

高雷诺数流动的控制方程体系和扩散抛物化 Navier-Stokes 方程组的意义和用途*

高 智

中国科学院力学研究所, 高温气体动力学重点实验室, 北京 100080

摘 要 在计算机发达的时代, 高雷诺 (Re) 数绕流计算中有无必要使用简化 NS 方程组, 本文讨论这个问题。主要内容如下: (1) 高 Re 数绕流包含 3 种基本流动: 所有方向对流占优流动、所有方向对流扩散竞争流动和部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动 (简称干扰剪切流动), 3 个基本流动的特征彼此不同且在流场中所占领域大小彼此相差悬殊, NS 方程区域很小, 它们的最简单控制方程组 Euler、Navier-Stokes (NS) 和扩散抛物化 (DP) NS 方程组的数学性质彼此不同, 因此利用 Euler-DPNS-NS 方程组体系分析计算高 Re 数绕流流动就是一个合乎逻辑的选择, 该法与利用单一 NS 方程组的常用方法可以彼此检验和补充。(2) 流体之间以及流体与外界的动量、能量和质量交换, 流态从层流到湍流的演化主要发生在干扰剪切流动中, 干扰剪切流及其最简单控制方程——DPNS 方程组具有基础意义; DPNS 方程组笔者在 1967 年已提出。(3) 诸简化 NS 方程组: DPNS、抛物化 (P)NS、薄层 (TL)NS、黏性层 (VL)NS 方程组的发展、相互关系, 它们的历史贡献和今后的用途; 它们的数学性质均为扩散抛物型, 但它们包含的黏性项彼此有所不同; 从流体力学角度来看, 它们中只有 DPNS 方程组能够准确描述干扰剪切流动。提出把诸简化 NS 方程组统一为 DPNS 方程组的建议。(4) 干扰剪切流——DPNS 方程组与无干扰剪切流——边界层方程组之间的关系以及进一步研究干扰剪切流的意义。

关键词 流体力学, 高 Re 数流动, 干扰剪切流动, Navier-Stokes(NS) 方程组, 扩散抛物化 NS(DPNS) 方程组

1 引 言

高雷诺 (Re) 数流动在自然界和许多工程技术领域中普遍存在, 因此对它的研究和计算具有重大的意义。高 Re 数流动的基本控制方程通常认为是 Navier-Stokes (NS) 方程组^[1,2], 近年的流体力学和计算流体力学文献和专著如文[2~7]、许多气动计算软件如文[8~13]均把 NS 方程、扩散抛物化 (DP) NS 方程及 Euler 方程作为高 Re 数流动的基本控制方程体系。熟知的 Euler 方程和 20 世纪 60 年代才问世的 DPNS 方程都是 NS 方程组的简化形式。因此, 有一些学者认为: 计算机不发达时, NS 方程组的简化方程 Euler 方程组和 DPNS 方程组很有用; 现在计算机发达了, 今后更发达, 人们可以直接计算 NS 方程组, DPNS 方程组和 Euler 方程组就没有用了。DPNS 方程组和 Euler 方程组今后到底有没有用处?

Euler、DPNS 和 NS 方程构成的高 Re 数流动的基本控制方程体系有没有理论意义和实际应用价值? 流体之间以及流体与外界 (例如固壁) 之间的动量、能量和质量交换以及流动从层流到湍流的演化主要发生在剪切流中, 干扰剪切流及其最简单控制方程——DPNS 方程组与无干扰剪切流及其最简单控制方程——经典边界层方程组有何关系? DPNS 方程组与 Euler 方程组又有何关系? 本文讨论这些问题。

2 高 Re 数绕流的基本流动、特征、领域大小和控制方程组体系及应用

2.1 高 Re 数绕流的 3 种基本流动, 它们的最简单控制方程组

高 Re 数绕流包含 3 种基本流动, 即所有空间

方向对流占优流动、部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动和所有方向对流扩散竞争流动^[14]。在推导 3 个基本流动的守恒方程组前, 需要做点说明: 正像以后分析表明的部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动为剪切流动。剪切流动存在主流方向, 因此推导它的最简单守恒方程组必须合理选择坐标系, 例如对固壁邻域的剪切流应取附体坐标系, 弯曲壁条件下应取正交曲线坐标系, 其 x -轴沿壁面, y -轴垂直于壁面; 又如对流场内的剪切层、射流和尾迹等自由剪切流, 所选坐标系的一个坐标轴应与自由剪切流的主流方向相一致。我们以绕平板的二维可压缩无黏-黏性边界层干扰流动为例进行讨论, 对此情况应取 x -轴沿壁面的直角坐标系, 二维可压缩 NS 方程组则为

$$S_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & Re^{q-n_c} \\ S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = & \\ & Re^{\frac{1}{2}(q+n_c)} \\ \frac{1}{\rho Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \right. & \\ & Re^{-\frac{1}{2}(2-5q-n_c)} \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} & \quad (1.2) \\ & Re^{\frac{1}{2}(q+n_c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = & \\ & Re^{-\frac{1}{2}(1-3q-n_c)} \\ \frac{1}{\rho Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. & \\ & Re^{-\frac{1}{2}(3-7q-n_c)} \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} & \\ & Re^{-\frac{1}{2}(1-3q-n_c)} \quad Re^{-\frac{1}{2}(1-3q-n_c)} \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$S_t \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \quad (1.4)$$

$$\left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{c_p}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \\ & Re^{-(1-2q)} \quad Re^0 \\ & \frac{\mu}{Re} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \right. \\ & Re^{-(1-2q)} \\ & \left. \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1.4) \\ & Re^{-(1-2q)} \quad Re^{-2(1-2q)} \quad Re^0 \end{aligned}$$

$$p = \rho T \quad (1.5)$$

$$Re^{-q}$$

其中密度 ρ , 压力 p , 温度 T , 黏性系数 μ , 定压比热 c_p , 流速分量 u 和 v , 坐标变量 x 和 y 分别用 ρ_∞ , ρU_∞^2 , U_∞^2/R , μ_∞ , R , U_∞ 和 L 归一化。 L 为流向特征长度, 足标 ∞ 表示来流参数, $S_t = Lf/U_\infty$, $Re = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$, $Pr = c_p \mu / k$, k 为热传导系数, f 为物体特征振动频率, $S_t = O(1)$ 。此外在 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5) 诸项的下方, 我们也列出了根据干扰剪切流黏性区的尺度-数量级分析导出的诸项的数量级, 详细说明详见下文。

所有方向对流占优的物理含义是在 x -和 y -方向如下关系成立

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} & \gg \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} \sim v \frac{\partial v}{\partial y} & \gg \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

由关系 (2.1) 推知

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} & \gg \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} & \gg \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

因此所有方向对流占优流动中黏性扩散和热传导项很小于对流项, 是熟知的无黏流动, 描述无黏流动的最简单控制方程是 Euler 方程组

$$S_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.1)$$

$$S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

$$S_t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$S_t \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$p = \rho T \quad (3.5)$$

部分方向 (x - 方向) 对流占优部分方向 (y - 方向) 对流扩散竞争流动的物理含义是

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \gg \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

即 x - 方向对流项很大于黏性扩散项, y - 方向对流项与黏性扩散项同量阶. 为了导出 x - 方向对流占优 y - 方向对流扩散竞争流动的最简单守恒方程组, 我们利用物理定义式 (4.1) 和 (4.2), 对 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5) 包含的诸项, 以及物理量 ρ, u, v 和坐标方向长度尺度 x 和 y 在该流动黏性区的数量级大小进行估计, 类似于经典边界层理论的数量级分析, 可令

$$\begin{aligned} \rho &\sim Re^{-n_c}, \quad u \sim Re^{-n_u}, \quad v \sim Re^{-n_v}, \\ x &\sim Re^{-n_x}, \quad y \sim Re^{-n_y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

