

风沙两相流跃移层中沙粒相的速度分布¹⁾

朱久江 戚隆溪

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

匡震邦

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

摘要 从单个跃移沙粒在气流中的运动方程出发导出了风沙两相流中沙粒相速度分布函数的 Boltzmann 方程. 对风沙流研究中几种不同的分布函数及其相应的统计平均值等基本概念给出了严密的数学定义, 指出了不同分布函数之间的区别和联系. 在略去铅垂方向空气阻力的情况下, 给出了沙粒相速度分布函数沿铅垂方向的边缘分布, 作为风沙流中跃移理论的主要基础之一. 利用结果对前人在风沙流研究中发现的某些重要规律和现象进行了解释.

关键词 风沙两相流, 跃移层, 速度分布函数, Boltzmann 方程, 边缘分布

引 言

风沙流是发生在大气边界层中的两相湍流流动, Bagnold^[1] 将风沙流的运动形式划分为悬移、跃移和蠕移三种基本形式, 其中跃移运动粒子占据整个风沙运动颗粒的大多数, 它运动速度快, 是沙量传输的主要机制, 并且是对工农业生产造成巨大危害的主控因素. 人们经过长期研究之后发现^[2,3], 在风沙流中, 沙粒相的运动机理为: 空气流动导致地表的沙粒产生水平方向的运动, 粒子间的相互碰撞产生铅垂方向的速度分量, 跃起的沙粒在气流中获得能量继续运动, 在重力作用下又产生下落运动; 下落的跃移沙粒冲击地面, 蠕移层内粒子的相互碰撞导致部分沙粒获得铅垂方向的速度分量, 原下落的沙粒在碰撞过程中则失去能量. 这样跃移层与蠕移层之间不断发生质量、动量和能量的交换. 沙粒在地表发生的碰撞过程, 使得每颗沙粒的运动完全是随机无序的. 只着眼于单个沙粒的运动, 无法解决风沙流的本质问题, 因此把握沙粒的群体运动规律是必要的. Owen^[4] 假定所有跃移粒子都以相同的速度沿铅垂方向起跃, 首次提出了气相切应力 (指总切应力中气体分担的部分)、粒子切应力 (指沙粒分担的切应力部分) 和动力学粗糙度等重要概念, 但单一轨道假定显然偏离实际情况太远. 因此人们对风沙流中起跃粒子的发射速度分布提出各种假定, 并通过高速摄影、频闪摄影或激光光纤探头等直接对起跃粒子的速度进行实验观测^[5~7]. 但由于以往对速度分布函数的概念和假定有一些问题 (如 Anderson & Hallet^[8] 和 Raupach^[9]), 导致了理论和实验结果明显相违背. 现有的实验资料表明: 在风沙流中沙粒相是稀相, 即使在相当高的风速下, 靠近地表处粒子相所占的体积分数也只有 10^{-4} 量级. 沙粒的跃移一般只在 10 cm 高度以内发生, 沙粒的流量与密度沿高度急骤衰减, 绝大多数沙粒均在 2 cm 高度内运动. 人们的实验^[7,10,11] 还揭示了沙粒的密度沿高度呈指数衰减.

1999-04-27 收到第一稿, 1999-12-23 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重点基金资助项目 (19832060).

80 年代后期 Jensen & Sorensen^[12] 对 Williams^[13] 在 60 年代中期的实验数据进行了重新分析, 也得出了起跃粒子数与所能到达的最大高度之间满足指数衰减的规律. 本文的目的是从单个跃移沙粒在气流中的运动方程出发, 建立风沙两相流中跃移沙粒速度分布函数的 Boltzmann 方程. 在略去铅垂方向空气阻力的情况下, 导出沙粒相速度分布函数沿铅垂方向的边缘分布, 并以此作为风沙流跃移理论的主要基础之一, 对前人在风沙流研究中发现的重要现象进行统一解释, 找出它们之间的内在联系和规律.

