

# Navier-Stokes 方程二阶速度滑移边界条件的检验

谢 肿<sup>1)</sup> 樊 菁<sup>2)</sup>

(中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100080)

**摘要** 对微尺度气体流动, Navier-Stokes 方程和一阶速度滑移边界条件的结果与实验数据相比, 在滑移区相互符合, 在过渡领域则显著偏离. 为改善 Navier-Stokes 方程在过渡领域的表现, 有些研究者尝试引入二阶速度滑移边界条件, 如 Cercignani 模型, Deissler 模型和 Beskok-Karniadakis 模型. 以微槽道气体流动为例, 将 Navier-Stokes 方程在不同的二阶速度滑移模型下的结果与动理论的直接模拟 Monte Carlo(DSMC) 方法和信息保存(IP) 方法以及实验数据进行比较. 在所考察的 3 种具有代表性的二阶速度滑移模型中, Cercignani 模型表现最好, 其所给出的质量流率在 Knudsen 数为 0.4 时仍与 DSMC 和 IP 结果相符; 然而, 细致比较表明, Cercignani 模型给出的物面滑移速度及其附近的速度分布在滑流区和过渡领域的分界处 ( $Kn = 0.1$ ) 已明显偏离 DSMC 和 IP 的结果.

**关键词** 二阶速度滑移模型, 微槽道流动, DSMC 方法, IP 方法

**中图分类号:** V211 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)01-0001-06

## 引 言

随着微加工技术的发展, 目前的 MEMS 器件的特征尺度已达到亚微米水平. 在 1 Pa 和 273 K 标准大气条件下, 空气分子的平均自由程  $\lambda$  约为  $0.07 \mu\text{m}$ , 对于实验研究中高度  $H = 0.5 \mu\text{m}$  左右的矩形截面的微槽道<sup>[1,2]</sup>,  $\lambda$  与流动的特征长度  $L$  之比即 Knudsen 数 ( $Kn = \lambda/L$ ) 的量级为 0.1. 一般认为,  $0.01 < Kn < 0.1$ , 流动处在滑流区, 稀薄效应开始出现, 但对物面边界条件做速度滑移和温度跳跃修正后, 连续介质理论仍然适用;  $0.1 < Kn < 10$ , 流动处于过渡领域, 连续介质假设本身不再恰当, 需要采取动理论方法考虑流动特征尺度与分子平均自由程相近引起的非平衡弛豫效应.

亚微米尺度气体流动临近滑流区和过渡领域分界点. 对于这一类流动, 不少研究者仍旧希望能够沿用 Navier-Stokes 方程加滑移边界条件的解法. 但经典的一阶速度滑移边界条件

$$u|_w = \frac{2-\sigma}{\sigma} \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w \quad (1)$$

在  $Kn = 0.1$  时已是相应的 Navier-Stokes 滑移解的适用上限<sup>[1~4]</sup>, 这里  $\sigma$  为气体分子与物面碰撞过程

中切向动量的适应系数, 理论上  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

为了扩展 N-S 方程描述稀薄气体流动的适用范围, 一些研究者尝试引入二阶速度滑移条件

$$u|_w = C_1 \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w + C_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w \quad (2)$$

20 世纪 60 年代, Cercignani<sup>[5,6]</sup> 利用 BGK 模型方程分析一维 Poiseuille 流动, 并在弱非平衡态假设下得到了物面附近的速度分布

$$u = \frac{H^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left( y_*^2 - \frac{1}{2} - \beta Kn - \left( \frac{1}{2} + \beta^2 \right) Kn^2 \right) \quad (3)$$

式中  $y_* = y/H$ ,  $\beta = 1.01615$ ,  $\mu$  和  $p$  分别为气体黏性和压强.

由式 (3) 可导出如下物面滑移速度<sup>[6]</sup>

$$u|_w = \beta \theta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \beta^2 \right) \theta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w \quad (4)$$

其中  $\theta = \lambda \sqrt{4/\pi}$ .