由连续性方程 (1.1) 推知

$$-n_u + n_x = -n_v + n_y = q \quad (4.4)$$

其中 q 为引入的干扰参量. 根据 y 方向对流扩散竞争的物理定义 $v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ 推知

$$n_y = (1 + q - n_c)/2, \quad n_v = (1 - q - n_c)/2 \quad (4.5)$$

假定对流扩散竞争区内能量耗散率 ε 在 Re 数很大时与 Re 近似无关, 即 ε 近似为 Re 的零次幂 Re^0 (该假设正确性的证明参见下文), 故有

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &\cong \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right] \cong u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \\ &v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \sim Re^{-n_c - 3n_u + n_x} \sim Re^0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

由式 (4.6) 和式 (4.4) 推知

$$\begin{aligned} n_x &= 3n_u + n_c, \quad n_u = \frac{1}{2}(q - n_c) \\ n_x &= \frac{1}{2}(3q - n_c) \end{aligned} \quad (4.7)$$

进而假定 $Pr \cong 1$, x - 方向对流占优 y - 方向对流扩散竞争流动的温度层与黏性层的 x - 和 y - 方向长度尺度相同. 由式 (4.5) 和式 (4.7) 不难推出 NS 方程

组 (1.1) ~ (1.5) 诸项的数量级, 它们已写在各项的下面.

压缩性参量 n_c 在能量方程 (1.4) 的对流、热传导和黏性诸项的数量级关系中并不出现, 而它在动量方程 (1.2) 和方程 (1.3) 的对流和黏性诸项的数量级关系中仅以公因子 $Re^{\frac{1}{2}n_c}$ 的形式出现, 因此压缩性参量 n_c 不影响对流、热传导和黏性诸项数量级大小的相对关系, 可见它不影响根据数量级分析的简化方程形式. 关于干扰参量 q 的数值范围, q 为零时, x - 方向对流占优 y - 方向对流扩散竞争流动黏性区的流向和法向长度尺度分别为 Re^0 和 $Re^{-1/2}$, 为经典边界层流动, 随着干扰的增强, 该流动的黏性区将由各向异性向各向同性演化, 各向同性极限满足 $n_y = n_x$, 由式 (4.5) 和式 (4.7) 推出 $q = 1/2$ 时 $n_y = n_x$, 所以干扰参量 q 的数值范围是 $0 \leq q < 1/2$. 应该提到, $q = 1/2$ 时, NS 动量方程 (1.2) 和方程 (1.3) 中惯性和黏性诸项为同量阶, 能量方程 (1.4) 中对流、黏性和热传导诸项为同量阶, 因此干扰剪切流各向同性极限的最简单控制方程组为 NS 方程组; 且 $q = 1/2$ 时速度和长度尺度 $u \sim v \sim Re^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - n_c)}$, $x \sim y \sim Re^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - n_c)}$ 与雷诺数 Re 的指数关系, 在不可压 $n_c = 0$ 的条件下与 Kolmogoroff 各向同性湍流速度和长度尺度与 Re 的指数关系相一致.

能量黏性耗散率的完整表达式为

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &\cong \frac{\mu}{Re} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \right. \\ &Re^{-(1-2q)} \\ &\left. \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &Re^{-(1-2q)} \quad Re^{-2(1-2q)} \quad Re^0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

由式 (4.8) 可知, 在高 Re 数和 $0 \leq q < 1/2$ 的条件下, $d\varepsilon/dt \cong Re^0$, 故式 (4.6) 的正确性得到证明.

当干扰参量 q 满足 $0 \leq q < 1/2$ 时, 对 q 的任意值, $x \sim Re^{-\frac{1}{2}(3q - n_c)} \gg y \sim Re^{-\frac{1}{2}(1+q - n_c)}$; 动量方程 (1.2) 和方程 (1.3) 黏性诸项均满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) &\sim Re^{\frac{1}{2}(q+n_c)} \gg \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\sim Re^{-\frac{1}{2}(1-3q-n_c)} \gg \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\sim Re^{-\frac{1}{2}(2-5q-n_c)} \sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \gg \\ &\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sim Re^{-\frac{1}{2}(3-7q-n_c)} \end{aligned}$$

且满足 x - 方向对流占优 y 方向对流扩散竞争的物理定义式 (4.1) 和式 (4.2); 而能量方程 (1.4) 中对流、热传导和黏性诸项的数量级关系必有

$$\begin{aligned} \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} &\sim \frac{c_p}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \sim \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \sim \\ Re^0 &\gg \frac{c_p}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \sim \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ &\sim Re^{-(1-2q)} \gg \\ \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 &\sim Re^{-2(1-2q)} \end{aligned}$$

因此, x - 方向对流占优, y - 方向对流扩散竞争流动黏性区的流向长度尺度很大于法向长度尺度, 该流动为剪切流, 称作干扰剪切流; 对于干扰剪切流, NS 方程组可以简化. 在 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5) 中丢掉数量级小于对流扩散竞争项 $v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ 的黏性和热传导诸小项, 得到固壁邻域干扰剪切流的最简单守恒方程组为

$$S_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (5.1)$$

$$S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} S_t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \\ \frac{1}{\rho Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} S_t \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \\ \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \\ \frac{c_p}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$p = \rho T \quad (5.5)$$

由于关系式 (4.3) ~ (4.7) 的数量级分析并未涉及干扰剪切流的边界条件, 因此这些数量级关系和方程组 (5.1) ~ (5.5) 适用于干扰剪切流的一般情况, 既适用于近壁干扰剪切流, 也适用于流场内的自由干扰剪切流, 例如射流、尾迹流等. 该方程组 (5.1) ~ (5.5) 包含了描述 x - 方向对流占优流动的惯性和主要黏性、热传导项, 包含了描述 y - 方向对流扩散竞争流动的惯性和主要黏性项; 即它包含了 Euler 方程组的所有项, 包含了边界层方程组中的黏性、热传导项以及法

向动量方程的主要黏性项; NS 方程组中其它更小量阶的黏性和热传导项对于干扰剪切流动的影响很小可近似加以忽略. 应该提到笔者在 1967 年分析高高 Re 数细长体绕流问题时已得到该方程组^[15], 当时称作无黏 - 黏性层匹配 (IVM) 的简化 NS 方程组 (缩写为 Simplified (S) NS 方程组, 下同). 由于 IVM-SNS 方程组 (5.1) ~ (5.5) 数学上为扩散抛物化型, 因此后来被称作扩散抛物化 (DP)NS 方程组^[16]. 对于干扰剪切流和它的最简单控制方程——DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5) 的进一步讨论见第 3 节和第 4 节.

所有方向对流扩散竞争流动的物理含义是在 x - 和 y - 方向如下关系式成立

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &\sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ v \frac{\partial v}{\partial y} &\sim u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

由关系式 (6.1) 推知

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &\sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} &\sim \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

关系式 (6.1) 和 (6.2) 表明: 对 x - 和 y - 方向对流扩散竞争流动, 动量方程和能量方程中所有惯性项、黏性项和热传导项的数量级相同, 因此支配所有方向对流扩散竞争流动的最简单控制方程就是 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5).

