

# 可压缩流动转捩的迭代求解

王发民 蔡春培 赵烈 姚文秀 王革

中国科学院力学研究所, 北京 100080

**摘要** 本文叙述了高速可压缩边界层流动稳定性和转捩点预报的数值计算方法。特别是 Rayleigh 反迭代法与边界层渐近匹配方法的配合, 有效地提高了计算精度, 节省了存储和计算时间。本文给出的平板边界层第一模式的稳定性分析和转捩区数值预报结果, 与已有的实验结果一致。

**关键词** 可压缩边界层稳定性; 转捩; Rayleigh 迭代

**中图分类号** O 357. 4

## 0 引言

高速可压缩流动稳定性和转捩研究, 是空气动力学研究中最困难的基本问题之一, 也是飞行器设计中必须考虑的问题。例如弹头在返回大气层时的烧蚀花纹和雷达散射等与飞行器边界层(或尾迹区)流动的转捩密切相关。转捩等问题也影响到飞行器的表面温度、气动性能和起飞重量等。

由于可压缩性和热力学效应的影响, 高速流动的转捩问题, 比低速流动要复杂得多, 其机理还不十分清楚。应用线性稳定性理论和  $e^N$  方法相结合进行转捩预报, 能够给出满足工程需要的精度, 在国外已经得到了广泛的应用。

本文讨论描述边界层流动问题的动量方程、能量方程和连续性方程等五个常微分特征方程。当然对于高马赫数流动, 应当考虑到真实气体效应的影响, 如果流动处于化学平衡状态, 则稳定性方程的阶数不会变化, 但是对于化学反应非平衡流动, 各反应组分的连续性方程也要包括在内。这就增加了稳定性系统求解的困难。从理论上讲, 下述方法适用于真实气体问题。

问题的数值求解, 包括初值求解方法(即打靶法)和边界问题的求解方法。Mack<sup>[1]</sup>应用初值方法求解了可压缩边界层问题, Scoot<sup>[2]</sup>等则比较早地应用两个边界求解了该稳定性方程组。对于不可压流动, 临界层在固壁附近, 因而函数展开的方法很有优势, 如 Chebyshev 展开(O rszag)和高阶有限元素方法(W ang Fam in)等。但对于高超声速流动, 临界层则移向边界层外缘, 以上方法很难有效发挥作用, 因此求解稳定性方程的迭代算法越来越重要。本文以M alik<sup>[3]</sup>提出的二阶差分方法求解边值问题为初值, 应用 Rayleigh 迭代, 结合外边界渐近分析, 在微机上较精确地求解了可压缩边界层稳定性方程。

本文于 1997 年 1 月 20 日收到, 8 月 7 日收到修改稿。

# 1 基本思想

可压缩流动的N-S方程可以写成如下形式

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q} \right] = - \nabla p + \nabla \cdot [ \lambda (\nabla \cdot \vec{q}) ] + \nabla \cdot [ \mu (\nabla \vec{q} + \nabla \vec{q}^T) ] \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \tag{2}$$

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \nabla) T \right] = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \nabla) p + \Phi \tag{3}$$

$$p = \rho R T \tag{4}$$

$\vec{q}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $R$ ,  $\lambda$ ,  $k$  分别表示速度矢量、密度、压力、温度、气体常数、比热比、热传导系数, 而  $\mu$  和  $\nu$  分别表示第一和第二粘性系数, 上标  $tr$  表示速度梯度张量的对应转置张量, 且

$$\Phi = \lambda (\nabla \cdot \vec{q})^2 + \frac{\mu}{2} [ \nabla \vec{q} + \nabla \vec{q}^T ]^2 \tag{5}$$

## 1.1 基本流场求解

应用Mangler-levy-lees 变换

$$d\zeta = \rho_e \mu_e u_e dx, \quad d\eta = [ \rho_e u_e / (2\zeta)^{1/2} ] (\rho / \rho_e) dy \tag{6}$$

这里下标  $e$  表示外边界相应函数值,  $x$  为流向坐标,  $y$  为垂直物面坐标。将(6)式代入控制方程得到如下常微分方程

$$(cf'') + ff' + \beta [ \rho_e / \rho - (f') ] = 2\xi (f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f'}{\partial \xi})$$

$$(a_1 g + a_2 f f'') + fg' = 2\xi (f' \frac{\partial g}{\partial \xi} - g \frac{\partial f'}{\partial \xi})$$