Cercignani<sup>[6]</sup> 对比式 (2) 和式 (4), 定出  $C_1 = 1.1466$  和  $C_2 = -0.9757$ . 最近 Hadjiconstantinou<sup>[7]</sup> 在硬球分子模型下对 Cercignani 模型做了修正, 建议  $C_1 = 1.11$  和  $C_2 = -0.63$ .

2005-11-17 收到第 1 稿, 2006-04-25 收到修改稿.

1) E-mail: chongxie@263.net

2) E-mail: jfan@imech.ac.cn

Deissler<sup>[8]</sup>对壁面附近气体的速度进行 Taylor 级数展开, 根据  $Kn$  层内动量和能量输运的平衡关系在等温条件下给出如下二阶滑移速度表达式

$$u|_w = \frac{2-\sigma}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi RT}{2}} \frac{\mu}{p} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w + \frac{9\pi}{16} \left( \frac{\mu \sqrt{RT}}{p} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w \quad (5)$$

对于硬球分子相互作用模型, 分子平均自由程

$$\lambda = \mu \sqrt{\pi RT/2}/p \quad (6)$$

其中  $R$  为气体常数,  $T$  为气体温度. 将式 (6) 代入式 (5) 再与式 (2) 对比, Deissler<sup>[8]</sup> 得出  $C_1 = (2-\sigma)\sigma$ ,  $C_2 = -9/8$ .

20 世纪 60 年代还没有 MEMS 的应用背景, 那时研究二阶速度滑移模型, 除了理论方面的兴趣, 主要是出于航天领域和真空工业的需要. 20 世纪 90 年代以来, 随着 MEMS 技术的兴起, 滑移边界条件成为微尺度气体流动研究中的一个热点, 这方面的工作很多, 影响较大的当推 Beskok 和 Kaniadakis<sup>[9,10]</sup> 模型.

他们推导的基本出发点是:  $Kn$  层内分子的平均速度等于  $Kn$  层外缘速度和物面速度的平均值. 由此导出的物面滑移速度具有 Taylor 级数形式

$$u|_w = \frac{2-\sigma}{\sigma} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w + \frac{1}{3!} \lambda^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_w + \dots \right) \quad (7)$$

取前两项得  $C_1 = (2-\sigma)/\sigma$  和  $C_2 = (2-\sigma)/2\sigma$ , 前者与 Deissler 模型相同, 但后者对于常用的完全漫反射物面 ( $\sigma = 1$ ) 等于 0.5, 其作用与 Cercignani 和 Deissler 模型相反. 尽管 Beskok-Kaniadakis 模型是最近提出的, 但 Hadjiconstantinou<sup>[7,11,12]</sup> 基于一维 Poiseuille 流动和 Rayleigh 流动的研究结果, 推荐采用 Cercignani 二阶速度滑移模型.

将 Navier-Stokes 方程加二阶乃至更高阶的物面滑移边界条件经验地推广到过渡领域, 其适用性只能通过实验或动理论方法评估. 由于实验系统中的物面切向动量适应系数  $\sigma$  一般是通过 Navier-Stokes 方程的滑移解与实验数据的比较确定的, 即使采用相同的实验数据, 不同的滑移模型得出的  $\sigma$  值也不一样, 这在某种意义上使  $\sigma$  成为一个可调参数. 本文首先采取动理论方法, 以二维短微槽道气体流动为例, 在  $\sigma$  相同的情况下 ( $\sigma = 1$ ), 将不同滑移边界条件相应的 Navier-Stokes 解与基于动理论直接模拟 Monte Carlo(DSMC) 方法、信息保存 (IP) 方法结

果进行比较, 评估其适用范围. 然后, 又在实验条件下将各种 N-S 二阶滑移模解与 IP 解和文献 [1] 中长微槽道测量实验数据进行比较. 了解和评估二阶速度滑移模型在实际应用中的适用范围.