2.2 3 种基本流动的特征、领域大小

高 Re 数绕流 3 种基本流动的特征彼此不同. 如上节所述, 所有空间方向对流占优流动为无黏流, 它的最简单控制方程——Euler 方程组在定常情况下马赫数 $M > 1$ 时为双曲型, $M < 1$ 时为椭圆型 (参见第 3 节); 所有方向对流扩散竞争流动为各向同性黏性流动, 它的最简单控制方程——NS 方程组在 $M > 1$ 和 $M < 1$ 时均为椭圆型; 部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争干扰剪切流动为各向异性黏性 - 无黏流动, 它的最简单控制方程——DPNS 方程组为扩散抛物型即在 $M > 1$ 时为双曲抛物型, 在 $M < 1$ 时为椭圆型 (参见第 3 节的分析).

下面分析 3 种基本流动在高 Re 数流场中所占的领域大小. 为了不使讨论复杂化, 我们考虑不可压缩流. 令 x - 和 y - 方向对流占优流动的特征速度和特征长度分别为 u_c, v_c 和 x_c, y_c , 由关系 (2.1) 和 (2.2) 推知

$$u_c x_c \gg Re^{-1}, \quad v_c y_c \gg Re^{-1} \quad (7)$$

在固壁邻域、旋涡中心点邻域以外的绕流区域中, $u_c \sim 1$, 或许还有 $v_c \sim 1$, 因此有: $1 > x_c \gg Re^{-1}$, $1 > y_c \gg Re^{-1}$, 说明所有方向对流占优流动的区域 (简称 Euler 方程区域) 或可与整个绕流区域相比较 (高 Re 数内部和外部绕流通常都是这种情况), 在分区计算中亦可为子区域大小, 亦可为离散单元尺度大小. 对二维流动, ij - 单元流动 x - 方向对流占优意味着 x - 方向对流速度 u_{ij} 很大于该方向上的扩散速度 $\mu_{ij}(\rho_{ij}\Delta x_{ij})^{-1}$, 类似地 y - 方向对流占优意味着 $v_{ij} \gg \mu_{ij}(\rho_{ij}\Delta y_{ij})^{-1}$, 这就是说

$$\begin{aligned} R_{\Delta x_{ij}} &= \rho_{ij}u_{ij}\Delta x_{ij}/\mu_{ij} \gg 1 \\ R_{\Delta y_{ij}} &= \rho_{ij}v_{ij}\Delta y_{ij}/\mu_{ij} \gg 1 \end{aligned} \quad (8)$$

在高 Re 数内部和外部绕流计算中, 满足关系式 (8) 即网格雷诺数很大于 1 的单元即 Euler 方程单元普遍存在. 例如对绕平板的高 Re 数流, 若 $Re = 5 \times 10^6$, 网格为 x - 和 y - 方向格点数为 101×101 的均匀网格, 气流相对 x 轴的偏转角为 3° 时, 在固壁邻域外的区域中, $R_{\Delta x} \approx 5 \times 10^4$, $R_{\Delta y} \approx 2.6 \times 10^3$.

对部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动即干扰剪切流的黏性流动, 设 x - 方向和 y - 方向的特征流速和特征长度分别为 u_p, v_p 和 x_p, y_p , 由关系式 (4.1) 和式 (4.2) 推知

$$u_p x_p \gg Re^{-1}, \quad v_p y_p \sim Re^{-1}, \quad u_p y_p \sim v_p x_p \quad (9.1)$$

由关系式 (9.1) 推知

$$x_p \gg y_p, \quad u_p \gg v_p, \quad u_p y_p^2 / x_p \sim Re^{-1} \quad (9.2)$$

关系式 (9.1) 和式 (9.2) 给出了 x - 方向对流占优 y - 方向对流扩散竞争流动即干扰剪切流黏性区的尺度关系, 例如最常见的一种情况是 $u_p \sim 1$, $x_p \sim 1$, $y_p \sim Re^{-\frac{1}{2}}$, 这是熟知的经典边界层即黏性薄剪切层; 另一种常见情况是 x - 方向对流占优 y - 方向对流扩散竞争的离散单元流动, 此时 $R_{\Delta x_{ij}} \gg 1$, $R_{\Delta y_{ij}} \approx 1$. 但是必须指出: y - 方向对流扩散竞争要求支配该流动的最简单控制方程组必须包含与 $v \frac{\partial v}{\partial y}$ 同数量级的惯性、黏性和热传导诸项, 这就是 DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5); 因此部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动其实包含了黏性薄层和它的外部无黏流两部分, 且两部分之间存在非线性相互作用. 为了与通常所说的薄黏性剪切流相区别, 我们在前面已称部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动为干扰剪切流, 把通常所说的薄黏性剪切流称为无干扰剪切流, 无干扰剪切流就是经典边界层流动, 参见后面的讨论. 类似于 Euler 方程区域称干扰剪切流区域为 DPNS 方程区域. 干扰剪切流是高 Re 数流场中普遍存在的一种基本流动, 它包括诸如存在近似主流方向的内部和外部绕流流场, 无黏 - 边

界层干扰和无干扰流动, 自由剪切流、射流和尾迹流以及它们的外部无黏流, 高 Re 数流场离散近似中满足 $R_{\Delta x} \gg 1$, $R_{\Delta y} \approx 1$ 的众多离散单元的流动等.

对所有方向对流扩散竞争流动, 设 x - 方向和 y - 方向的特征流速和特征长度分别为 u_f, v_f 和 x_f, y_f , 由关系式 (6.1) 和式 (6.2) 推知

$$u_f x_f \sim Re^{-1}, \quad v_f y_f \sim Re^{-1}, \quad u_f y_f \sim v_f x_f \quad (10.1)$$

由关系式 (10.1) 推知

$$u_f \sim v_f, \quad x_f \sim y_f \quad (10.2)$$

关系式 (10.1) 和式 (10.2) 说明: 所有方向对流扩散竞争流动的区域 (简称 NS 方程区域) 很小. 例如驻点邻域、边界层分离点和再附点邻域等. 二维驻点流的特征流速为 $u_f \sim \alpha x_f$, $v_f \sim \alpha y_f$, α 为常数; 由关系式 (10.1) 推知, 驻点流 NS 方程区域的尺度为 $x_f \sim y_f \sim Re^{-1/2}$. 又如层流边界层分离点, 按照分离三层理论^[17,18]黏性下层的特征流速为 $u_f \sim Re^{-1/8}$, $v_f \sim Re^{-3/8}$, 由关系式 (10.1) 推知分离点 NS 方程区域的尺度为 $x_f \sim Re^{-7/8}$, $y_f \sim Re^{-5/8}$. 对均匀各向同性湍流, 耗散和传导平衡的区域即 NS 方程区域的尺度应为 Kolmogoroff 黏性耗散尺度 η , $\eta/L \sim Re_{et}^{-3/4}$, Re_{et} 为基于湍流积分尺度和脉动速度的 Reynolds 数, 并有 $Re_{et} \sim 0.01 Re$ ^[19], 故在所有空间方向均达到 $\eta \sim 30 Re^{-3/4}$ 尺度时, 均匀各向同性湍流的控制方程才为完全 NS 方程. 总之, 在高 Re 数绕流场中, 所有方向对流扩散竞争流动所占区域即 NS 方程区域很小.