此处

$$f = u/u_e, \quad c = \rho \mu / \rho_e \mu_e, \quad \beta = (2\xi / u_e) (du_e / d\xi), \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{k},$$

$$g = H / H_e, \quad a_1 = c / \sigma, \quad a_2 = \frac{(\gamma - 1) M^2}{1 + (\frac{\gamma - 1}{2}) M^2} (1 - \frac{1}{\sigma}) c, \quad M = \frac{u_e}{\sqrt{\gamma R T_e}}$$

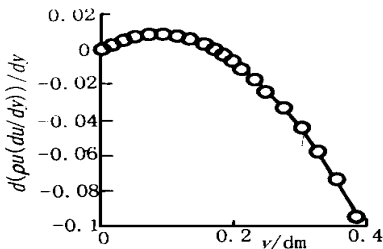


图1 速度  $u$  的二阶导数

Fig. 1 Two order derivate of velocity  $u$

式中  $\beta$  是表示压力梯度的参数,  $H$  是焓,  $M$  和  $\sigma$  分别表示Mach数和Prandtl数, 本文应用二阶差分格式和牛顿迭代方法对上述常微分方程组进行求解。为了增加求解的精确性, 我们采用双精度运算。图1是  $R = 2000$  时速度剖面的二阶导数图, 图上存在一个零点, 说明该流场截面是Rayleigh不稳定的。

### 1.2 稳定性方程

$$u = \bar{U} + \tilde{u}, v = \bar{V} + \tilde{v}, w = \bar{W} + \tilde{w}, p = \bar{P} + \tilde{p}, t = \bar{T} + \tilde{t},$$

$$\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}, \mu = \bar{\mu} + \tilde{\mu}, \lambda = \bar{\lambda} + \tilde{\lambda}, k = \bar{k} + \tilde{k}$$

设扰动量是一个沿  $x$  方向传播的行进谐波, 即

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = [u(y), v(y), w(y)] e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$$

$$\tilde{p} = p(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \tilde{T} = T(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (7)$$

式中  $\alpha, \beta$  为波数,  $\omega$  是谐波的频率, 本文设  $\alpha, \beta$  为实数,  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  为复数。将以上假设形式代入 N-S 方程, 略去扰动量的二次项和高阶项, 得到下面矩阵形式的齐次方程组

$$(AD^2 + BD + C)\Phi = 0 \quad (8)$$

式中

$$\Phi = \begin{pmatrix} \alpha u + \beta v \\ v \\ p \\ t \\ \alpha u - \beta v \end{pmatrix}, D = d/dy \quad (9)$$

式中,  $A, B$  和  $C$  分别是  $5 \times 5$  阶矩阵, 具体元素的说明见文献[3]。

边界条件是: 在固壁上, 速度、温度扰动量等于零; 在边界层外部, 所有的扰动趋近于零, 即

$$y = 0: \Phi = \Phi = \Phi = \Phi = 0; y \rightarrow \infty: \Phi = \Phi = \Phi = \Phi = 0 \quad (10)$$

齐次常微分方程组(10)连同其边界条件构成一特征值问题

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, R)$$

系数矩阵  $B$  和  $C$  中的  $R, M, Pr$  分别是雷诺数,  $R = \rho u_{\infty} l / \mu_e$ , ( $l = \delta$ , 边界层排挤厚度), 普朗特数  $Pr = c_p \mu_e / k_e$ , 马赫数  $M = u_{\infty} / \sqrt{\gamma R T_e}$ 。

## 2 数值方法

### 2.1 Global 算法

首先对于边界层, 应用下述代数方法将区域  $0 \leq y \leq y_{\max}$  投影到求解域  $0 \leq \eta \leq 1$

$$y = \frac{a\eta}{b - \eta}, b = 1 + a/y_{\max}, a = y_{\max} \cdot y_i / (y_{\max} - 2y_i) \quad (11)$$