## 1 微槽道气流的 Navier-Stokes 二阶滑移解

目前的亚微米高度的实验微槽道<sup>[1~3]</sup> 的长度  $L$  为几千微米, 宽度  $W$  为几十微米, 气流速度量级小于 1 m/s, 流动过程中温度变化很小, 可以忽略不计. 这种情况可以近似为二维定常等温流动 (图 1), Navier-Stokes 方程简化为

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx} \quad (8)$$

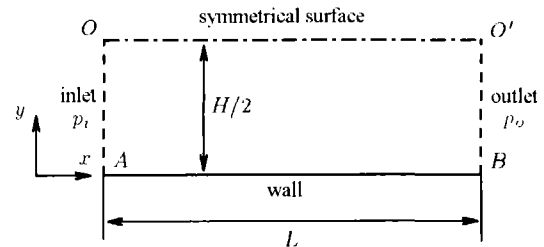


图 1 微槽道气体流动统计模拟的二维计算区域和边界条件

Fig.1 Two dimensional computational domain and boundary conditions in statistical simulation of microchannel gas flow

定解条件为二阶速度滑移边界条件 (2) 和中心对称边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H/2} = 0 \quad (9)$$

方程 (8) 左右两端积分两次并利用式 (6) 和式 (9), 化简整理后得到

$$u = \frac{H^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y_*^2 - y_* - C_1 Kn + 2C_2 Kn^2) \quad (10)$$

将速度分布表达式 (10) 代入质量流量表达式  $Q = \int_0^H \rho(x) u(x, y_*) dy_*$ , 利用理想气体状态方程  $p = \rho RT$ , 并考虑到沿微槽道流向质量流量守恒, 有

$$QL = \int_{p_i}^{p_o} \frac{H^2}{2\mu} \frac{p}{RT} \left( -\frac{H}{6} - C_1 KnH + 2C_2 Kn^2 H \right) dp \quad (11)$$

其中  $p$  与  $Kn$  的关系由式 (6) 给出. 经过积分运算得质量流量表达式

$$Q = \frac{H^3 p_o^2}{\mu L R T} \left( \frac{1}{24} (\Pi^2 - 1) + \frac{1}{2} C_1 (\Pi - 1) K n_o - C_2 H \ln \Pi K n_o^2 \right) \quad (12)$$

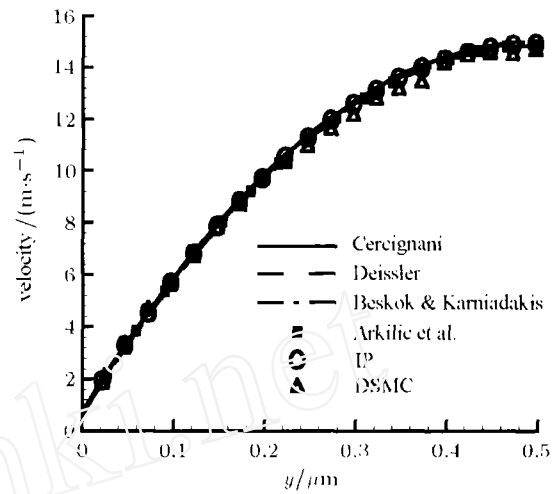
其中  $\Pi = p_i/p_o$ , 下标  $i$  和  $o$  分别表示微槽道入口和出口。

与一阶速度滑移模型 ( $C_2 = 0$ ) 对应的速度分布和质量流量相比, Cercignani 和 Deissler 的二阶速度滑移模型均使它们存在一个  $Kn_o^2$  项的增大, Beskok-Karniadakis 模型却使它们出现一个  $Kn_o^2$  项的减小。Cercignani 和 Deissler 模型对一阶模型的修正趋势是相同的, 尽管细节上有差别, 而 Beskok-Karniadakis 模型则与它们相反。