1 单颗粒在流场中的运动

设空气的密度为 ρ_a , 黏性系数为 μ_a , 气流速度为 \mathbf{u} , 球形沙粒的直径为 D , 质量密度为 ρ_p , 于是它的质量为: $m = (1/6)\pi D^3 \rho_p$. 在重力场中, 沙粒的运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

其中 \mathbf{v} 和 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_D + m\mathbf{g}$ 分别为沙粒的运动速度和承受的总作用力; g 为重力加速度, \mathbf{F}_D 为黏性阻力. 对于孤立圆球情况

$$\mathbf{F}_D = C_D \frac{1}{2} \rho_a |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{1}{4} \pi D^2 = k_D (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (2)$$

其中 C_D 为黏性阻力系数. 引入粒子的滑移 Reynolds 数 $Re = \rho_a D |\mathbf{u} - \mathbf{v}| / \mu_a$, 一般说来阻力系数 C_D 只是 Re 的函数. 在流体力学中, 根据大量实验数据拟合出圆球阻力系数“标准曲线”, 其覆盖的 Re 数范围为 $10^{-1} \sim 10^6$. 通常可将 C_D 近似表示为^[14]

$$C_D = \frac{24}{Re} f_D(Re) \quad (3)$$

由式 (2), (3) 可得

$$k_D = 3\pi\mu_a D f_D(Re) \quad (4)$$

当 $Re \leq 500$ 时, 由式 (3) 给出的阻力系数与标准阻力系数相差不大于 5%; 当 $Re \leq 1$ 时, $f_D(Re) \approx 1$, 这时式 (3) 就退化为 Stokes 阻尼. 粒子运动方程 (1) 可改写为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \beta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{g} \quad (5)$$

其中

$$\beta = \frac{k_D}{m} = \frac{f_D(Re)}{\tau_v} \quad (6)$$

式 (6) 中 $\tau_v = \rho_p D^2 / 18\mu_a$ 为粒子运动的速度松弛时间, 它反映了粒子对气流的跟随特性, 即在 Stokes 阻力情形下, 粒子与气流的相对速度衰减到其初始值的 e^{-1} 所需要的时间.

在式 (1) 和式 (2) 中, 我们只计入了粒子相对于气流的时均速度所产生的阻力, 而没有考虑由于气流湍流脉动所产生的随机阻力. Anderson^[15] 和 Tsoar & Pye^[16] 曾详细讨论过随机力对粒子运动的影响并采用 Rouse 数来描述这种影响. 本文只限于研究跃移粒子的运动, 此时 $Ro = \tau_v g / (\kappa u) \gg 1$, 在此情况下, 粒子通过气流时来不及对高频的气流脉动产生响应, 随机力的作用可略去不计. 这一点也可以通过风洞实验中粒子运动轨迹的光滑性得到证实.

2 沙粒相速度分布函数的 Boltzmann 方程

2.1 沙粒相的速度分布函数

根据前述的风沙流特点, 我们对跃移运动作如下假定: (1) 沙粒都有相同的粒径和质量. (2) 跃移层内沙粒的运动是混乱无序的, 粒子的宏观运动状态可以用沙粒相速度分布函数加以描述. (3) 沙粒的转动效应可以略去不计. (4) 沙粒对气流湍流脉动不产生响应.

设直角坐标系 (x, y, z) 的 oxy 平面在铅垂平面内, oy 轴沿铅垂方向 (向上为正), z 轴在水平面内. 若 t 时刻粒子处于空间点 $r(x, y, z)$, 运动速度为 v , 气流施于该粒子上的作用力为 $F(v, r, t)$. 如前所述, 我们只关心粒子的群体运动特性, 为此引入速度分布函数 $f(v, r, t)$. 这样, 在 t 时刻位于空间点 r 处的体积元 $d\Omega_r (= dx dy dz)$ 内运动速度介于 v 与 $v + dv$ 之间的粒子数为 $f(v, r, t)d\Omega_r d\Omega_v$ (其中 $d\Omega_v = dv_x dv_y dv_z$). 若以 $\mathcal{D}_C f$ 表示某空间固定点处因粒子间的相互碰撞而引起的速度分布函数 f 的变化率, 则沙粒相速度分布函数的 Boltzmann 方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{m} F \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{m} f \frac{\partial}{\partial v} \cdot F = \mathcal{D}_C f \quad (7)$$

式中 $(\partial/\partial v) \cdot F$ 表示间隙流体对沙粒的黏性阻尼. 经典气体分子运动论中的 Boltzmann 方程未包括这一项. 由于在跃移层内粒子为稀相, 故在下文中将忽略碰撞效应.

