

导电薄板内电流密度分布与反平面剪切的比拟

金晓清

李 辉

(西北大学土木工程系, 美国) (中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 定量分析电流密度在含裂纹载流薄板内的分布是当前利用电流热效应止裂技术中一个首先要解决的问题。由于裂纹的存在, 电流密度在裂尖形成带奇异性分布的高度密集。现有的分析方法往往比较复杂或局限于特殊布置形式的裂纹。通过电流密度分布与弹性力学里反平面剪切问题的比拟, 把分析含裂纹载流薄板内电流密度的分布等效于考虑相应的 III 型裂纹问题, 并比照 III 型裂纹的应力强度因子来定义电流密度因子。而对于裂纹问题的处理可采用分布位错法这一断裂力学里便利有效的分析手段。由给出的算例可见, 所提出的比拟解法可以方便精确地求解电流密度在裂尖附近的奇异分布, 并有助于对这一奇异性在概念上的直观理解。

关键词 电流密度因子, III 型裂纹, 反平面剪切, 分布位错法

ON THE ANALOGY BETWEEN THE CURRENT DENSITY DISTRIBUTION IN A THIN CONDUCTIVE PLATE AND THE ANTI-PLANE SHEAR PROBLEM

JIN Xiaoqing

(Department of Civil and Environmental Engineering, Northwestern University, Evanston, IL 60208, USA)

LI Hui

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract Qualitative analysis of current density distribution in a thin conductive plate containing cracks is the first problem to be solved for the crack-preventing technology based on the electromagnetic heating effect. To investigate the singular distribution of the current density at the crack tips, most of the existing solutions are complicated or are only valid for a specific arrangement of the cracks. In this paper it is found that there exists a close analogy between the current density distribution and the anti-plane shear problem. Hence the solution to the current density distribution in a cracked conductive plate can be deduced by considering a corresponding mode III crack problem. The current density factor is defined in a similar way as the stress intensity factor, as its counterpart in the mode III crack problem. The consequent crack problem can be solved efficiently by the distributed dislocation technique, which is a widely applied tool in fracture mechanics. A numerical example is provided to demonstrate that the proposed numerical method is convenient and accurate and also helps to the understanding of the singularity of the current density distribution at the crack tip.

Key words current density factor, mode III crack, anti-plane shear, distributed dislocation technique

带电工作的机械构件在工程技术应用中日趋广泛, 在对它们的设计分析以及安全可靠评估中, 考虑电磁力作用下的断裂性能越来越受到关注。当在含裂纹的导电体内通入电流时, 裂尖附近电流存在明显的绕流和集中效应, 并伴随焦耳效应产生大量

聚集于裂纹前缘附近的热量。利用这一电磁热效应来遏制裂纹扩展, 白象忠等^[1]取得了一定的成果。在这些研究中, 一个首先要解决的问题是如何定量分析裂尖处电流密度的奇异集中效应。现有的对这一问题的分析手段往往比较复杂, 或者只考虑特定

分布形式的裂纹^[2],而且这些求解方法也很难直观揭示裂尖处电流密度分布的性质.本文通过一种比拟的方法,把对电流密度的求解与反平面剪切问题联系起来.利用断裂力学广泛应用的分布位错法,借由位错的基本解,便可以很方便地求解任意方式分布的一个或多个裂纹问题.

比拟解法是科学研究中重要的逻辑推理方法之一.当两种不同物理现象间具有相同形式的数学模型,并且两类物理量之间存在类似变化规律,这两类不同的物理问题往往存在着紧密的比拟关系.因而其中一类事物已有的相关知识或较易通过实验测量而获得的结果就可以推演到另一事物中.弹性理论中柱体扭转与均匀受压薄膜之间的比拟就是一个典型例子.通过这种比拟手段,可以更直观理解柱体横截面上应力分布的大致情况.在本文的分析中,含裂纹载流薄板内电流密度在裂尖的奇异性质可以通过与 III 型裂纹的应力强度因子建立联系.从而就可以利用断裂力学里现有知识和分析方法来考察裂纹对电流分布的扰动效应.