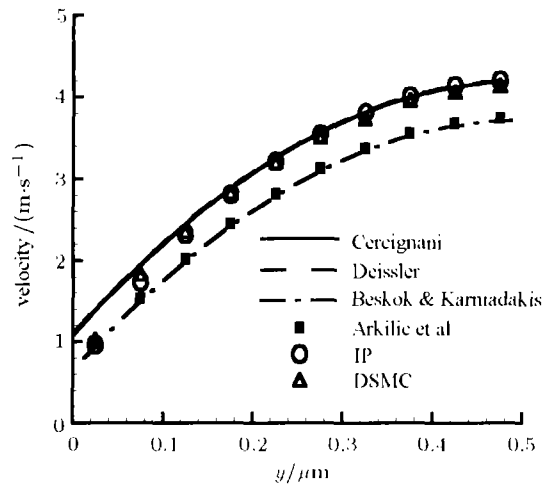
## 2 二阶速度滑移模型的评估

考虑一个长  $50\mu\text{m}$ , 高  $1\mu\text{m}$  的微槽道, 流动介质为氩气, 气体和壁面的温度均为  $273\text{K}$ 。首先采取直接模拟 Monte Carlo 方法 (DSMC) 和信息保存方法 (IP) 求解这个问题。过去 40 年在动理论基础上发展起来的 DSMC 方法<sup>[13,14]</sup> 是目前分析稀薄气流特别是过渡领域流动的主要工具。DSMC 方法在以高超声速为特点的航天领域取得广泛成功, 但作为一种统计模拟方法, 对于微尺度气流中常见的低 Mach 数流动, 遇到统计涨落的困难。笔者提出的 IP 方法克服了这个困难<sup>[4]</sup>, 对于经典的 Rayleigh 流动, 当平板启动速度为  $1\text{m/s}$  时, IP 方法统计收敛的时间仅为 DSMC 方法的  $1/30000$ 。IP 方法已成功地应用于多种微尺度流动, 对于典型的微尺度内流 (微槽道流动) 和外流 (微平板绕流), IP 方法均给出与实验相符的结果<sup>[15~18]</sup>。关于微槽道气流的 IP 方法和 DSMC 方法实现细节可参见文献<sup>[15,16]</sup>。为了减小 DSMC 计算量, 这里微槽道长度取为  $50\mu\text{m}$ , 并通过调节入口和出口压力使得流动  $Kn$  数处在关心的范围。

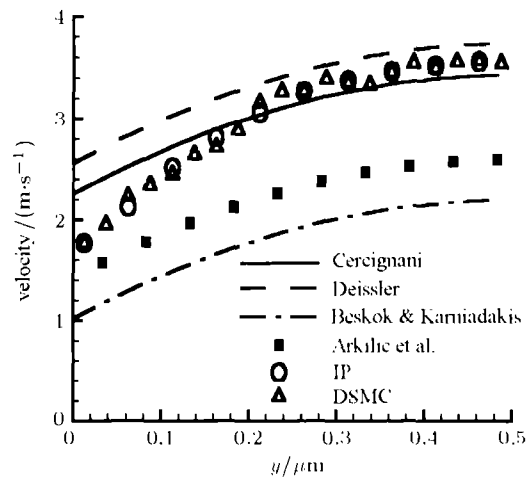
图 2 给出了在不同微槽道入口和出口压力下, 微槽道流向  $x = L/10$  (图 2(a) 和图 2(b)) 和  $x = L/5$  (图 2(c) 和图 2(d)) 截面上的速度分布。当局部  $Kn = 0.01$  (图 2(a)), 流动处于连续介质区和滑流区交界, 不同滑移模型的速度分布均与 DSMC 方法和 IP 方法的结果符合得很好。当  $Kn = 0.1$  (图 2(b)), 即在滑流区和过渡领域的交界处, Beskok-Karniadakis 速度分布明显偏离其它结果, 甚至不及 Arkilic 等<sup>[3]</sup> 的一阶速度滑移 N-S 解。  $Kn = 0.1$  时 Cercignani 和 Deissler 模型的解在物面附近也已开始偏离 DSMC 和 IP 结果,  $Kn = 0.3$  (图 2(c)) 时变得更加明显,