2.3 Euler-DPNS-NS 方程组体系的应用

高 Re 数绕流含有 3 种基本流动, 3 种基本流动的特征彼此不同, 它们的最简单控制方程彼此不同, 流体之间以及流体与外界 (例如固壁) 之间的动量、能量和质量交换, 流态从层流到湍流的演化主要发生在干扰剪切流中, 且 NS 方程区域很小等特点, 说明对高 Re 数绕流的分析和计算, 采用 Euler-DPNS-NS 方程体系是一个合乎逻辑的选择. 该方案与利用单一 NS 方程组的方案相比, 特点是数值与物理分析相结合、根据主要影响因素的不同划分流场为 Euler-DPNS-NS 方程区域、对 NS 和 DPNS 方程区域作合理的网格局部加密、联立求解 Euler -DPNS-NS 方程组; 这样既可分辨很小 NS 区域的所有方向对流扩散竞争流动, 可分辨 DPNS 方程区域干扰剪切流中的动量、能量和质量交换特性以及流态演化过程, 又避免了在宽广的 Euler 方程区域重复计算众多的黏性和热传导项. 另一个特点是对具有近似主流方向的定常绕流, 在边界层无分离和分离区很小的情况下, 对整个绕流场可采用 DPNS 方程进行空间推进求解, 使计算维数减少一维^[6]. 从而能够大幅度节省计算

机时间和存储,例如 DPNS 方程组空间推进计算所需机时约为 NS 方程组时间推进计算所需机时的几分之一^[6]。

在高 Re 数复杂绕流流动计算中,区域分裂(domain decomposition)是最常用的算法。联立求解 Euler-DPNS-NS 方程组的绕流计算,其实就是根据流动特征不同划分子区域的物理区域分裂算法,该法与几何分区法有所不同,这是因为 3 种基本流动的子区域,即 NS 区域、DPNS 区域和 Euler 区域之间并无明确的分界面,彼此交界处具有渐近过渡性质。因此若根据 3 种基本流动采用区域分裂算法时,一是把 NS 区域和 DPNS 区域扩大即采用不重叠区域分裂算法,二是采用重叠区域分裂算法。例如 FPNS 气动计算软件^[8]在头部区用 NS 格式即大大扩大了 NS 区域的范围而在锥身区用 PNS 空间推进格式,同时发挥了物理分区和空间推进计算的优点;又如文[20]的二维可压缩流计算,根据网格雷诺数 $R_{\Delta x}$ 和 $R_{\Delta y}$ 大小判断离散单元流动形态,据此选择单元各自的最简单控制方程并进行联立求解,对激波边界层干扰等 3 种超声速绕流流动均获得满意的数值结果,进一步证实根据 3 种基本流动的物理考虑利用 Euler-DPNS-NS 方程体系分析计算高 Re 数流动的方案合理可行,且具有一定的优点。

此外需要指出:当最小的网格尺度大于 NS 方程区域的尺度时,NS 方程组计算其实等于计算 DPNS 方程组或计算 Euler-DPNS-NS 方程组。文[21]指出:文献上众多 NS 二阶格式求解高 Re 数绕流流动的计算,流向网格未作加密、流向网格雷诺数均大于 1,这样的 NS 方程计算其实是计算 DPNS 方程。这就是说,对高 Re 数绕流计算,求解单一 NS 方程组与求解 Euler-DPNS-NS 方程组体系相比,具有不必根据流动特征进行区域分裂,处理较简单和普适性好的优点;但正如前面所述,从理论上说,真正的 NS 方程组计算,即每个离散单元均为对流扩散相竞争的流动,要求每个离散单元的网格雷诺数满足 $R_{\Delta x} \approx 1$ 和 $R_{\Delta y} \approx 1$,这是一个十分苛刻的要求。幸好对流动和传热工程计算来说,并不需要任一离散单元在所有方向上的网格雷诺数均达到 $O(1)$ 量阶。

正是由于上述诸多情况,近年来不少流体和计算流体力学专著(如文[3~7])许多计算流体力学软件(如文[8~13])均把 Euler-DPNS-NS 方程作为高 Re 数流动的基本控制方程体系,说明高 Re 数流动控制方程组体系的学术观点已形成初步的共识。高 Re 数流动由特征不同的 3 种基本流动所组成及其相关分析无疑为这一共识提供了新的理论依据。分析计算高 Re 数流动的 Euler-DPNS-NS 方程体系方案与利用单一 NS 方程组方案无疑存在彼此检验和相互补充的关系。

2.4 干扰剪切流即存在近似主流方向的流动与 DPNS 方程组

干扰剪切流,即部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动是高 Re 数绕流的一种基本流动,笔者尚未在文献中看到这种提法,特别是由于流体之间、流体与外界(例如固壁)之间的动量、能量和质量交换,流动从层流经转捩到湍流的流态演化主要发生在剪切流中,因此有必要对它作进一步的说明。正如第 2.1 节和第 2.2 节所述,干扰剪切流包含薄黏性剪切层和外部无黏流;因此干扰剪切流就是存在近似主流方向的流动,干扰剪切流理论就是存在近似主流方向流动的扩散抛物化理论^[14,16],该理论可表述为:若流动存在近似主流方向(设为 x -方向),则它的最简单控制方程为扩散抛物化 Navier-Stokes(DPNS)方程组,该方程组包含 Euler 方程组的所有项,它包含的黏性项为: x -动量方程只包含对 y 的二阶导数项及同量阶项,法向动量方程同样只包含对 y 的二阶导数项以及同量阶的黏性项。我们知道,在江河、鱼类、航船和飞行器绕流等自然界和工程技术领域的流动现象中,存在近似主流方向的流动具有普遍性。

此外,超声速流中扰动不能向上游传递是众所周知的物理现象,黏性流 NS 方程组在马赫数 $M > 1$ 时数学上为椭圆型(参见下节分析),不能正确反映这一物理现象;而黏性流 DPNS 方程组在 $M > 1$ 时为双曲-抛物型,因此能够正确反映该物理现象,“弥补”了 NS 方程组的不足。进一步说明:把干扰剪切流即具有近似主流方向流动与无黏流和所有方向对流扩散竞争黏性流动并列,作为高 Re 数流动的 3 种基本流动很有必要,同时进一步说明利用 Euler-DPNS-NS 方程组体系描述高 Re 数流动的必要性 and 好处。

3 诸简化 NS 方程组的发展和历史作用,它们的数学性质、相互关系和用途

文献上有一些与 DPNS 方程组相类似的简化 NS 方程组,例如抛物化(P) NS^[3~7,22]方程组等。这些简化 NS 方程组是在 20 世纪六七十年代人们为了解决经典边界层理论不适用的绕流计算问题和边界层流动分离问题而提出的,当时对这些问题的研究很热,除提出上述简化 NS 方程组外,还相继提出了干扰边界层、多层边界层、分离三层(triple-deck)理论和边界层反方法^[17,18];后 4 种理论和方法是关于绕流场局部区域的理论,它们现在已很少被提及,简化 NS 方程组理论则是关于存在近似主流方向流动的全流场理论,在计算机不很发达,完成 NS 方程组工程计算尚不可能的时代,它们在高 Re 数内外绕流(边界层不发生分离及分离区不大)和中等 Re 数

绕流的工程计算中发挥了重要的作用,做出了历史性贡献;特别是在流体工程计算中它们现在仍得到广泛的应用。

这些简化 NS 方程组是针对具体的绕流流动,按照数量级估计丢掉 NS 方程组中某些黏性和热传导项而得到的,绕流流动的具体情况不同,丢弃黏性项的想法即化简 NS 方程的原则也有所不同,例如无黏 - 黏性层匹配原则^[15]、薄层近似^[23]、黏性层模型^[24]、抛物(parabolic)流模型^[25]等,得到的简化 NS 方程包含的黏性小项有所不同,并被冠以一些不同的称呼,例如无黏 - 黏性层匹配的 SNS^[15]、抛物化(P)NS^[22]、薄层(TL)NS^[23]、黏性层(VL)NS 方程组^[24]等,它们在流体力学计算中得到了广泛应用。专著[6]总结了这些简化 NS 方程组适用的具体流动问题:包括平板高速绕流的前缘和后缘流动,存在强横向压力梯度的混合层、射流和尾迹流,钝头和小钝头锥细长体高 Re 数绕流(驻点区除外),管道内流,沿墙角流动等。这些具体流动显然都属于部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动即干扰剪切流动,因此干扰剪切流概念十分有用,它不仅描述了高 Re 数绕流 3 种基本流动的一种基本流动,包括离散单元内 3 种基本流动的一种基本流动,且可描述上述所有的具体流动。