2.2 粒子属性及其测量

设在 t 时刻及空间点 r 处, 沙粒相的数密度为 $n(r, t)$. 对于任意的粒子属性 ψ , 定义它对应的宏观量为平均值

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{n} \int \psi(v, r, t) f(v, r, t) d\Omega_v \quad (9)$$

这里, $\psi = \psi(v, r, t)$ 可以是标量, 矢量或张量. 其中积分遍及整个速度空间 (下文中若不对积分限作明确规定, 则认为是遍及整个速度空间), 特别是当 $\psi = v$ 时, $\bar{v} = \langle v \rangle$ 为沙粒相的平均速度. 引入沙粒相的脉动速度

$$C = v - \bar{v} \quad (10)$$

由式 (10) 可将任意的粒子属性 ψ 写成脉动速度 C 的函数, 即

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{n} \int \psi(C, r, t) f(C, r, t) d\Omega_C \quad (11)$$

设平面 π 以速度 v_π 运动, 其法线方向为 N , 于是粒子相对于平面 π 的运动速度 C_π 为

$$C_\pi = v - v_\pi = \bar{v} + C - v_\pi \quad (12)$$

对于平面 π 上的面元 ds , 在 dt 时间内, 穿越该面元 ds 且脉动速度介于 $C \rightarrow C + dC$ 之间的粒子数为 $C_\pi \cdot N f(C, r, t) d\Omega_C ds dt$. 这里特别考虑以下两种情况:

(1) 当 $v_\pi = \bar{v}$ 时, 即平面 π 随沙粒相的平均速度一起平动. 此时 $C_\pi = C$, 于是单位时间单位面积内粒子属性 $\psi(C, r, t)$ 的净通量为

$$\int N \cdot C \psi(C, r, t) f(C, r, t) d\Omega_C = N \cdot n \langle C \psi(C, r, t) \rangle \quad (13)$$

式中 $n\langle C\psi(C, r, t) \rangle$ 称之为粒子属性 $\psi(C, r, t)$ 的通量矢, 如果 ψ 为矢量或张量, 则 $C\psi$ 为两者的张量积. 必须注意式 (13) 中积分遍及穿越平面 π 的所有粒子, 即包括由正面穿越到负面和负面穿越到正面的所有粒子, 因此将其称为净通量, 即正通量与负通量的代数和. 特别地, 当 $\psi(C, r, t) = mC$ 时有

$$n\langle C\psi(C, r, t) \rangle = mn\langle CC \rangle = \rho\langle CC \rangle = -\sigma^k$$

即

$$\sigma^k = -\rho\langle CC \rangle \quad (14)$$

其中 $\rho = mn$ 为宏观平均的沙粒相密度, σ^k 为沙粒相的传输应力张量. 令 $P^k = -\sigma^k$ 为传输压应力张量, 则有

$$P^k = \rho\langle CC \rangle \quad (15)$$

式 (14) 与湍流理论中的 Reynolds 应力张量的定义是十分相似的.

例如取平面 π 为水平面 oxz , N 沿 y 轴正方向, 于是 $N \cdot C = C_y$; 再取 $\psi = mC_y$ (即粒子沿 y 轴方向的动量), 于是式 (13) 的左端便是单位时间单位面积内粒子穿越水平面时所携带的 y 方向动量的净通量, 其右端为 $n\langle C_y mC_y \rangle = \rho\langle C_y^2 \rangle = P_{22}$ (即 y 方向的压应力).

(2) 当 $v_\pi = 0$ 时, 即平面 π 为固定平面. 令单位时间单位面积内穿越固定平面 π 且速度介于 $v \sim v + dv$ 之间的粒子数为 $(v, r, t P_N) d\Omega_v$, 则

$$P_N(v, r, t) = v \cdot N f(v, r, t) = v_N f(v, r, t) \quad (16)$$

$P_N(v, r, t)$ 实际上是粒子穿越某一固定平面的速度分布函数 (即穿面速度分布函数), 这便是目前文献中广泛使用的“速度分布函数”. 它与前面提出的速度分布函数 $f(v, r, t)$ 是不同的. 式 (16) 在风沙流研究中有着重要的应用价值.

2.3 二维问题的速度分布函数

在风沙流中粒子横向运动速度通常很小, 若不计粒子 z 方向的速度分量, 便简化为二维问题. 此时有

$$f(v, r, t) = f(v_x, v_y, x, y, t)$$

令 $P(v_x, v_y, x, y, t) dv_x dv_y$ 为单位时间单位面积内, 穿越高度 y 的水平平面且速度介于 $v \sim v + dv$ 之间的粒子数, 由式 (16) 可得

$$P(v_x, v_y, x, y, t) = v_y f(v_x, v_y, x, y, t) \quad (17)$$

设 n^+ 为单位时间单位面积内, 由高度为 y 的水平面的负侧穿越到正侧的发射粒子数, 则

$$n^+ = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v_x, v_y, x, y, t) dv_x dv_y = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_y f(v_x, v_y, x, y, t) dv_x, dv_y \quad (18)$$