(a)  $p_i = 606\,000, p_o = 484\,800, Kn = 0.01$



(b)  $p_i = 66\,000, p_o = 39\,600, Kn = 0.1$



(c)  $p_i = 25\,000, p_o = 15\,000, Kn = 0.3$

图 2 不同  $Kn$  数下, Navier-Stokes 方程和不同二阶速度滑移模型给出的速度剖面与 DSMC 方法和 IP 方法计算结果的比较  
Fig.2 Comparison of velocity profiles given by the N-S equations with 2nd-slip models, IP and DSMC at different Knudsen numbers

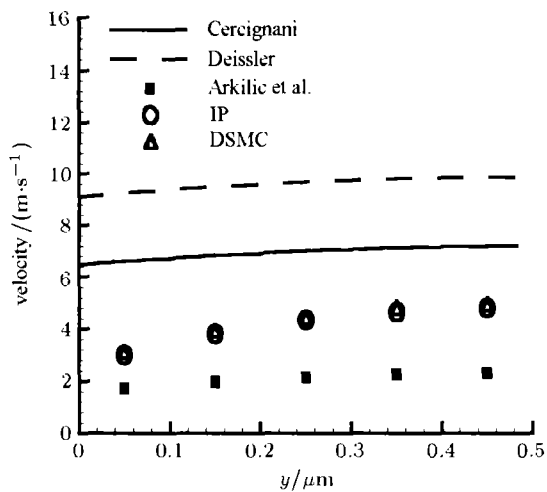
(d)  $p_i = 9000, p_o = 2700, Kn = 1$ 

图 2 不同  $Kn$  数下, Navier-Stokes 方程和不同二阶速度滑移模型给出的速度剖面与 DSMC 方法和 IP 方法计算结果的比较 (续)

Fig.2 Comparison of velocity profiles given by the N-S equations with 2nd-slip models, IP and DSMC at different Knudsen numbers (continued)

当  $Kn$  数增大到 1(图 2(d)), 即对于典型的过渡领域流动, Cercignani 和 Deissler 的二阶模型都完全失效。

图 3 比较了不同方法给出的无量纲质量流量与微槽道平均  $Kn$  数的关系, 其中无量纲因子  $M_c = (\rho_i + \rho_o)v_m H/2$ ,  $v_m = \sqrt{2RT}$ ,  $Kn_{ave} = \int_0^L Kn dx/L$ . Beskok-Karniadakis 模型给出的质量流量约在  $Kn_{ave} = 0.08$  开始偏离 DSMC 和 IP 的质量流量, 略逊于 Arkilic 等的一阶滑移 N-S 方程

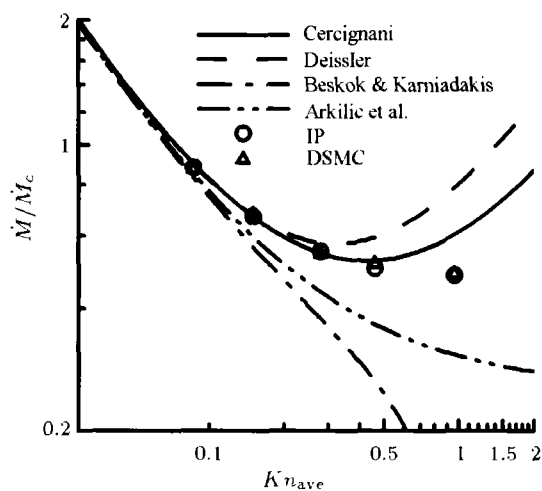


图 3 微槽道气体无量纲质量流量与平均  $Kn$  数关系的比较  
Fig.3 Comparison of non-dimensional mass flux versus mean Knudsen number

解, Deissler 模型的解约在  $Kn_{ave} = 0.2$  出现偏离, Cercignani 模型解的偏离则迟至约  $Kn_{ave} = 0.35$ , 明显优于一阶滑移 N-S 方程解。二阶速度滑移边界条件, 特别是 Cercignani 模型成功预测近滑移区过渡领域质量流量的原因, 在于质量流量是一个积分量, 微槽道流动中心部分的气体流动速度快, 对质量流量起主要作用, 恰在这里 Cercignani 模型与 DSMC 和 IP 方法的速度分布有较好的符合(图 2(b) 和 2(c))。