既然干扰剪切流概念具有普适意义,因此上述导出干扰剪切流基本方程——DPNS 方程组的尺度 - 数量级分析,同样可以用来导出上世纪提出的这些简化 NS 方程组;为了比较的缘故,我们利用本文的尺度 - 数量级分析统一而简略地阐述这些简化方程组。这里仍以绕平板的无黏 - 黏性边界层干扰流动为例进行讨论。二维可压缩 NS 方程组为(1.1)~(1.5)。方程中诸项在干扰剪切流黏性区的数量级已写在诸项的下边。 $0 \leq q < 1/2$; $q = 0$ 为经典边界层流动, $q = 1/4$ 为分离三层(triple-deck)的黏性下层^[17]。

在 NS 动量和能量方程组(1.2)~(1.4)中略去数量级小于等于 $O(Re^{-\alpha})$ 量级的黏性和热传导项,随 α 取值的不同可得到形成层次结构的一系列简化方程组^[16]。略去数量级小于等于 $O(Re^{-\frac{1}{2}(3-7q-n_c)})$ 的黏性和热传导项,得到所谓的部分抛物化(PP)NS 方程组; PPNS 与 NS 方程组相比仅仅是在法向动量方程(1.3)和能量方程(1.4)中分别减少了 $\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ 和 $\frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ 项。节省篇幅起见这里不再写出 PPNS 方程组。

在方程(1.2)~(1.4)中略去数量级小于和等于 $O(Re^{-\frac{1}{2}(2-5q-n_c)})$ 的黏性和热传导项,得到无黏 - 黏性层匹配(IVM)的 SNS 方程组即 DPNS 方程组(5.1)~(5.5)。抛物化(P)NS 和薄层(TL)NS 方程组与 DPNS 方程组(5.1)~(5.5)相比, PNS 和 TLNS

方程组的切向动量方程多包含了数量级仅为

$$O(Re^{-\frac{1}{2}(2-5q-n_c)})$$

的黏性项 $\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$; 它们的 y 方向动量方程少了数量级等于

$$O(Re^{-\frac{1}{2}(1-3q-n_c)})$$

的黏性项 $\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$; 能量方程又多包含了一些数量级仅为 $O(Re^{-(1-2q)})$ 的黏性和热传导项即多包含了

$$\frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

诸项。为节省篇幅起见,这里不再写出二维可压缩 PNS 和 TLNS 方程组的具体形式。对不可压缩无黏 - 黏性干扰流动情况,在方程组为非守恒形式的条件下, PNS、TLNS 和 IVM-SNS 方程组即 DPNS 方程组变得完全相同。

在方程组(1.2)~(1.4)中略去数量级小于和等于 $O(Re^{-\frac{1}{2}(1-3q-n_c)})$ 的黏性和热传导项, NS 方程组(1.1)~(1.5)简化为黏性层(VL)NS 方程组^[6,24]

$$S_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (11.1)$$

$$S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (11.2)$$

$$S_t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (11.3)$$

$$S_t \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) =$$

$$\frac{c_p}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (11.4)$$

$$p = \rho T \quad (11.5)$$

VLNS 方程组(11.1)~(11.5)的法向动量方程中惯性和黏性项在干扰剪切流的黏性区不相匹配,因为与惯性项同数量级的黏性项全被丢掉了。

在 NS 方程组(1.1)~(1.5)中略去数量级小于 $O(Re^0)$ 的所有惯性项和黏性热传导项,得到经典边界层方程组

$$S_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (12.1)$$

$$S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (12.3)$$

$$S_t \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{c_p}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (12.4)$$

$$p = \rho T \quad (12.5)$$

边界层方程组 (12.1) ~ (12.5) 是同时包含惯性和黏性 - 热传导项的最简单的黏性流控制方程组. 在 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5) 中丢掉全部黏性 - 热传导项得到 Euler 方程组 (3.1) ~ (3.5). NS 方程组 (1.1) ~ (1.5)、PPNS 方程组、IVM-SNS 即 DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5)、PNS 方程组、TLNS 方程组和 VLNS 方程组 (11.1) ~ (11.5) 均可描述无黏 - 黏性强干扰流动.

如上所述, 对绕平板的无黏 - 黏性强干扰流动, 按照惯性和黏性 - 热传导诸项在黏性区中数量级大小化简 NS 方程组, 将得到从 NS、经 PPNS、DPNS、VLNS 到 Euler 和边界层方程组的层次结

构, 参见图 1. 对正交曲线坐标系, 这种层次结构的层次更多, 但均包含 IVM-SNS 即 DPNS 和 VLNS 方程组层次 [16].

下面我们讨论上述诸简化 NS 方程组的数学性质, 上世纪人们对定常简化 NS 方程组的数学性质作过不少研究, 参见综述文献 [26]; 这里采用特征、次特征的分析 [16,27,28]. NS 方程组 (1.1) ~ (1.5)、IVM-SNS 方程组即 DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5)、VLNS 方程组 (11.1) ~ (11.5) 均为拟线性方程组, 它们的数学性质由方程组的特征和所谓的次特征所共同决定 [26,27]. 特征由方程组中的最高阶偏导数项即黏性和热传导项组成的主部所决定; 次特征则由方程组在 $Re \rightarrow \infty$ 的极限近似, 即略去黏性扩散和热传导项得到的 Euler 方程组所决定. 对 NS、PPNS、DPNS、VLNS 和边界层诸方程组, 我们令

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= U(x), & \frac{\partial u}{\partial y} &= U(y), & \frac{\partial v}{\partial x} &= V(x) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= V(y), & \frac{\partial T}{\partial x} &= q(x), & \frac{\partial T}{\partial y} &= q(y) \end{aligned} \quad (13)$$

利用式 (13), 并利用状态方程 (1.5) 消去压力 p , 即可把 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5) 转换为关于 $Z = (\rho, u, U(x), U(y); v, V(x), V(y); T, q(x), q(y))$ 的联立一阶拟线性偏微分方程组

$$A \frac{\partial Z}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial y} = F \quad (14)$$