在研究风沙流问题中, 有时需要在速度空间中采用极坐标 (v, θ) . 令 $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$, 则 $P(v, \theta, x, y, t) = P(v \cos \theta, v \sin \theta, x, y, t)$. 于是 n^+ 可表示为

$$n^+ = \int_0^\pi \int_0^{+\infty} v P(v, \theta, x, y, t) dv d\theta \quad (19)$$

在单位时间单位面积内由高度为 y 的水平平面的负侧穿越到正侧的粒子中, 定义速率介于 $v \sim v + dv$ 之间的粒子数为 $P^+(v, x, y, t)dv$, 角度介于 $\theta \sim \theta + d\theta$ 之间的粒子数为 $P^+(\theta, x, y, t)d\theta$, 则

$$P^+(v, x, y, t) = v \int_0^\pi P(v, \theta, x, y, t) d\theta \quad (20)$$

$$P^+(\theta, x, y, t) = \int_0^{+\infty} P(v, \theta, x, y, t) v dv \quad (21)$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi$. 与式 (9) 和式 (11) 类似, 可以定义粒子属性 ψ 的另一种平均值

$$\langle \psi \rangle^+ = \frac{1}{n^+} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi P(v_x, v_y, x, y, t) dv_x dv_y \quad (22)$$

从式 (9) 和式 (22) 可以看出 $\langle \psi \rangle$ 与 $\langle \psi \rangle^+$ 是两种完全不同的统计平均值. 通常在风沙流实验中所作的起跃粒子速度分布的频率图就是 $P^+(v)/n^+$ 的频率图^[6]. 与式 (18), 式 (20)~(22) 类似, 我们还可以定义由高度为 y 的水平面的正侧穿越到负侧的入射粒子的速度分布函数, 如 $P^-(v)$, $P^-(\theta)$, $\langle \psi \rangle^-$ 和 n^- 等, 这里不再赘述.

3 充分发展的二维定常边界层中沙粒相沿铅垂方向的边缘速度分布

对于充分发展的二维定常边界层流动, 所有宏观量都不随 x, z, t 而变化, 于是 $f(v, r, t) = f(v_x, v_y, y)$. 此时粒子相的平均速度只有 x 方向的分量不为零, 而且 $\bar{v}_x = \bar{v}_x(y)$. 定义 y 方向的边缘速度分布

$$b_y(v_y, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, r, t) dv_x \quad (23)$$

在风沙流的跃移运动中, 沿 y 方向的空气阻力比重力小得多, 粒子的运动轨迹主要由 y 方向的重力和 x 方向的阻力确定. 此时, 对于充分发展的二维定常边界层流动, 利用式 (1) 和式 (2), Boltzmann 方程可化为

$$v_y \frac{\partial f}{\partial y} - g \frac{\partial f}{\partial v_y} + \frac{\partial}{\partial v_x} \left[\frac{k_D}{m} (u(y) - v_x) f \right] = 0 \quad (24)$$

其中 $u(y)$ 为风速. 注意到 $\lim_{|v_x| \rightarrow +\infty} [u(y) - v_x] f = 0$ 且 $\bar{v}_y = 0$, 因而 $v_y = C_y$, $b_y = b_y(C_y, y)$, 从而有

$$C_y \frac{\partial b_y}{\partial y} - g \frac{\partial b_y}{\partial C_y} = 0 \quad (25)$$

令

$$\begin{cases} \zeta = 2gy + C_y^2 \\ \eta = 2gy - C_y^2 \end{cases}$$

则式 (25) 化为 $\partial b_y / \partial \eta = 0$, 从而 $b_y = b_y(\zeta)$ 即

$$b_y = b_y(\zeta) = b_y(2gy + C_y^2) \quad (26)$$

由式 (26) 可知, 只要能求得某一特定高度的边缘速度分布, 比如 $y = 0$ 时的分布 $b_y = b_y(C_y^2)$, 则任意高度 y 处的分布就由式 (26) 确定了. 由密度和传输压力张量的定义式 (8) 以及式 (15)

