采用有限元软件 Ansys 来获取裂纹体沿路径上的板的广义位移和内力分量,同时把半权函数代入应力强度因子的积分表达式,然后利用数学计算软件 Mathematica 计算回路的积分,从而得到应力强度因子的数值。

### 5 算例

文献[20]用  $J$  积分和能量释放率的方法计算了 AS4 复合材料板受纯弯曲作用的应力强度因子,这种复合材料的材料常数为  $E_x = 35.102 \text{ GPa}$ ,  $E_y = 77.307 \text{ GPa}$ ,  $E_z = 10.55 \text{ GPa}$ ,  $G_{xy} = 19.103 \text{ GPa}$ ,  $G_{yz} = 4.413 \text{ GPa}$ ,  $G_{xz} = 3.93 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{xy} = 0.2$ ,  $\nu_{yz} = 0.29$ ,  $\nu_{xz} = 0.22$ , 其中  $X$  和  $Y$  是材料的弹性主轴方向,  $Z$  是板厚的方向。取板的长度为  $L = 50 \text{ cm}$ , 宽度为  $2W = 25.4 \text{ cm}$ , 厚度为  $2.54 \text{ cm}$ , 裂纹长度  $a/W$  分别取 0.2、0.4、0.6、

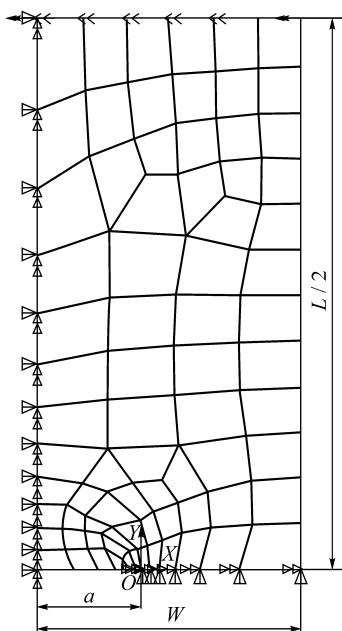


图3 四分之一板的有限元模型

Fig.3 Finite element model of the plate under pure bending

0.8 进行计算,在垂直于裂纹方向板的远处边界作用弯矩  $M_0 = 4.45 \text{ kN/m}$ 。由于对称,在有限元分析中取板的四分之一作为研究对象,模型如图3所示,单元采用考虑剪切效应的壳单元 SHELL43,取材料主轴方向  $X$  垂直于裂纹线的方向。积分路径取为以裂纹尖端为圆心的半个圆弧,计算结果如表1所示。

表1 应力强度因子  $K_I / (\text{kN} \cdot \text{m}^{-3/2})$  的计算结果的比较

$a/W$	$K_I^a$ (Yuan <sup>[20]</sup> )	$K_I^b$	$K_I^c$	误差 Error/ % $(K_I^b - K_I^c) / K_I^a \times 100\%$
		(本文解) (Method in this paper)	(本文解) (Method in this paper)	
0.2	10.158	9.803	10.286	1.3
0.4	14.299	12.53	13.648	3.5
0.6	19.838	17.571	20.974	5.7
0.8	32.148	29.895	32.247	0.31

表1列出采用本文方法求得的应力强度因子  $K_I$  与已有结果 (Yuan<sup>[20]</sup>) 的比较。 $K_I^a$  是 Yuan<sup>[20]</sup> 用能量释放率和  $J$  积分计算的应力强度因子,  $K_I^b$  和  $K_I^c$  分别是采用本文方法,在节点数分别为 119 和 394 情况下计算的应力强度因子。 $K_I$ 。网格划分如图3所示,在不同节点数的情况下,对不同路径的计算结果进行过比较,结果表明应力强度因子与积分路径无关,可以选择远离裂纹尖端奇异场的积分路径,从而获得高精度的结果。从表1可看出,采用本文方法计算时,网格的多少对应应力强度因子计算精度的影响不大,因此可以用比较粗的网格来划分模型。即用很少的单元数就可以得到精度较高的结果。文献[20]是用能量释放率和  $J$  积分的方法结合有限元来计算应力强度因子的。由于这种方法的计算精度与裂纹尖端的计算精度密切相关,需要对裂尖附近的网格进行细化,所以需采用大量的网格才能达到理想的精度。由上述讨论可知,本文方法将大大节省计算时间和计算机空间,并且具有可靠的精度。