在等间距节点上, 采用交错网格技术, 应用二阶差分得到下列紧致差分格式

$$f_{1j} A_j \left[ \frac{\Phi_{j+1} - 2\Phi_j + \Phi_{j-1}}{\Delta\eta} \right] + d_1 [(f_{1j} A_j + f_{2j} B_j) \left( \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}}{2\Delta\eta} \right) + C_j \Phi_j] +$$

$$d_2 [f_{2j} B_j \left( \frac{\Phi_{j+1/2} - \Phi_{j-1/2}}{\Delta\eta} \right) + C_j \left( \frac{\Phi_{j+1/2} + \Phi_{j-1/2}}{2} \right)] = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n-1) \quad (12)$$

式中  $\Phi_j (j = 1, \dots, N)_j$  表示  $\Phi$  在节点  $j$  的函数值, 包括 5 个分量  $\Phi_k (k = 1, 5)$ , 对于压力  $p$ , 式中  $d_1 = 0, d_2 = 1$ , 其它分量则取  $d_1 = 1, d_2 = 0$ 。且其式中相应的差分系数

$$f_1 = \frac{(b-\eta)^4}{b^2 a^2}, f_2 = -\frac{2(b-\eta)^3}{b^2 a^2}, f_3 = \frac{(b-\eta)^2}{ba} \quad (13)$$

一阶连续性方程得差分格式为

$$f_3 B_{j+1/2} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta \eta} + C_{j+1/2} \phi_{j+1/2} = 0 \quad (j = 0, \dots, N-1) \quad (14)$$

写成矩阵形式

$$\bar{A} \bar{\phi} - \bar{\omega} \bar{B} \bar{\phi} \quad (15)$$

其特征值则由下式确定

$$\text{Det} |\bar{A} - \bar{\omega} \bar{B}| = 0 \quad (16)$$

为了比较本文算法的计算效率,我们选择文献[1]中的典型算例进行比较,其初值为:来流条件;  $M = 0.5, T_w/T_{abd} = 1$ , 总温  $T_0 = 500R, R_l = 2000$  ( $l$  为截面的参考长度)。本征值计算结果比较: 真值,  $\omega = (0.29081, 0.0022441)$ , 比较结果见表 1。

表 1 本征值计算结果比较

Table 1 Comparison results of characteristic value

点数	$\omega$ 值 (Malik)	$\omega$ 值 (本文)	$ \omega_i - \omega /\omega$	$ \omega_i - \omega /\omega$
17	(0.029656, 0.001338)	(0.029698, 0.0013111)	40.49%	39.8%
25	(0.029329, 0.001819)	(0.029356, 0.0017669)	21.2%	20.2%
33	(0.029216, 0.002002)	(0.029195, 0.0021378)	4.6%	6.7%
41	(0.029166, 0.002002)	(0.029907, 0.0021786)	2.8%	4.3%

可见, 本文 Global 算法随着点数的增加, 误差以更快的速度衰减。

## 2.2 Local 方法

以矩阵特征值方法求出的特征值为初值, 我们采用 Rayleigh 迭代方法进行了改进, 为此, 让我们回到稳定性方程式 (15), 当  $\eta = \eta_b$  时,  $T, U, W$  对  $\eta$  的所有导数等于零, 系数矩阵的非零元素减少到 19 个, 且不依赖变量  $\eta$  消去  $\Phi_3$  (压力扰动), 得下面的二阶方程

$$\begin{cases} \Phi_1 + e\Phi_2 + a\Phi_3 + f\Phi_4 = 0 \\ \Phi_2 + b\Phi_1 + g\Phi_3 + c\Phi_4 = 0 \\ \Phi_4 + h\Phi_1 + \Phi_2 + s\Phi_3 = 0 \\ \Phi_5 + c_{55}\Phi_6 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} a &= b_{12} - c_{13}/c_{33} & c &= -b_{33}c_{34} [c_{33}(1 - b_{23}/c_{33})]^{-1} \\ b &= (b_{21} - b_{23}c_{31}/c_{33}) & d &= -c_{43}/c_{33} \\ e &= c_{11} - c_{13}c_{31}/c_{33} & f &= -c_{13}c_{31}/c_{33} \\ g &= c_{22}(1 - b_{23}/c_{33})^{-1} & h &= c_{44} - c_{43}c_{34}/c_{33}, D = d/d\eta \end{aligned}$$

设方程式 (17) 的通解为

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^8 c_j b_j^i e^{\lambda_j(\eta - \eta_0)}, \quad i = 1, 2, 4, 5 \quad (18)$$