分别可得

$$\rho(y) = mn = m \int_{-\infty}^{+\infty} b_y(2gy + C_y^2) dC_y = 2m \int_0^{+\infty} b_y(2gy + C_y^2) dC_y \quad (27)$$

$$P_{22}(y) = \rho \langle C_y^2 \rangle = m \int_{-\infty}^{+\infty} C_y^2 b_y(2gy + C_y^2) dC_y = 2m \int_0^{+\infty} C_y^2 b_y(2gy + C_y^2) dC_y \quad (28)$$

即

$$\frac{dP_{22}}{dy} = 2mg \int_0^{+\infty} 2C_y^2 b'_y(2gy + C_y^2) dC_y = 2mg \int_0^{+\infty} C_y^2 \frac{\partial b_y(2gy + C_y^2)}{\partial C_y} dC_y = -\rho g$$

上式中已利用分部积分, 并计及 $2mgC_y b_y(2gy + C_y^2)|_0^{+\infty} = 0$ 和式 (27). 这样, 我们有

$$\frac{dP_{22}}{dy} + \rho g = 0 \quad (29)$$

由于 $\lim_{y \rightarrow +\infty} P_{22} = 0$, 对上式积分可得

$$P_{22}(y) = \int_y^{+\infty} \rho(y) g dy \quad (30)$$

即传输压应力 P_{22} 等于单位面积内高度大于 y 的所有跃移粒子的自重. 记 $M_{22}(y) = \langle C_y^2 \rangle$, 则 $P_{22}(y) = \rho M_{22}(y)$, 式 (29) 可改写为

$$\frac{d(\rho M_{22})}{dy} + \rho g = 0 \quad (31)$$

风沙流风洞实验表明, 密度 ρ 沿高度急剧变化, 用负指数函数, 即 $\rho = \rho_0 e^{-\lambda y}$ (其中 ρ_0 和 λ 为大于 0 的常数), 进行拟合是一种比较理想的近似. 从而由式 (31) 可得

$$dM_{22}/dy - \lambda M_{22} + g = 0$$

积分得

$$M_{22} = Ae^{-\lambda y} + g/\lambda$$

其中 A 为积分常数. 注意到 $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\rho M_{22}) = 0$ 要求 $A = 0$, 所以在不考虑 y 方向空气阻尼的情况下可得: $M_{22} = g/\lambda = \text{const}$, 从而有

$$\rho = \rho_0 e^{-gy/M_{22}} \quad (32)$$

注意到

$$M_{22}(y) = \langle C_y^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} C_y^2 b_y dC_y = \frac{2m}{\rho_0} \int_0^{+\infty} e^{\frac{gy}{M_{22}}} C_y^2 b_y dC_y$$

实验和理论分析都表明 M_{22} 与 y 无关, 而 M_{22} 与 y 无关的充要条件是

$$b_y(C_y, y) = b_y(\zeta) = n(y) \left(\frac{1}{2\pi M_{22}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{C_y^2}{2M_{22}}}; \quad n(y) = n_0 e^{-\frac{gy}{M_{22}}} \quad (33)$$

其中 $n_0 = \rho_0/m$ 为 $y = 0$ 处的粒子数密度. 由式 (18) 可得

$$n^+ = n(y) \left(\frac{M_{22}}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = n_0^+ e^{-\frac{gy}{M_{22}}} \quad (34)$$

其中 n_0^+ 为单位时间单位面积内从 $y = 0$ 向上发射的粒子数, 由式 (17) 可得

$$P(C_y, y) = n^+ \frac{C_y}{M_{22}} e^{-\frac{C_y^2}{2M_{22}}} = n_0^+ \frac{C_y}{M_{22}} e^{-\frac{2gy + C_y^2}{2M_{22}}} \quad (35)$$

由式 (33) 和式 (34) 知 $P(C_y)$ 为标准的 Rayleigh 分布, $b_y(C_y)$ 为标准的正态分布. 在风沙流研究中经常要用到按下式定义的平均跃移高度和长度

$$\bar{h} = \langle h \rangle_P = \frac{1}{n_0^+} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v_{0x}, v_{0y}) h(v_{0x}, v_{0y}) dv_{0x} dv_{0y} \quad (36)$$

$$\bar{l} = \langle l \rangle_P = \frac{1}{n_0^+} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v_{0x}, v_{0y}) l(v_{0x}, v_{0y}) dv_{0x} dv_{0y} \quad (37)$$