1 电流密度分布与反平面剪切问题的比拟

稳恒电流的势函数 $\Phi(x,y)$ 满足调和方程,电流密度矢量 J 与势函数的梯度成正比.对于无体力作用的反平面剪切问题,唯一不为零的出平面位移分量 $W(x,y)$ 也满足调和方程,应力张量 σ 只剩下两个不为零的剪应力分量 $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})$,并且也正比于位移的梯度.如图 1 所示,在导电薄板所处的 $x-y$ 平面上有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$J_x = -\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad J_y = -\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{2}$$

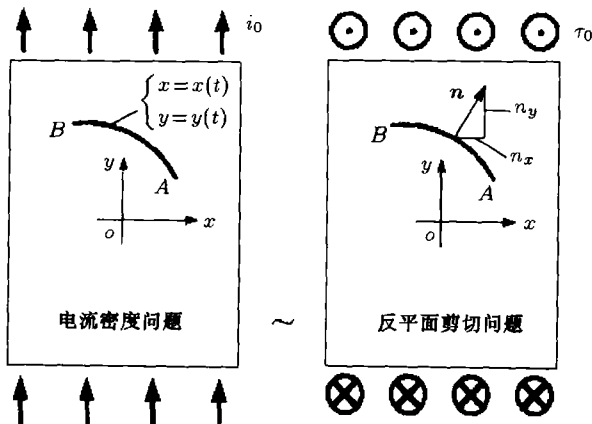


图 1 电流密度问题与反平面剪切问题的比拟

式中 J_x, J_y 是电流密度的 x, y 分量, γ 为电导率.

对于不受体力作用的反平面剪切问题,位移与剪应力分量满足

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y} \tag{4}$$

式中, μ 为薄板的剪切模量.

当薄板内含有裂纹时,不失一般性,裂纹曲线可由如下参数方程给出

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \right\} (a \leq t \leq b) \tag{5}$$

式中,当 t 由 a 连续变到 b 时,裂纹上的点相应由 A 连续变到 B .任取裂纹上一点 (x_i, y_i) 对应于参数值 t_i ,假定曲线在该处的单位外法线 n 与 x 轴, y 轴正向夹角的余弦是 (n_x, n_y) .

设在裂纹处不导电,即沿裂纹面没有法向流动:
 $n \cdot J = 0$, 即

$$n_x J_x + n_y J_y = 0 \tag{6}$$

对于反平面剪切问题,由弹性力学知,裂纹面上面力为零

$$n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} = 0 \tag{7}$$

对比所列的这些公式,不难看出上面两类不同物理问题所满足的数学微分方程的相似性.如果引入如下的比拟关系

$$W \sim -\Phi, \quad \mu \sim \gamma, \quad \sigma_{xz} \sim j_x, \quad \sigma_{yz} \sim j_y$$

即把电流势函数视为反平面问题中的出平面位移分量的相反数,把电导率视为剪切模量,把电流密度分量视为剪应力分量,则电流密度在平板内的分布和反平面剪切问题中剪应力分量的分布在数学上便完全等价.从而对于分析带裂纹薄板内电流密度的分布完全可以借助于断裂力学里关于 III 型裂纹的分析结果,这样对平板内电流密度的分布方式的理解就可以变得更加直观.

由断裂力学里 III 型裂纹的基本知识可知,在无限大平板内含有一长度为 $2a$ 的直裂纹,并在无穷远处受到沿裂纹走向且大小为 τ_0 的均布反平面剪切面力作用时,应力在裂尖处奇异分布.这一奇异性通过 III 型应力强度因子 K_{III} 表征

$$K_{III} = \tau_0 \sqrt{\pi a} \tag{8}$$

由上面的比拟关系, 可以推断当无限大导电平板内同样含有一长度为 $2a$ 的裂纹, 并在无穷远处沿垂直于裂纹的方向通入大小为 J_0 的稳恒电流时, 电流密度在裂尖附近的分布也带有奇异性, 可类似地定义“电流密度因子”来表征

$$K_J = J_0 \sqrt{\pi a} \quad (9)$$

这一定义方式可以与文献 [3] 相互参照.

2 分布位错法简介

通过引入上述的比拟关系, 这两种不同的研究领域便可以关联起来. 由于 III 型裂纹是断裂力学里 3 种基本裂纹形式之一, 现有充分的研究方法和实验资料可以利用. 对带裂纹平板内电流密度的求解完全可以借助断裂力学里常用的分布位错法来进行分析. 这一分析方法的重大优势是: 一旦位错的基本解可以确定, 则对平板内含任意数量、任意分布方式的裂纹可以通过类似格林函数的方法来列出基本方程组. 这些方程往往是带有柯西核的奇异积分方程 (singular integral equations containing cauchy kernel), 可由配点法进行数值计算. 对分布位错法的详细描述和具体运用可以参阅文献 [4], 文献 [5] 介绍了求解任意分布多裂纹的流程式解决方案. 下面简单说明一下该方法的基本步骤, 并在下一节中提供一个算例以助理解.