其中 Z 和 F 是 10 维列向量, A 和 B 为 10×10 维矩阵, 拟线性偏微分方程组 (14) 的特征方程为

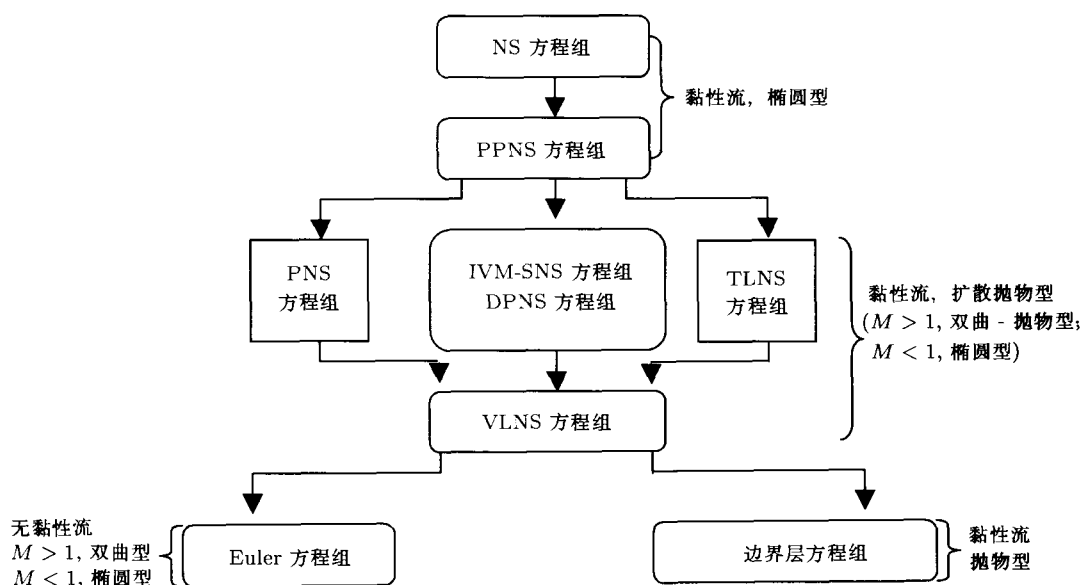


图 1 对于剪切流动, NS 方程组按数量级关系简化的层次结构, 诸简化方程组的数学物理性质

$$\det(\sigma_{1i}a_{ij} + \sigma_{2i}b_{ij}) = 0 \quad (15)$$

求得特征方程 (15) 的特征根 $\lambda_i = -\sigma_{1i}/\sigma_{2i}$

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \quad \lambda_4 = \frac{v}{u}, \quad \lambda_{5,6,7} = i, \quad \lambda_{8,9,10} = -i \quad (16)$$

其中, $\lambda_{1,2,3} = 0$ 的三重零特征相应于方程组 (14) 中主部为 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial T}{\partial x}$ 的 3 个方程, 它们与方程组 (14) 中其它 7 个方程的主部无关; 其它 7 个方程, 也就是说其它 7 个特征根决定了 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5) 的数学性质, 其它 7 个特征根除一个实根外其余 6 个均为虚根。

通过类似的数学处理, 求得 PPNS 方程组对应的一阶拟线性偏微分方程组的特征根或其分子和分母为 [26]

$$\sigma_1^3 = 0, \quad \sigma_2^2 = 0, \quad \lambda_6 = v/u \quad (17)$$

$$(\lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}) = (i, -i, \frac{2\sqrt{5}}{5}i, -\frac{2\sqrt{5}}{5}i)$$

其中 σ_1^3 的指数 3 表示三重特征, 以下同. 求得 IVM-SNS 方程组即 DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5) 对应的一阶拟线性偏微分方程组的特征根或其分子和分母为 [26,27]

$$\sigma_1^3 = 0, \quad \sigma_2^6 = 0, \quad \lambda_{10} = v/u \quad (18)$$

PNS 方程组和 TLNS 方程组对应的一阶拟线性偏微分方程组的特征根亦为式 (18). 求得 VLNS 方程组 (11.1) ~ (11.5) 对应的一阶拟线性偏微分方程组的特征根或其分子和分母为 [26,27]

$$\sigma_1^3 = 0, \quad \sigma_2^4 = 0, \quad \lambda_7 = \frac{v + \sqrt{T}}{u}, \quad \lambda_8 = \frac{v - \sqrt{T}}{u} \quad (19)$$

求得边界层方程组 (12.1) ~ (12.5) 对应的一阶拟线性偏微分方程组的特征根的分子或分母为 [26,27]

$$\sigma_1^2 = 0, \quad \sigma_2^6 = 0 \quad (20)$$

顺便求得边界层方程组的次特征根及其分母为

$$\sigma_2^2 = 0, \quad \lambda_{3,4} = \frac{v}{u} \quad (21)$$

NS、PPNS、DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5) 和 VLNS 方程组 (11.1) ~ (11.5) 的次特征均为 Euler 方程组的特征. Euler 方程组 (3.1) ~ (3.5) 的特征根求得为 [26]

$$\lambda_{1,2} = \frac{v}{u}, \quad \lambda_3 = \frac{M_x M_y + (M^2 - 1)^{1/2}}{M_x^2 - 1} \quad (22)$$

$$\lambda_4 = \frac{M_x M_y - (M^2 - 1)^{1/2}}{M_x^2 - 1}$$

其中 $M_x = u/a$, $M_y = v/a$, $M^2 = M_x^2 + M_y^2$, a 为声速, M 为马赫数. 当 $M > 1$, 所有 4 个特征根均为实根, Euler 方程组为双曲型; $M < 1$ 时, λ_3 和 λ_4 为复根, 为椭圆型. 综合 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5) 和 PPNS 方程组的特征和次特征, 表明 NS 方程组 (1.1) ~ (1.5) 和 PPNS 方程组数学上均为“真正的”椭圆型. DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5)、PNS 和 TLNS 方程组以及 VLNS 方程组 (11.1) ~ (11.5) 在马赫数 $M > 1$ 时为双曲 - 抛物型而在 $M < 1$ 时为椭圆型; 可见, IVM-SNS, DPNS, PNS, TLNS 和 VLNS 诸方程组并未真正抛物化, 因此称它们为抛物化 NS 即 PNS 方程组并不恰当. 把它们统称为扩散抛物化 NS 即 DPNS 方程组才是它们的合理称呼. DPNS 方程的称呼不仅正确反映了它们具有同一的数学物理性质, 即它们同时包含了惯性项和黏性 - 热传导项, 又具有马赫数 $M > 1$ 时为双曲 - 抛物型而在 $M < 1$ 时为椭圆型的特殊数学物理性质; 而且避免了与 NS 方程真正抛物化的简化方程即边界层方程相混淆. 由边界层方程组 (12.1) ~ (12.5) 的特征和次特征根式 (20) 和 (21) 知道, 边界层方程组才是真正的抛物化 NS 即 PNS 方程组. Euler 方程组在 $M > 1$ 时为双曲型 $M < 1$ 时为椭圆型, 似乎与 DPNS、PNS、TLNS 和 VLNS 方程组的数学性质“一致”, 但 Euler 方程不含有黏性和热传导项.

需要指出, 对于应用计算, 由于 IVM-SNS、DPNS、PNS、TLNS 和 VLNS 方程组均为黏性流方程组, 且数学上它们均为扩散抛物型, 因此可以统称它们为 DPNS 方程组. 但是, 应当强调, 关于干扰剪切流的最简单控制方程组最好还是取 IVM-SNS 即 DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5), 因为只有它才能完整描述 x - 方向对流占优, y - 方向对流扩散竞争流动的物理现象, 该方程组同时包含了支配 x - 方向对流占优剪切运动的惯性项和主要剪切交换项、包含了支配 y - 方向对流扩散相竞争的惯性和主要黏性项. VLNS 形式的 DPNS 方程组 (11.1) ~ (11.5) 虽然包含了支配 x - 方向对流占优剪切运动的惯性项和主要剪切黏性项, 但丢掉了法向动量方程中的所有黏性项, 不仅导致法向动量方程诸项在黏性区数量级失调, 特别是丢掉了 y - 方向对流扩散相竞争的物理内容. 而在 PNS 和 TLNS 方程组中支配 y - 方向对流扩散相竞争的某些数量级为 $O(Re^{-\frac{1}{2}(1-3q-n_c)})$ 的黏性项被丢弃, 但在 x - 动量方程和能量方程中又保留了某些数量级比 $O(Re^{-\frac{1}{2}(1-3q-n_c)})$ 还小的黏性和热传导项. 在近年来的专著 [3 ~ 7] 中, PNS 和 TLNS 方程组均是化简守恒性 NS 方程组的结果, 因此很难保持 PNS 和 TLNS 方程组中诸项在数量级上的和谐一致. 总之, 从流体力学的角度来看, 干扰剪切流这一基本流动的最简单控制方程应是无黏 - 黏性层匹配的 DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5); PNS、TLNS 和

VLNS 方程组虽具有与 DPNS 方程组相同的扩散抛物化的数学性质, 但要作为干扰剪切流的最简单控制方程, 它们存在如上所述的实质性不足.