为更清晰地观察二阶模型对于获得槽道壁面处的滑移速度的精度, 本文比较了不同方法给出的  $Kn \approx 0.16$  时沿槽道流向滑移速度分布(图 4), Cercignani 模型结果显著偏离动理论的 DSMC 和 IP 结果。

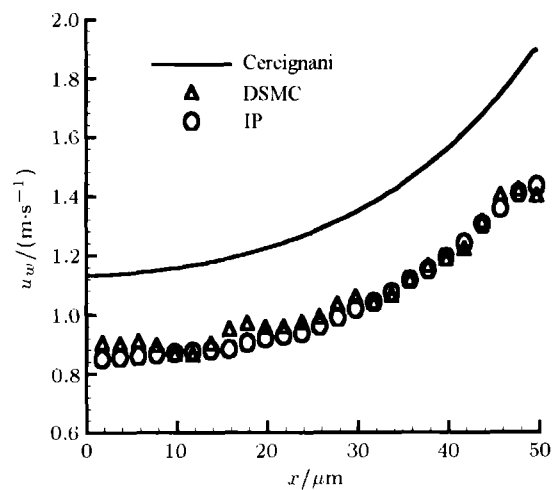


图 4 长  $50\mu\text{m}$ , 高  $1\mu\text{m}$  的微槽道物面滑移速度比较。  
入口压强  $66000\text{ Pa}$ ,  $Kn = 0.096$ ; 出口压强  $39000\text{ Pa}$ ,  
 $Kn = 0.162$

Fig.4 Comparison of surface slip velocities along a microchannel  $50\mu\text{m}$  long and  $1\mu\text{m}$  high.  
The pressures and  $Kn$  at inlet are  $6000\text{ Pa}$  and  $0.096$ , and  $39000\text{ Pa}$  and  $0.162$  at outlet, respectively

在 Zohar 等<sup>[1]</sup>的微槽道气流实验中, 槽道长  $4000\mu\text{m}$ , 宽  $40\mu\text{m}$ , 高度为  $0.53\mu\text{m}$  或  $0.97\mu\text{m}$ . 实验气体包括氦气、氩气和氮气. 槽道的出口压强保持为  $1\text{ Pa}$ , 调节槽道入口压强来获得不同压强差下微槽道气体的质量流量. 图 5(a) 为氩气质量流量的对比, 此时出口  $Kn$  数为  $0.19$ , DSMC 方法还不能处理此种实验条件下的长槽道低速模拟问题, 因此动理论结果只限于 IP 方法, 它与实验数据符合很好, 3 种二阶滑移 N-S 解, 除 Beskok-Karniadakis 模型与实验相差约  $5\%$  外, 另两者也表现很好. 图 5(b) 为氮气质量流量的对比, 此时出口  $Kn$  数为  $0.37$ , 槽道内