代入式(17)特征根  $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, 6)$  的 6 阶方程

$$\begin{aligned} \lambda^6 + p\lambda^4 + q\lambda^2 + r &= 0 \\ p &= g + e + s - ab - cd \\ q &= se - hf + fg + sg - abs + bdf - ced + abc \\ r &= sf g - ghf \end{aligned}$$

而  $\lambda_7 = -\lambda_8 = \sqrt{c_{55}}$  对应的各特征矢量为

$$\begin{aligned} B_1^j &= 1, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ B_2^j &= \frac{(d\lambda_j^2 + ed + ah)}{as - df + d\lambda_j^2}, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ B_3^j &= -(\lambda_j^2 + e + fB_2^j), j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ B_4^j &= 1, j = 7, 8 \\ B_i^j &= \lambda_j \cdot B_{i-4}^j, i = 5, 6, 7, 8 \end{aligned}$$

对于其它角标,  $B$  为零。

当  $\lambda$  大于零时, 由于不满足远场条件 ( $\eta$  时, 扰动趋近于零), 必须舍去。这样可以进行较精确的 LOCAL 迭代计算。

迭代算法如下

$$(A - \omega B) \Phi = B \Phi \tag{19}$$

$$(A - \omega B) \bar{\Phi} = B \bar{\Phi} \tag{20}$$

$$\omega_{k+1} = \frac{(\Phi, A \Phi)}{(\Phi, B \Phi)} \tag{21}$$

$$\Phi = \Phi_{\max} \tag{22}$$

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_{\max} \tag{23}$$

不难证明迭代的误差为:  $\omega_{k+1} - \omega = O(\omega_k - \omega)^3$ 。其中  $\Phi$  是本征函数,  $\bar{\Phi}$  是  $\Phi$  的伴随特征函数。

为进一步提高精确度, 在  $N = 20, 22, 24$  三个网格点上, 进行了 Richardson 插值, 计算公式为

$$\omega_{\text{extrapolated}} = \{ [(h_1^2 - h_2^2)/h_0^2] \omega + [(h_2^2 - h_0^2)/h_1^2] \omega + [(h_0^2 - h_1^2)/h_2^2] \omega \} / \{ (h_1^2 - h_2^2)/h_0^2 + [(h_2^2 - h_0^2)/h_1^2] + [(h_0^2 - h_1^2)/h_2^2] \} \tag{24}$$

表 2 给出了上述插值的结果的比较。

表 2 插值结果比较

Table 2 Comparison the results of extrapolation

点数(N)	20	22	24	插值结果
$\omega$ 值	(0 029267047 0 0019398730)	(0 029245019 0 0019774172)	(0 0292269920 0 020085585)	(0 02909507602453 0 002248540986329)

可以看出上述方法求解特征值问题, 只需很少的点就能精确到 4 位有效数字, 这有力地解决了线性稳定性分析中的计算存储量大, 精度低的问题。

### 3 结果分析

进行转捩区预报, 群速度的计算, 是至关重要的。而求解  $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}, \frac{\partial \omega}{\partial \beta}$ , 当然可以用LR方法通过临近几点的特征值, 用差分方法求解

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right|_j = \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}}, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right|_j = \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{\beta_{j+1} - \beta_{j-1}} \quad (25)$$

但是这种方法会花费较多的机时, 且精度较低, 有鉴于此, 本文采用下述方法求解, 设特征方程为

$$L(\alpha, \beta, \omega(\alpha, \beta)) \phi = 0 \quad (26)$$

对  $\alpha$  进行求导, 并应用伴随函数  $\varphi$  作内积

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \phi + L \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = - \frac{(\varphi, \frac{\partial}{\partial \alpha} \phi)}{(\varphi, \frac{\partial}{\partial \omega} \phi)} \quad (28)$$

下式是本算例的群速度计算结果

$$v_a = (0.3608813285828, 0.0080116894096140)$$

$$v_b = (-0.8620564318266E-14, -0.5262003296470E-14)$$

由于  $\beta = 0$ , 故  $v_b$  近似为 0。

转捩点的预报: 本文采用了  $e^N$  方法预报边界层的转捩点, 按照实验结果,  $N$  取 9...11, 计算公式为

$$N = \frac{x_T}{x_c} \frac{\omega}{|\text{real}(v_g)|} dx \quad (29)$$

这里群速度  $v_g = [\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}, \frac{\partial \omega}{\partial \beta}]$ ,  $x$  表示到边界层起点的距离, 角标  $c$  和  $T$  表示临界点和转捩点的  $x$  坐标。图 2 描述了  $N$  对应于雷诺数的曲线, 可以看出当  $N > 9$  时, 该曲线的梯度是很大的。