分布位错法需要先求得位错的基本解. 这里所说的位错采用 Dundurs 定义形式 [6], 是弹性力学范畴里的一种抽象. 位错量表示了从位错核出发延伸到无穷的位移跳跃, 可由 Burger 矢量来标记. 与反平面剪切问题所对应的称为螺旋位错 (screw dislocation). 位错的基本解是指所考虑问题在不计外力作用情况下, 当位错核位于 (ξ, η) 处所引起的任意点 (x, y) 处的应力分布. 在断裂力学文献中, 这一基本解通常写成如下的形式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y) &= \frac{\mu b_z}{2\pi} G_{zzz}(x, y; \xi, \eta) \\ \sigma_{yz}(x, y) &= \frac{\mu b_z}{2\pi} G_{zyz}(x, y; \xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 b_z 为该位错 Burger 矢量的大小. $G_{zzz}(x, y; \xi, \eta)$ 和 $G_{zyz}(x, y; \xi, \eta)$ 称为位错影响函数 [4]. 文献 [7] 给出二维无限域的螺旋位错影响函

数

$$\left. \begin{aligned} G_{zzz}(x, y; \xi, \eta) &= \frac{-y + \eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \\ \sigma_{zyz}(x, y; \xi, \eta) &= \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对于不同边界形状的平板, 一旦上式获得, 则分布位错法其余的求解步骤基本一致, 简述如下:

首先分析不含裂纹平板的应力分布, 即假定该平板没有裂纹缺陷, 求解出其受相同载荷作用下的应力. 对所考虑问题, 这一步的解往往不难获得.

在真实问题中, 裂纹面上应该满足应力自由这一条件. 现考察上面的解在裂纹面上的应力分布情况, 若所求得的应力并不消失, 由于问题的线性性质, 则需要叠加上一个平板边界不受力并能导致在裂纹面上有相反应力分布的修正解. 这一修正解恰好可以由上面的位错基本解通过叠加而获得.

把裂纹等效视为由连续分布的位错的叠加, 由这些位错所造成的裂纹面上的应力分布可以通过对位错的基本解 (例如式 (10)) 的积分获得. 由这一解所应达到的修正效果而列出积分形式的方程, 并通过精确求解或数值方法来计算位错分布的密度函数.

最后由求得的位错密度函数来计算相关的应力强度因子、应力分布等等.

应该指出, 上面的分析方法可以推广到多裂纹或斜裂纹中去, 这时可能需要利用坐标的平移旋转等变换. 对裂纹问题中柯西形式的奇异积分方程进行数值求解时, 可以通过配点法来处理, 但是对基本函数形式的选取则需因所考虑的具体问题而异. 譬如上面的方法也同样适用求解表面裂纹, 但这时候进行配点法时所选的基本函数应体现裂纹的奇异性. 这些内容在文献 [4,5] 都有详细论述, 本文从略.

3 算例与讨论

考虑平板内含一个圆弧裂纹的例子. 其电流密度的原型问题见文献 [8], 相比拟的断裂力学问题如图 2 所示. 文献 [9] 已给出这个问题 III 型应力强度因子的解析解, 当然可以直接利用其结果. 下面用分布位错法来求解断裂力学问题, 并与解析解对比. 这些分析结果利用比拟关系便可以类推到电流密度问题.

当不含裂纹时, 板内剪应力均匀分布: $\bar{\sigma}_{xz} = \tau_0$,

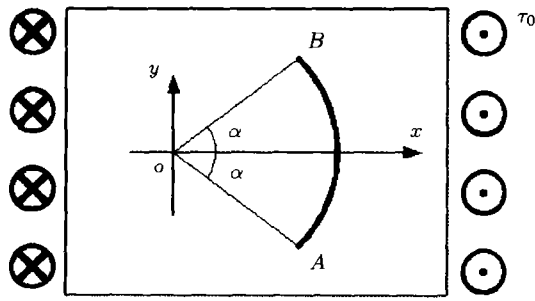


图 2 比拟的 III 型圆弧裂纹问题

$\bar{\sigma}_{yz} = 0$. 考察在裂纹面上 $\theta = \phi$ 处的面力

$$\bar{\sigma}_{nz} = n_x \bar{\sigma}_{xz} + n_y \bar{\sigma}_{yz} = \tau_0 \cos \psi \quad (12)$$

式中带波浪线的量表示不含裂纹问题的解.