此外, 诸简化 NS 方程组解与 8 类 NS 方程组准确解比较表明: 无黏 - 黏性层匹配的 DPNS 方程组解与 8 类 NS 准确解完全一致, 且它在边界层分离点数学上无奇异性; 而其它形式的简化 NS 方程组, 如 VLNS 方程组, 它的解仅与一类 NS 准确解一致, 在边界层分离点它又存在数学奇异性^[29~31]. 上述诸多情况说明: 从流体力学的角度看, 文献上应当避免列举多种简化 NS 方程组的纷乱局面, 应该统一使用无黏 - 黏性层匹配的 DPNS 方程组. 这样才能保证 DNPS 方程组和它所描述的部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争流动, 是具有普遍意义的一种基本流动和控制方程组; 从而避免人们把 DPNS 方程仅仅当作描述某些具体流动的控制方程组.

4 干扰剪切流 —— DPNS 方程组与无干扰剪切流 —— 边界层方程组的关系

最后我们讨论干扰剪切流 —— DPNS 方程组 (5.1) ~ (5.5) 和无干扰剪切流 —— 边界层方程组 (12.1) ~ (12.5) 之间的关系. DPNS 方程组是支

配部分空间方向对流占优部分方向对流扩散竞争干扰剪切流的最简单控制方程组, 边界层方程组则是支配无干扰剪切流的最简单控制方程组. 应该强调, 正如节 3 指出的 DPNS 方程能够同时描述干扰剪切流的黏性区和黏性区以外的无黏区, 能够描述黏性和无黏流之间的非线性干扰现象. 经典边界层方程组 (12.1) ~ (12.5) 只能描述无黏 - 黏性彼此无干扰 (即干扰参量 $q = 0$) 条件下的剪切黏性流, 而不适用于黏性流外的无黏流, 更不能描述剪切流黏性层与其外部无黏流之间的非线性相互作用, 且在经典边界层理论中剪切黏性流的外部无黏流应是预先给定的边界条件. 因此, 无干扰剪切流是干扰剪切流的特例, 边界层方程理论则是 DPNS 方程理论的特例. 图 2 给出 DPNS 和边界层方程组适用范围的一个例子. 边界层方程组数学上为抛物型, 不论马赫数 $M > 1$ 还是 $M < 1$, 边界层方程组的初边值问题适定, 对它均可实施空间推进计算; DPNS 方程组为扩散抛物型, 参见图 1, $M < 1$ 时为椭圆型, $M > 1$ 时为双曲抛物型, 因此 DPNS 方程组的初边值问题在 $M > 1$ 时适定而在 $M < 1$ 时不适定; 若给定任一变量, 例如 p 或 u , 则在 $M < 1$ 时 DPNS 方程组的初边值问题变成适定, 而完全 NS 方程组不具有这个性质.

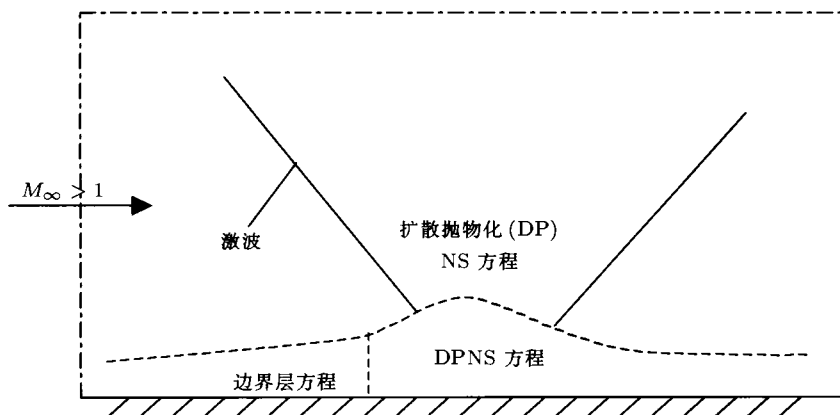


图 2 激波 - 边界层干扰 (边界层无分离) 流动中, DPNS 方程和边界层方程适用范围示意图: DPNS 方程适用于干扰剪切流即固壁和点划线内的整个流动区域, 边界层方程适用于无干扰剪切流即无干扰黏性边界层区域

无干扰和干扰剪切流理论都是流动存在近似主流方向的流体力学理论, 但它们的控制方程 —— 边界层方程组和 DPNS 方程组解在逼近 NS 方程组已有的熟知精确解方面却有天壤之别. 这些 NS 方程组精确解^[29,32]: 例如二维和三维驻点流、Poiseuille 圆管流、同心旋转圆筒间的流动、收缩和扩张渠道流动、旋转圆盘附近的流动、平行旋转圆盘之间的流动、圆孔射流等, 显然这些 NS 精确解流动都是存在主流方向或存在近似主流方向的一些特殊流动. 应当强

调, 边界层方程组不能描述这些特殊流动, 而 DPNS 方程组能够描述这些流动, 且这些流动的 DNPS 方程组解与这些 NS 方程组精确解完全一致^[29]. 这表明: 对这些特殊流动, DPNS 方程组是描述它们的精确方程组而不是近似方程组. 因此我们要问, 对存在主流方向或存在近似主流方向, 但未找到 NS 方程组精确解的那些流动, 例如绕平板、绕二维楔和绕圆锥 (边界层不发生分离) 流动以及通道内流等, DPNS 方程组是描述它们的精确方程组还是近似方程组?

这是一个值得研究的课题。

应该指出, 剪切流马赫数 $M < 1$ 或在剪切流内 $M < 1$ 的区域中, 扰动能够向上游传递, 黏性边界层方程组不能反映这一物理现象; 而 DPNS 方程组在 $M < 1$ 时为椭圆型, 因此可以反映上述物理现象, 从而“弥补”了边界层方程组的上述不足。特别是如第 2.4 节指出的, 流体之间、流体与外界 (例如固壁) 之间的动量、能量和质量交换, 流动从层流经转换到湍流的流态演化主要发生在剪切流动中, 因此对剪切流动的研究历来很受重视, 利用边界层方程组分析计算无干扰剪切流和流动控制的文献和专著很多, 例如文 [5, 32 ~ 34] 提供了丰富的规律性知识和可供工程应用的图表和数据。利用 DPNS 方程组分析计算干扰剪切流、具有近似主流方向内外绕流的研究不少, 但很不充分, 尚未提供足够丰富的成果和规律性知识。

5 结束语

利用 Euler-DPNS-NS 方程体系描述和计算高 Re 数内、外绕流流动, 在流体力学和计算流体力学学术界已初步形成共识 [3~13]。但对此也有不同的看法。高 Re 数流动包含 3 种基本流动 (即所有空间方向对流占优、部分方向对流占优部分方向对流扩散竞争和所有方向对流扩散竞争流动) 及其领域大小相差悬殊, NS 区域很小, 它们最简单控制方程 Euler、DPNS 和 NS 方程组数学性质不同以及利用方程体系计算绕流可与流体力学理论很好相结合的分析, 进一步为这一共识提供了深层次的物理依据。在高 Re 数绕流计算中深入发挥 Euler-DPNS-NS 方程体系的作用, 并与 NS 方程计算彼此检验和相互补充, 实现高 Re 数流动的实用、高效、准确的科学计算是值得重视和进一步研究并大力实践的课题。无干扰剪切流基本方程——边界层方程组的提出和应用是划时代的进展, 已取得了极其丰硕的成果; 干扰剪切流基本方程——DPNS 方程组的提出和应用同样是历史性的贡献, 利用 DPNS 方程深入分析计算干扰剪切流、具有近似主流方向内外绕流和流动控制问题, 获得类似于边界层方程组分析计算无干扰剪切流那样的丰硕成果和规律性知识无疑都是值得重视和大力研究的课题。