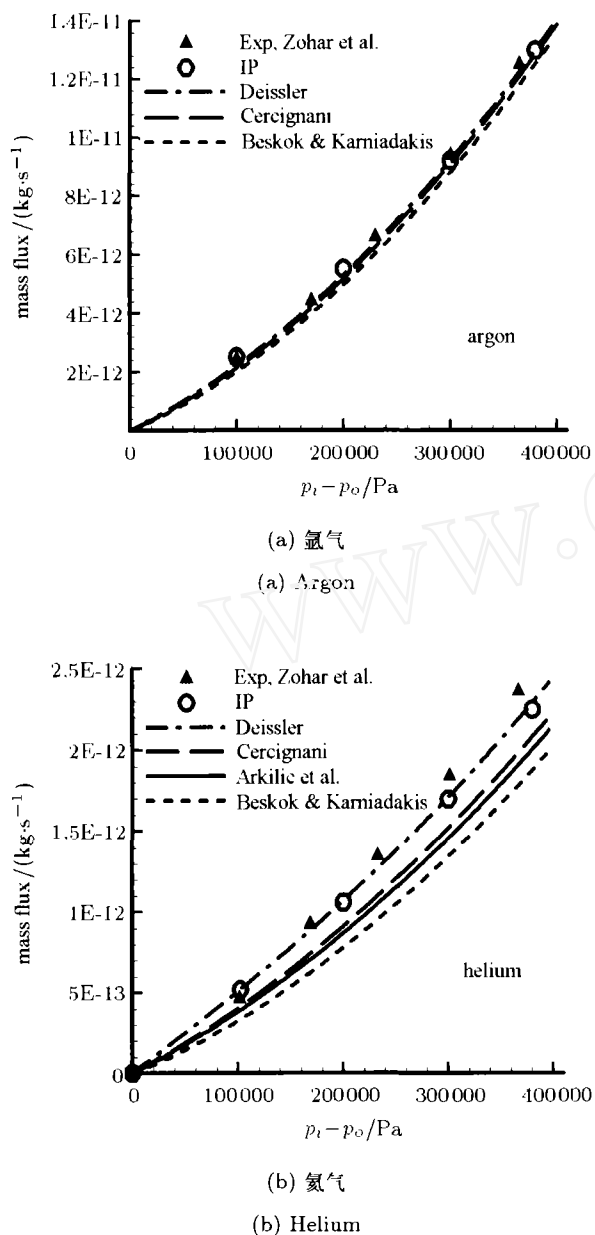


图 5 亚微米槽道 ( $H = 0.53\mu\text{m}$ ) 质量流量与入口和出口压差之间的关系

Fig.5 Relation between the mass flux of a sub-micron channel ( $H = 0.53\mu\text{m}$ ) and the inlet and outlet pressure difference

有更多的区域处于过渡领域, IP 方法与 Deissler 模型结果与实验数据一致, Cercignani 模型和 Beskok-Karniadakis 模型结果明显偏离实验数据, Beskok-Karniadakis 模型结果甚至逊于 Arkilic 一阶模型结果, 再次说明简单增加滑移边界条件的阶数并不能达到好的效果.

### 3 结 论

总结以上结果, 对于质量流量, 二阶速度滑移边界条件特别是 Cercignani 模型对应的 Navier-Stokes 解, 与一阶速度滑移模型相比, 在近滑移区的过渡

领域 ( $Kn = 0.1 \sim 0.4$ ) 有明显改进, 但就物面附近的速度分布而言, Cercignani 模型对于实际物面速度滑移  $u_w$  的捕捉, 与一阶模型相比虽有改善, 但在  $Kn = 0.1$  也已开始偏离 DSMC 和 IP 给出的结果. 表明二阶速度滑移模型对于改善 Navier-Stokes 方程在近滑移区的过渡领域中的表现是有限的.

由于 Boltzmann 方程完全求解十分困难, 无法在一般情况下基于其在物面附近的解导出适合于 N-S 方程的通用滑移边界条件. 因此目前的各种滑移模型包括本文着重讨论的几种二阶速度滑移模型都是在某些特定条件下得到的. 尽管如此, 它们在滑移区 ( $Kn < 0.1$ ) 的总体表现是不错的. 当流动进入过渡领域, 稀薄气体效应不只限于物面附近, 中心区域也受到明显影响, 物理上已非物面滑移修正所能反映. 这时应采取动理论方法如 DSMC 和 IP 及其与 N-S 方程耦合算法<sup>[17,18]</sup>, 它们既是现实的途径, 在物理上也更适合微尺度过渡领域流动.