在不计 y 方向空气阻力的情况下, 初速度为 (v_{0x}, v_{0y}) 的起跃粒子所能到达的最大高度 $h = v_{0y}^2/2g$. 式 (36) 又可写为

$$\bar{h} = \frac{1}{n_0^+} \int_0^{+\infty} v_{0y} b_y(v_{0y}) h(v_{0y}) dv_{0y} = \frac{1}{n_0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v_{0y}) h(v_{0y}) dv_{0y} \quad (38)$$

将 $h = v_{0y}^2/2g$ 和式 (35) 代入式 (38) 可得 $\bar{h} = M_{22}/g$, 即

$$M_{22} = g\bar{h} \quad (39)$$

定义 $P^*(h)$ 为单位时间单位面积内从 $y = 0$ 平面向上发射的粒子中所能到达的最大高度介于 $h \sim h + dh$ 之间的粒子数为 $P^*(h)dh$, 则

$$P^*(v_{0y})dv_{0y} = n_0^+ \frac{g}{M_{22}} e^{-\frac{gh}{M_{22}}} dh$$

所以

$$P^*(h) = n_0^+ \frac{g}{M_{22}} e^{-gh/M_{22}} \quad (40)$$

Jensen & Sorensen^[12] 对 Williams^[13] 的实验数据进行了重新分析, 得出了 $P^*(h)$ 与 h 呈指数衰减的规律^[10], 这再一次证实了本节得出的速度分布函数的正确性. 从以上分析中, 我们还可看出以下几个结论是相互等价的:

- (1) $P(C_y)$ 为 Rayleigh 分布;
- (2) $b_y(C_y)$ 为正态分布;
- (3) $P^*(h)$ 为正态分布;
- (4) ρ 与 y 呈指数衰减关系 (见图 1);

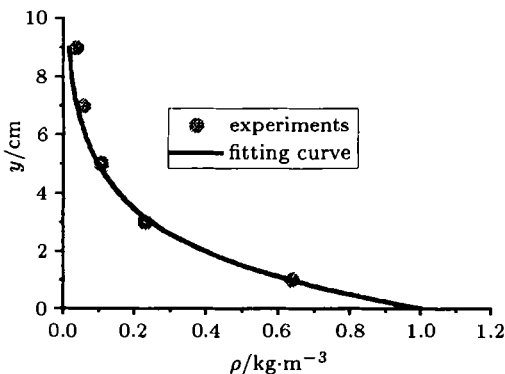


图 1 沙粒密度随高度的分布

Fig.1 Density distributions of particle phase with height

(5) M_{22} 恒为常数.

需要指出, 以上结论是在不考虑空气阻尼情况下得到的. 正如董飞^[17]所指出的, 如果考虑空气阻尼必然导致以上结论和实际情况有所偏差. 吴正^[10], Jensen & Sorensen^[12]以及本文的实验表明忽略空气阻尼, 是一种较为合理的近似.

注意到 $\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v_{0x}, v_{0y})l(v_{0x}, v_{0y})dv_{0x}dv_{0y}$ 实际上就是单位宽度上的总输沙率 Q , 因此由式 (37) 可得

$$Q = n_0^+ \bar{l} \quad (41)$$

式 (33), 式 (34) 和式 (41) 等对风沙流实验非常有用, 它们能使宏观测试和微观测试联系起来, 相互取长补短, 又能互相验证. 比如说, 如果我们从宏观上能够测出密度随高度的衰减率, 就可以由式 (33) 计算出 M_{22} 来. 反之, 如果我们对沙粒的微观运动进行大量随机抽样并计算出 M_{22} , 就可以预报密度随高度变化的衰减率. 同样由式 (41), 如果知道 Q 和 n_0^+ 便可求出 \bar{l} ; 反之, 若已知 n_0^+ 和 \bar{l} 又可求出 Q 来. 一般说来, 宏观测试较微观测试更容易操作.

设在单位时间单位面积内, 由高度为 $y = 0$ 的水平面起跃的粒子中, 速率介于 $v_0 \sim v_0 + dv_0$ 之间, 角度介于 $\theta_0 \sim \theta_0 + d\theta_0$ 之间的粒子数为 $P^+(v_0, \theta_0)d\theta_0 v_0 dv_0$, 设起跃速率为 v_0 起跃角度 θ_0 的粒子跃移长度为 $l(v_0, \theta_0)$. 定义起跃角度 θ_0 的粒子平均跃移长度为

$$l^+(\theta_0) = \int_0^{+\infty} P^+(v_0, \theta_0)l(v_0, \theta_0)v_0 dv_0 \quad (42)$$