位错引起的于 $\theta = \phi$ 的面力应该能抵消上面的面力, 故大小应该是 $-\tau_0 \cos \phi$. 为了方便列出位错所导致面力的积分表达式, 现先分析由任一点 $\theta = \psi$ 处位错引起 $\theta = \phi$ 处应力情况, 利用圆弧的参数方程

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \phi \\ y &= R \sin \phi \\ \xi &= R \cos \psi \\ \eta &= R \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

先将上式代入式 (11) 计算位错影响函数, 再把结果代入式 (10) 并化简

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz} &= \frac{\mu b_z}{4\pi R} \left[\frac{-\sin \phi + \sin \psi}{1 - \cos(\phi - \psi)} \right] \\ \sigma_{yz} &= \frac{\mu b_z}{4\pi R} \left[\frac{\cos \phi - \cos \psi}{1 - \cos(\phi - \psi)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其所造成的裂纹面上的面力是

$$\sigma_{nz} = n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} = \frac{\mu b_z}{4\pi R} \operatorname{ctan} \frac{\psi - \phi}{2} \quad (15)$$

把裂纹视为连续分布, 且分布密度函数为 $B_z(\theta)$ 的位错, 利用第 1 类曲线积分, 可以列出如下方程

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctan} \frac{\psi - \phi}{2} \cdot B_z(\psi) d\psi = -\frac{4}{\mu} \tau_0 \cos \phi \quad (16)$$

上面积分方程中所带的 $\operatorname{ctan} \frac{\psi - \phi}{2}$ 项叫做 Hilbert 核, 可以经过代数变换转化为柯西核^[10]. 对本问题的定解还需附加净位错为零这一条件, 其物理意义是保证裂纹区域外的位移单值性.

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} B_z(\psi) R d\psi = 0 \quad (17)$$

对式 (16),(17) 的求解可以利用配点法. 作变量代换

$$\left. \begin{aligned} \psi &= s\alpha \\ \phi &= t\alpha \end{aligned} \right\}, \quad -1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (18)$$

取两端奇异的基本函数^[4], 并引入新的未知函数 $\beta(s)$, 即设

$$B_z(\psi) = B_z(s\alpha) = \frac{\beta(s)}{\sqrt{1-s^2}} \quad (19)$$

在配点上离散式 (16), 其中所包含的积分采用 N 点高斯-契比雪夫求积公式计算 (Gauss-Chebyshev quadrature), 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{ctan} \frac{\alpha(s_i - t_k)}{2} \beta(s_i) &= -\frac{4}{\mu\alpha} \tau_0 \cos(\alpha t_k) \\ k &= 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

利用高斯-契比雪夫求积公式, 式 (17) 离散为

$$\sum_{i=1}^N \beta(s_i) = 0 \quad (21)$$

上面两式中, 积分点与配点分别选取如下

$$\left. \begin{aligned} s_i &= \cos \left(\frac{2i-1}{2N} \pi \right) \\ t_k &= \cos \left(\frac{k}{N} \pi \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式 (20),(21) 共包含 N 个代数方程, 并共有 N 个未知量 $\beta(s_i)$. 这些未知量表示 $\beta(s)$ 于积分点 s_i 处的函数值. 求解得诸 $\beta(s_i)$ 后, 可利用 Krenk 插值公式求得其端点处函数值 $\beta(\pm 1)$, 具体表达式见文献 [4]. 通过渐近分析, 本问题 A, B 两裂尖的 III 型应力强度因子分别是

$$\left. \begin{aligned} K_{III}^A &= -\sqrt{\pi R \alpha} \frac{\mu}{2} \beta(-1) \\ K_{III}^B &= \sqrt{\pi R \alpha} \frac{\mu}{2} \beta(1) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

最后, 除了裂纹之外, 平板内的任意点 (x, y) 处的应力, 即对应比拟问题中的电流密度分布, 可以由下式求得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y) &= \tau_0 + \frac{\mu R \alpha}{2N} \sum_{i=1}^N \beta(s_i) \cdot \frac{-y + R \sin(s_i \alpha)}{[x - R \cos(s_i \alpha)]^2 + [y - R \sin(s_i \alpha)]^2} \\ \sigma_{yz}(x, y) &= \frac{\mu R \alpha}{2N} \sum_{i=1}^N \beta(s_i) \cdot \frac{x - R \cos(s_i \alpha)}{[x - R \cos(s_i \alpha)]^2 + [y - R \sin(s_i \alpha)]^2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

对于裂纹上的点, 式 (24) 只在配点 t_k 所对应的位置上成立. 不同于那些只在裂尖附近满足的渐近表达式, 式 (24) 是平板全域内的解. 注意到文献 [8] 只给出隐式分析方法并且也没有提供电流密度分布的具体计算结果, 而本文方法的一个优点即在于能得出电流密度分布的显式结果. 此外, 文献 [9] 所给出的解析解可用于衡量电流密度场在裂尖的奇异强度, 并能得出裂尖附近的渐近解, 但对于探讨平板内全域的电流密度分布尚需进一步计算分析.