为了求解特征函数, 我们应用迭代关系式  $(A - \omega B) \phi = B \phi^{(k+1)}$  和它的伴随系统, 以任意一个光滑的函数  $\phi^{(0)}$  和它的伴随函数  $\varphi^{(0)}$  为初值, 开始迭代, 可以较快得到收敛解。图 3~ 图 5

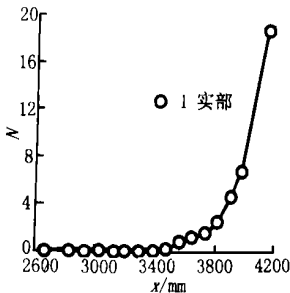


图 2  $N$  积分

Fig 2  $N$  integration

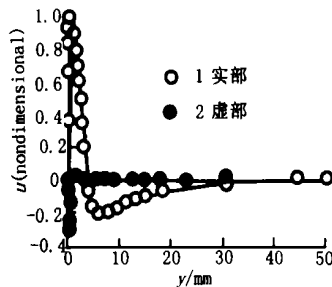


图 3 速度  $u$  扰动

Fig 3 Velocity  $u$  perturbation

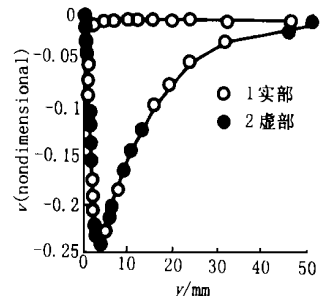


图 4 速度  $v$  扰动

Fig 4 Velocity  $v$  perturbation

给出了  $R = 2000$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.0$  时的速度、温度和压力的扰动波波形。其结果有五位精度, 是可信的。

最后应该指出, 作为第一步的工作, 该项研究和所编制的相应程序, 不仅适用于理想气体, 也同时适用于高马赫数时, 考虑真实气体效应时的情况, 而且适用于机翼和各种锥体(尖锥、钝锥和有扩张角的锥体)以及有横向流的流场的流动稳定性和转捩预报, 和层流控制技术等, 这方面的工作将会在以后的文章中出现。

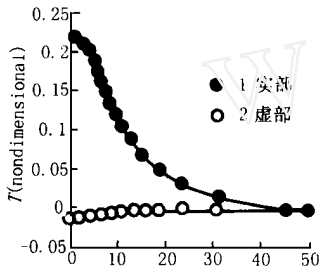
图5 温度  $T$  扰动

Fig 5 Temperature perturbation

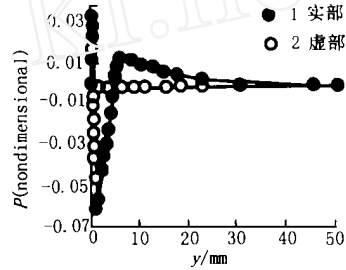
图6 压力  $p$  扰动

Fig 6 Pressure perturbation

## 参 考 文 献

- 1 Malik M R. Numerical Methods for Hypersonic Boundary Layer Stability. *J. Computational Physics*, 1990, 86: 376~ 413
- 2 Scott M R, Watts H A. *J. Numer. Anal* 1977, 14: 40
- 3 Malik M R. Efficient Computation of the Stability of Three-Dimensional Compressible Boundary Layers. AIAA-81-1277.
- 4 Malik M R. Numerical Methods for Hypersonic Boundary Layer Stability. *J. of Computational Physics*, 1965, 5: 247.

## Iteration Solution of Compressible Transition Flow

Wang Fam in Cai Chunpei Zhao Lie Yao Wenxiu Wang Ge  
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080)

**Abstract** In this paper, a numerical method about high speed, compressible boundary layer analyse the stability property and depict the prediction of transition point Especially, Raileigh inverse iteration method and boundary asymptotic method improves the accuracy of computation, reduces the storage and time The result in this paper about the first mode of stability and the numerical transition prediction about plate fit the result of experiments very well

**Key words** compressible boundary layer stability; transition; Raileigh iteration