则

$$Q = n_0^+ \bar{l} = \int_0^\pi l^+(\theta_0)d\theta_0 \quad (43)$$

4 实验结果及其与理论比较

本文还进行了风沙两相流的风洞模拟实验, 实验中, 采用集沙仪测量了输沙量 (见图 1), 采用频闪摄影技术测量了运动沙粒的速度 (见图 2). 从图 2 和已有文献上的实验结果 (如 White & Schulz^[5] 的图 6, White^[6] 的图 6 和图 7, Nalphis et al.^[7] 的图 6 和图 7) 都可以看出频率分布的一个重要特点: 当速度趋近于零时频率分布也趋于零, 而且分布形式呈现出幅值越大的方向变化越缓慢的特点. 这些足以说明本文的结论是正确的. 以往有人认为: 实验结果中, 当速度趋近于零时速度分布的频率也趋于零完全是实验误差造成的. 本文认为, 虽然低速粒子较之高速粒子而言更难拍摄到, 这会对实验结果产生一定的影响, 但这个影响不是本质的. 从理论上讲, 即使实验没有误差, 这种现象也是必然要发生的. 以起跃粒子沿 y 方向的边缘速度分布为例, 由式 (17) 可知, $P(v_x, v_y) = v_y f(v_x, v_y)$ 在 $v_y \rightarrow 0^+$ 时, $f_y(v_x, v)$ 的值应该是有限的, 从而必然有 $\lim_{v_y \rightarrow 0} P(v_x, v_y) = 0$, 如果对粒子的速率分布进行统计, 由式 (17) 和式 (20) 可知, $v \rightarrow 0$ 时, $P^+(v) \rightarrow 0$ 的速度与 v^2 同阶, 以往人们一直认为, $v \rightarrow 0$ 时 $P^+(v)$ 的值应该为有限值 (而不为零) 甚至是频率分布的最大值点. 如 Anderson & Hallet^[15] 将 White & Schulz^[5] 的实验结果用指数函数来拟合频率分布, 这显然是一种误解, Raupach^[9] 中也有同样的问题.

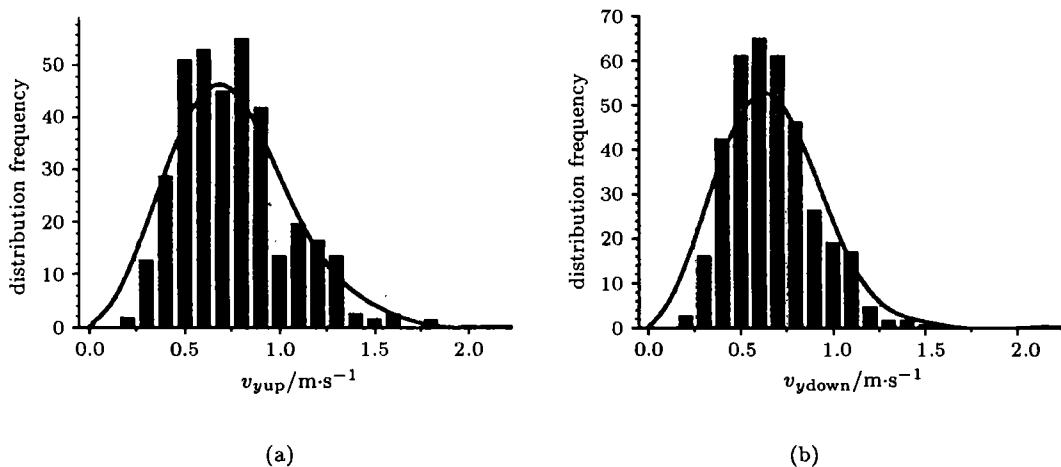


Fig.2 穿越 $y = 0$ 平面的发射 (a) 和入射 (b) 粒子沿 y 方向的速度分布频率
 Fig.2 Vertical velocity distribution frequency of the ejecta (a) and impact (b) particles across $y = 0$ plane