在算例中取 $N = 50$, 编制计算机程序, 计算 $5^\circ \leq \alpha \leq 175^\circ$, III 型应力强度因子的数值结果与解析解的对比如图 3 所示. 本问题的解析解 [9] 是

$$K_{III}^A = K_{III}^B = -\tau_0 \sqrt{\pi R} \sin \alpha \cos(\alpha/2) \quad (25)$$

上式中负号表示裂纹在圆弧外侧沿 Z 方向的位移大于圆弧内侧处位移, 相应于电流问题即圆弧内侧电势高于圆弧外侧. 在图 3 中, 解析解及数值解结果都通过除以因子 $-\tau_0 \sqrt{\pi R}$ 而无量纲化. 对比无量纲值, 发现本文数值结果可以精确到小数点后 6 位, 误差极小, 由此可见本数值解的精确度很高.

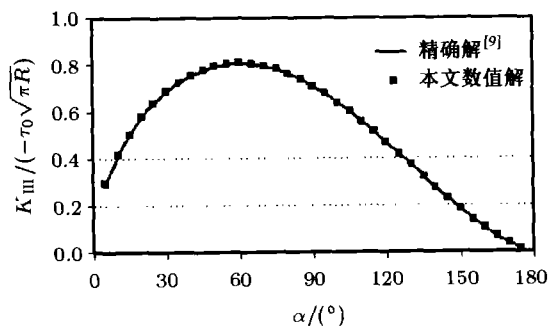


图 3 本文数值计算结果与精确解的对比

4 结束语

通过电流密度与反平面剪切问题的比拟, 更直观地提出了反映电流在裂纹尖端分布奇异性的电流密度因子这一概念. 并利用分布位错法来进行数值求

解, 由所给的算例知, 本分析方法精确可靠并可应用于非直线形式的裂纹. 由于本方法不难推广到其它更复杂裂纹形式的问题, 借助断裂力学中大量现有的知识, 求解电流密度在带裂纹平板内的分布便可变得更加方便易行.

参 考 文 献

- 1 白象忠, 胡宇达, 谭文锋. 电磁热效应裂纹止裂研究的进展. 力学进展, 2000, 30(4): 546~557 (Bai Xiangzhong, Hu Yuda, Tan Wenfeng. Advance of the study of crack prevention by the electromagnetic heat effect. *Advances in Mechanics*, 2000, 30(4): 546~557 (in Chinese))
- 2 Wang P, Tian Z, Bai X. Electrothermal stress in conductive body with collinear cracks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2003, 40(2): 187~195
- 3 范华林, 陈平. 电磁热效应理论在薄板裂纹止裂技术中的应用. 兵工学报, 2005, 26(6): 791~794 (Fan Hualin, Chen Ping. Crack arrest in thin plates. *Acta Armamentar*, 2005, 26(6): 791~794 (in Chinese))
- 4 Hills DA, Kelly PA, Dai DN, et al. Solution of Crack Problems: The Distributed Dislocation Technique. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996
- 5 Jin X, Keer LM. Solution of multiple edge cracks in an elastic half plane. *International Journal of Fracture*, 2006, 137(1-4): 121~137
- 6 Dundurs J. Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities. In: Mura T, ed. *Mathematical Theory of Dislocations*, New York: ASME, 1969. 70~115
- 7 Lardner RW. *Mathematical Theory of Dislocations and Fracture*. Toronto and Buffalo: University of Toronto Press, 1974
- 8 杨春燕, 白象忠, 田振国. 具有圆弧裂纹载流薄板的温度效应分析. 机械强度, 2004, 26(1): 87~91 (Yang Chunyan, Bai Xiangzhong, Tian Zhenguo. Analysis of temperature effect in current-carrying plate with an arc-crack. *Journal of Mechanical Strength*, 2004, 26(1): 87~91 (in Chinese))
- 9 Sih GC. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems. *Journal of Applied Mechanics*, 1965, 32(1): 51~58
- 10 Muskhelishvili NI. *Singular Integral Equations*. New York: Dover Publication, 1992