### 参 考 文 献

- Zohar Y, Lee SYK, Lee WY, et al. Subsonic gas flow in a straight and uniform microchannel. *J Fluid Mech*, 2002, 472: 125~151
- Maurer J, Tabeling P, Joseph P, et al. Second-order slip laws in microchannels for helium and nitrogen. *Physics of Fluids*, 2003, 15: 2613~2621
- Arkilic EB, Breuer KS, Schmidt MA. Mass flow and tangential momentum accommodation in silicon micromachined channels. *J Fluid Mech*, 2001, 437: 29~43
- Fan J, Shen C. Statistical simulation of low-speed rarefied gas flows. *J Computational Physics*, 2001, 67: 393~412
- Cercignani C. Higher order slip according to the linearized Boltzmann equation. Institute of Engineering Research Report AS-64-19, University of California, Berkeley, 1964
- Cercignani C. The Boltzmann Equation and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 1988
- Hadjiconstantinou NG. Comment on Cercignani's second-order slip coefficient. *Physics Fluids*, 2003, 15: 2352~2354
- Deissler RG. An analysis of second-order slip flow and temperature-jump boundary conditions for rarefied gases. *Int J Heat Mass Transfer*, 1965, 7: 681~694
- Beskok A, Karniadakis G. Rarefaction and compressibility effects in gas microflows. *J Fluids Engin*, 1996, 11: 448~456
- Karniadakis G, Beskok A. Micro Flows. New York: Springer-Verlag, 2002
- Hadjiconstantinou NG. Validation of a second-order slip model for dilute gas flows. *Microscale Thermophysical Engineering*, 2005, 9: 137~153
- Hadjiconstantinou NG. A linearized kinetic formulation including a second-order slip model for an impulsive start

- problem at arbitrary Knudsen numbers. *J Fluid Mech*, 2005, 533: 47~56
- 13 Bird GA. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow*. New York: Clarendon Press, 1994
- 14 沈青. 稀薄气体动力学. 北京: 国防工业出版社, 2003 (Shen Qing. *Rarefied Gas Dynamics*. Beijing: National Defense Industry Press, 2003 (in Chinese))
- 15 Xie C, Fan J, Shen C. Statistical simulation of rarefied gas flows in micro-channels. *Rarefied Gas Dynamics*-23, 2003
- 16 Shen C, Fan J, Xie C. Statistical simulation of rarefied gas flows in micro-channels. *J Computational Physics*, 2003, 189: 512~526
- 17 Sun QH, Boyd ID. Drag on a flat-plate in low-Reynolds-number gas flows. *AIAA J*, 2004, 42: 1066~1072
- 18 Sun QH, Boyd ID. Flat-plate aerodynamics at very low Reynolds number. *J Fluid Mech*, 2004, 502: 199~206

## ASSESSMENT OF SECOND-ORDER VELOCITY-SLIP BOUNDARY CONDITIONS OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

Xie Chong<sup>1)</sup> Fan Jing<sup>2)</sup>

(Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract** For micro-scale gas flows, the Navier-Stokes equations with first-order velocity slip boundary conditions give results that agree with experimental data in the slip regime, but differ obviously in the transitional regime. Second-order velocity-slip boundary conditions were introduced to improve the performance of the Navier-Stokes equations in the transitional regime. This paper considers two-dimensional gas flows through microchannels for which the Navier-Stokes solutions based on different second-order velocity-slip boundary conditions suggested by Cercignani, Deissler, Beskok and Karniadakis, respectively, are compared with the kinetic results given by the information preservation (IP) method, the direct simulation Monte Carlo (DSMC) method, and experimental data. It is shown that the Cercignani model performs best among the three second-order models we examined, and its mass flow rate agrees with the DSMC and IP results even at the Knudsen number of 0.4. However, a careful examination of the slip velocities and velocity distributions at and around the channel surfaces given by the Cercignani model demonstrates that they considerably deviate from those given by the DSMC and IP methods at the Knudsen number of 0.1, that is generally regarded as a critical value to divide the slip and transitional regimes.

**Key words** microflow, velocity slip, DSMC, IP

Received 17 November 2005, revised 25 April 2006.

1) E-mail: chongxie@263.net

2) E-mail: jfan@imech.ac.cn