致谢 庄逢甘院士、张涵信院士、周光炯教授、张德良教授都提出了富足的意见和建议; 他们在有关论文、专著和讲义中选写、讲授了作者关于 DPNS 方程理论和算法的研究结果, 作者深表感谢。

参 考 文 献

- 1 周光炯, 严宗毅, 许世雄, 章克本. 流体力学 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2000
- 2 庄逢甘, 张德良. 扩散抛物化 (DP)NS 方程组的意义及其在计算

- 流体力学中的应用. 空气动力学学报, 2003, 21(1): 1~10
- 3 AIAA 2003-2005 Distance learning course. Advanced computational fluid dynamics. <http://www.aiaa.org>
- 4 Erikson L E. Numerical simulation of Compressible Flows. VAC/CTH Themo: [PhD thesis]. USA, 2001
- 5 Cebeci T, Cousteix J. Modeling and Computational of Boundary Layer Flows. 2nd ed. New York: Springer, 2001
- 6 Tannehill T C, Anderson D A, Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Second edition. New York: Taylor & Francis. 1997
- 7 Hoffmann K A, Chiang S T. Computational Fluid Dynamics for Engineers Vol.II. A Publication of Engineering Education System. Wichita Kansas, 1995
- 8 FPNS code Aerotechnologies, Inc. USA. <http://www.aerotechnologies.com>
- 9 VULCAN hypersonic airbreathing propulsion branch NASA. <http://vulcan-cfd.larc.nasa.gov>
- 10 VIPER software and engineering associates, Inc. USA. [http://www/seainc.com](http://www.sea-inc.com)
- 11 GASP virginia tech aerospace engineering USA. <http://www.gasp.org>
- 12 WIND the NPSRC alliance NASA glenn research center, cleveland, USAF amold engineering development center, Tullahoma, Tennessee. <http://www.npsrc.org>
- 13 Miller J H, Tannehill J C, Lawrence S L. Parabolized Navier-Stokes Code for solving supersonic flows. *AIAA J*, 2000, 38(10): 1837~1845
- 14 高智. 流场计算中离散近似与力学近似相结合的几个问题. 中国学术期刊文摘, 1997, 5: 615~17
- 15 高智. 简化 Navier-Stokes 方程组及无黏和黏性边界层联立求解. 力学学报 1982, 14(6): 606~661
- 16 高智. 简化 Navier-Stokes 方程的层次结构及其力学内涵和应用. 中国科学 (A 辑), 1988, 18(6): 625~640
- 17 Stewartson K, Williams P G. Self-induced separation, *Proc Roy Soc A312*, London, 1968, 181~201
- 18 卞荫贵. 边界层研究进展. 力学进展, 1980, 10(2-3): 7~26
- 19 Ferziger J H, Peric M. Computational Method for Fluid Dynamics. 3rd ed. New York: Springer, 2002
- 20 高智, 申义庆. 黏性流动有限差分计算的新策略. 中国科学 (A 辑), 1999, 29(5): 433~443
- 21 张函信, 冯超, 宗文刚. 网格与高精度差分计算问题. 力学学报, 1999, 31(4): 398~405
- 22 Rubin S G, Rudman S. Hypersonic viscous flow over slender bodies with sharp leading edges. *AIAA J*, 1968, 6(10): 1883~1889
- 23 Baldwin B S, Lomax H. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA paper* 78-0257, 1978
- 24 Davis R T. Numerical solution of hypersonic viscous shock-layer equation. *AIAA J*, 1970, 8(5): 843~851
- 25 Patankar S V, Spalding D B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int J Heat Mass Transfer*, 1972, 15(10): 1787~1786
- 26 王汝权, 申义庆. 扩散抛物化 Navier-Stokes 方程组数值解法评述和新进展. 力学进展, 2005, 4
- 27 高智. 流体力学基本方程组和简化 Navier-Stokes 方程组的层次结构理论. 力学学报, 1988, 20(2): 107~116

- 28 王承尧, 王正华, 杨晓辉. 计算流体力学及其并行算法. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002
- 29 高智. 论简化 Navier-Stokes 方程组. 中国科学 (A 辑), 1987, 17(10): 1058~1070
- 30 Zhuang F G, Gao Z. Researchs on physical and numerical aspects of the simplified Navier-Stokes equations in China. *Comput Fluid Dynamics Jour*, 1994, 2(4): 393~405
- 31 Tian Jiwei, Gao Zhi. Character of simplified Navier-Stokes equations near separation point for two-dimensional laminar flow over a flat plate. *Science in China (Series A)*, 1992, 35(10): 1242~1253
- 32 Schlichting H, Gersten K. *Boundary Layer Theory*. 8th ed. New York: Springer, 2004
- 33 Kluwick A. *Recent Advances in Boundary Layer Theory*. New York: Springer, 1998
- 34 Lachmann G V. *Boundary Layer and Flow Control*. New York: Pergamon Press Inc, 2003

SIGNIFICANCE AND USE OF BASIC EQUATION SYSTEM GOVERNING HIGH REYNOLDS (Re) NUMBER FLOWS AND DIFFUSION-PARABOLIZED NAVIER-STOKES (DPNS) EQUATIONS

GAO Zhi

Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

Abstract In the times of the rapid development of computer art, one wonders whether it is necessary or not to consider simplified Navier-Stokes (NS) equations in numerical simulations of high Reynolds number flows over bodies. This problem is examined in this paper. (1) Any high Re number flow over bodies consists of three basic flows: the flow with convection-dominant in all spatial directions, the flow with convection-diffusion competition in all directions and the flow with convection-dominant in part directions and convection-diffusion competition in part directions, which is called the interacting shear flow; the features of the three basic flows are different; their simplest conservation equations, i.e. the Euler equations, Navier-Stokes (NS) equations and diffusion-parabolized(DP) NS equations, have different mathematical characteristics; there is a great disparity in domains of the three basic flows and the domains of NS equations are very small. Therefore, adopting Euler-DPNS-NS equation system to analyze and compute high Re number flows over bodies is a logical approach. There exists a mutual examined-complemented relationship of this approach with the usual one of adopting only NS equations. Both the momentum-, energy- and mass- exchanges between fluid and fluid, fluid and environment(such as solid wall) and flow evolution from laminar to turbulence take place mainly in the interacting shear flows, which and its simplest conservation equations-DPNS equations are fundamental. The interacting shear flow is exactly a flow with an approximate main-stream direction. The DPNS equations were presented by the author in 1967^[2,15]. (2) There are several simplified NS equations similar to DPNS equations, such as parabolized (P)NS^[3,22], thin-layer (TL)NS^[3,23] and viscous-layer (VL)NS equations^[6,24]. As to these simplified NS equations, their development, historical contribution to computational fluid dynamics, mathematical characteristics, applications and mutual relations are discussed. (3) The relationship between the interacting shear flows-DPNS equations and non-interacting shear flows-boundary layer equations is also examined. The necessity of studying further the interacting shear flows and DPNS equations are emphasized.

Keywords fluid mechanics, high Reynolds (Re) number flows, interacting shear flows, Navier-Stokes (NS) equations, diffusion-parabolized (DP) NS equations