参 考 文 献

- 1 Bagnold R.A. The Physics of Blown Sand and Desert Dunes. London: Methuen & Co, 1941. 钱宁, 林秉南译. 风沙和荒漠沙丘物理学. 北京: 科学出版社, 1959
- 2 贺大良, 刘大有. 跃移沙粒起跳的受力机制. 中国沙漠, 1984, 9(2): 14~22 (He Daliang, Liu Dayou. Force mechanics of lifting off saltation sand particles. *J of Desert Research*, 1989, 9(2): 14~22 (in Chinese))
- 3 戚隆溪, 王柏懿. 土壤侵蚀的流体力学机制 (II)——风蚀. 力学进展, 1996, 26(1): 41~45 (Qi Longxi, Wang Boyi. Hydraulic mechanism of soil erosion (II)——Wind erosion. *Advances in Mechanics*, 1996, 26(1): 41~55 (in Chinese))
- 4 Owen PR. Saltation of uniform grains in air. *J Fluid Mech*, 1964, 20: 225~242
- 5 White BR, Schulz JC. Magnus effects in saltation. *J Fluid Mech*, 1977, 81: 497~512
- 6 White BR. Two-phase measurements of saltating turbulent boundary layer flow. *Int J Multiphase Flow*, 1982, 8: 459~472
- 7 Nalpanis P, Hunt JCR, Barrett CF. Saltating particles over flat beds. *J Fluid Mech*, 1993, 251: 661~685
- 8 Anderson RS, Hallet B. Sediment transport by wind: Toward a general model. *Geol Soc Am Bull*, 1986, 97: 523~535
- 9 Raupach MR. Saltation layers, vegetation canopies and roughness length. *Acta Mech*, 1991, 1(suppl): 83~96
- 10 吴正. 风沙地貌学. 北京: 科学出版社, 1987 (Wu Zheng. Aeolian geomorphology. Beijing: Science Press, 1987 (in Chinese))
- 11 戚隆溪, 董飞. 风沙流结构的实验研究. 西北纺织工学院学报, 1995, 增刊: 86~89 (Qi Longxi, Dong Fei. Experimental study of wind-sand flow. *J of Northwest Institute of Textile Science and Technology*, 1997, 11(suppl): 29~31 (in Chinese))
- 12 Jensen JL, Sorensen M. Estimation of some aeolian saltation transport parameters: a reanalysis of Williams' data. *Sedimentology*, 1986, 33: 547~558
- 13 Williams G. Some aspects of the eolian saltation load. *Sedimentology*, 1964, 3: 257~287
- 14 Schlichting H. Boundary Layer Theory. McGraw-Hill, 1969
- 15 Anderson RS. Eolian sediment transport as a stochastic process: the effects of a fluctuating wind on particle trajectories. *J Geol*, 1987, 95: 497~512
- 16 Tsoar H, Pye K. Dust transport and the question of desert loess formation. *Sedimentology*, 1987, 34: 139~153

- 17 董飞, 刘大有. 关于风沙层中颗粒垂向浓度分布规律等的思考. 力学与实践, 1997, 19(6): 42~44 (Dong Fei, Liu Dayou. Intellection about the vertical profiles of the particles' concentration and mass flux in the blown sand layer. *Mechanics and Practice*, 1997, 19(6): 42~44 (in Chinese))

VELOCITY DISTRIBUTION OF PARTICLE PHASE IN SALTATING LAYER OF WIND-BLOWN-SAND TWO PHASE FLOWS ¹⁾

Zhu Jiujiang Qi Longxi

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Kuang Zhenbang

(*Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China*)

Abstract In this paper, Boltzmann equation for velocity distribution function of the particle phase in wind-blown sand two phase flow is derived from the motion equation of single particle saltating in the air flow. Exact mathematical definitions are given for several different distribution function, which are usually confused in literature, such as velocity distribution function in 3-D space, velocity distribution function of particle launching across plane, saltation height distribution function. The difference and relationship among them are pointed out. Several macroscopic average quantities corresponding to each distribution function are introduced. The particle flux in unit wide is expressed in terms of these introduced statistical mean quantities. Some important phenomena found previously in airborne movement are properly explained by the theory developed in this paper.

In the case of ignoring vertical drag in boundary layer, it is approved that the following 5 propositions are equivalent to each other: (1) The velocity distribution function of particle launching across horizontal plane is Rayleigh distribution. (2) The boundary distribution along y direction of velocity distribution function in 3-D space is normal distribution. (3) Saltation height distribution function across horizontal plane is normal distribution. (4) the particle mass density attenuates as an exponential function of height y . (5) The second order moment of velocity distribution along y direction is constant.

The stroboscopic photography method in the wind tunnel test is used to measure the particle speeds, and particle flux is test by sand-collection. The present experiments and previous literature show that the above 5 propositions are good approximations to approach experiments.

Key words wind-blown-sand two phase flow, saltation layer, velocity distribution function, Boltzmann equation, boundary distribution

Received 27 April 1999, revised 23 December 1999.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19832060).