### 6 结论

- 1) 由功能互等定理导出用半权函数表示的各向异性板应力强度因子的解析表达式。
- 2) 给出基于 Reissner 板理论含裂纹的各向异性板受弯曲、扭转和剪切作用的半权函数。
- 3) 计算含中心裂纹四边自由受纯弯曲作用板的应力强度因子,与有关结果进行比较表明,本文方法简便、可靠。

### References

- 1 Liu Chuntu, Zhang Duanzhong. Semi-weight function method in fracture mechanics. International Journal of Fracture, 1991, 48: R3 ~ R8.
- 2 LIU ChunTu, ZHOU MingXing. Semi-weight function method for computing Reissner plate's stress intensity factor. In: Mechanics and

- Engineering. Beijing:Tsinghua University Press, 1999. 164 ~ 169(In Chinese) (柳春图,周明星. 计算 Reissner 板应力强度因子的半权函数法. 见:工程与力学,北京:清华大学出版社,1999. 164 ~ 169).
- 3 MAI KaiPing. Semi-weight function method in fracture mechanics [Ph D Thesis]. Beijing: Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2003(In Chinese) (马开平. 关于断裂力学中半权函数法的研究 [博士学位论文]. 北京:中国科学院力学研究所, 2003).
  - 4 MAI KaiPing, LIU ChunTu. Semi-weight function method on computation of mixed-mode stress intensity factors. Journal of Mechanical Strength, 2003, 25(5):576 ~ 579 (In Chinese) (马开平, 柳春图. 计算平面、型复合应力强度因子的半权函数法. 机械强度, 2003, 25(5): 576 ~ 579).
  - 5 MAI KaiPing, LIU ChunTu. Semi-weight function method on computation of stress intensity factors in dissimilar materials. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2004, 21:44 ~ 49(In Chinese) (马开平, 柳春图. 双材料界面裂纹平面问题的半权函数法. 应用力学学报, 2004, 21: 44 ~ 49).
  - 6 Lekhnitskii S G. Theory of elasticity of an anisotropic body. Moscow: Mir Publisher, 1981.
  - 7 Eshelby J D. Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory. Acta Metall, 1953, 1: 251 ~ 259.
  - 8 Stroh A N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. Philosophical Magazine, 1958, 3: 625 ~ 646.
  - 9 Stroh A N. Steady state problems in anisotropic elasticity. Journal of Mathematics and Physics, 1962, 41: 77 ~ 103.
  - 10 Barnett D M, Lothe J. Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Greens function and surface waves in anisotropic elastic solids. Phys Norv, 1973, 7:13 ~ 19.
  - 11 Ting T C T. Anisotropic elasticity: theory and applications. Oxford: Oxford University Press, 1996.
  - 12 Williams M L. The bending stress distribution at the base of stationary crack. Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, 1961, 28: 78 ~ 82.
  - 13 Hartranft R J, Sih G C. Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks. Journal of Mathematics and Physics, 1968, 47:276 ~ 291.
  - 14 Knowles J K, Wang N M. On the bending of an elastic plate containing a crack. Journal of Mathematics and Physics, 1960, 39:223 ~ 236.
  - 15 LIU ChunTu, JIANG ChiPing. Fracture mechanics for plates and shells. Beijing: National Defense Industry Press, 2000(In Chinese) (柳春图, 蒋持平. 板壳断裂力学. 北京:国防工业出版社, 2000).
  - 16 Tamate O A. A theory of dislocations in the plate under flexure with application to crack problems. Technology Reports, Tohoku University, 1975, 40: 67 ~ 88.
  - 17 Wang N M. Effects of plate thickness on the bending of an elastic plate containing a crack. Journal of Mathematics and Physics, 1968, 47: 371 ~ 390.
  - 18 Ang D D, Williams M L. Combined stresses in an orthotropic plate having a finite crack. Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, 1961, 28: 372 ~ 378.
  - 19 Sih G C. Cracks in composition materials. In: Mechanics of fracture, Vol.6. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1981. 76 ~ 87.
  - 20 Yuan F G, Yang S. Asymptotic crack-tip fields in an anisotropic plate subjected to bending, twisting moments and transverse shear loads. Composites Science and Technology, 2000, 60: 2 489 ~ 2 502.