

断裂力学中的相似方法 *

赵亚溥

中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室 (LNM), 北京 100080

摘要 不论是材料的断裂强度还是结构的承载能力均存在着明显的“尺度效应”。本文旨在较全面且系统地总结断裂力学中的相似方法、无量纲数及其断裂力学中有关的尺度率, 并给出作者自己对某些问题的看法和认识。

关键词 断裂, 尺度效应, 相似方法, 量纲分析, 自相似, 不规则指标, 无量纲数, 相似准数, 多重断裂, 缺陷, 比拟, 湍流, 涡, 级串

1 历史的简要回顾

大约 500 年前 da Vinci (1452 ~ 1519) 最早进行过铁丝承载能力的实验, 他发现铁丝的承载能力和铁丝的长度成反比, 从而发现了现在称之为“尺度效应”的现象。

科学家 Galileo (1564 ~ 1642) 曾于 1638 年指出: “如果物体的尺寸减小, 它的强度并不按相同的比例减小。事实上, 物体越小其相对强度越大。因此, 一条小狗可能在背上驮起两条或三条同它一样大小的狗, 但我相信一匹马甚至不能驮起一匹同它一样大小的马”。现在根据实验发现, 一只跳蚤能够驮起是其本身重量 2000 倍的“重物”。近代, 断裂力学的先驱 Griffith 发现玻璃丝的强度随直径变小而增加。同样, 晶须的强度远比块体大, 纤维增强在某种程度上就是利用了这个道理。这些都和面密度或位错密度随直径的变化规律有关。

据考证^[1], 科学家 Fourier (1768 ~ 1830) 在 19 世纪初期以及大约 50 年后的 Lord Rayleigh (1842 ~ 1919) 创立了“量纲分析”的某些基本原理, 成为量纲分析的先驱。事实上, 量纲分析的方法是以 Fourier 提出的“物理方程量纲一致性”原理为基础的。法国学者 A. Vaschy 在大约 1896 年得到了现在被称之为的“定理”。但直到 1914 年 Buckingham 发表了具有严格意义的定理后, 量纲分析才逐渐被得到承认并在各种学科, 特别是在工程界得到了广泛的应用。第一个单值表征基本物理现象的无量纲组合量是 Reynolds (1842 ~ 1912) 引进的 Re 数^[2]。确定可能的无量纲量的数目跟构成这些无量纲组合量的有量纲量的数目之间的关系, 对发展相似方法具有极其重要的作用。

A. A. Gukhman 于 1928 年提出了“自相似”的概念¹。前苏联科学院院士 Ya. B. Zel

*国家自然科学基金资助项目, 批准号 19702018。本文取材于作者力学研究所博士后出站报告^[47] (1996 年 8 月) 的第一章, 但有所补充。作者博士后期间的合作导师郑哲敏院士曾对初稿作修改和补充。作者曾应邀于 1996 年 10 月 18 日在北京大学力学与工程科学系固体力学教研室做上述内容的学术报告。

收稿日期: 1996 - 09 - 17, 修回日期: 1998 - 05 - 28

¹ 也被称为“自模拟 (self - similar)”。

dovich 于 1956 年提出了“第二类（或不完全）自相似”的概念^[3]。

1895 年 11 月，W. C. Röntgen 作出了 X 射线的重大发现，该发现为研究金属结构提供了新的手段，但在相当长的一段时间内，人们对金属力学参量（如屈服强度、断裂韧性等）的计算仍然无能为力。相反，对于一些物理参量（如比热等）却可以准确地计算出来，其原因是金属的力学量是结构敏感量，而物理参量是非结构敏感量。所谓“结构敏感”是指对同一种材料，采用不同试样测量某一参量时，其重复性不好；反之称为非结构敏感量^[4]。换言之，金属的力学参量存在所谓的“尺度效应”。事实上，非金属的力学参量也存在“尺度效应”。

2 断裂力学中的相似方法和尺度率初步

相似（similarity）是指模型和原型对应的相似准数（similarity parameter）完全相等。如对于存在相似关系的原型（prototype）和模型（model）之间有如下函数关系

$$a^p = f(a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p), \quad a^m = f(a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m) \quad (1)$$

设有 k 个独立量纲，则根据 定理，有如下无量纲函数关系式

$$P = (P_1, P_2, \dots, P_{n-k}), \quad M = (M_1, M_2, \dots, M_{n-k}) \quad (2)$$

相似要求^[5]

$$M = P \Leftrightarrow M_1 = P_1, \dots, M_{n-k} = P_{n-k} \quad (3)$$

对于含裂纹体的脆性或准脆性断裂，外载荷不外乎为集中力 P_f 、单位长度上的张力 s_f 和应力 f ，问题为确定在上述外力（可能作用着一种或多种）具有几何相似的模型的裂纹扩展条件，设结构的特征尺度为 l ，材料的断裂韧性为 K ，材料的泊松比为 ν 的话，则裂纹扩展条件可以表达为^[6]

$$P_f, s_f, f = f(l, K, \nu) \quad (4)$$

应该注意的是当给定的是外载条件而不是位移应力条件时，材料的弹性模量并不包含在上述中^[6]。

(4) 式中各量的量纲分别为 $[P_f] = F, [s_f] = FL^{-1}, [f] = FL^{-2}, [l] = L, [K] = FL^{-3/2}, [\nu] = 1$ 。显然对于脆性断裂而言，只有泊松比为唯一的相似准数，即 $\nu = \nu$ 。原型和模型对应的相似律为^[6]

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_f^p}{P_f^m} &= \frac{K^p}{K^m} \left(\frac{l^p}{l^m} \right)^{3/2} \\ \frac{s_f^p}{s_f^m} &= \frac{K^p}{K^m} \left(\frac{l^p}{l^m} \right)^{1/2} \\ \frac{f^p}{f^m} &= \frac{K^p}{K^m} \left(\frac{l^p}{l^m} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad xi \quad A \quad S$$

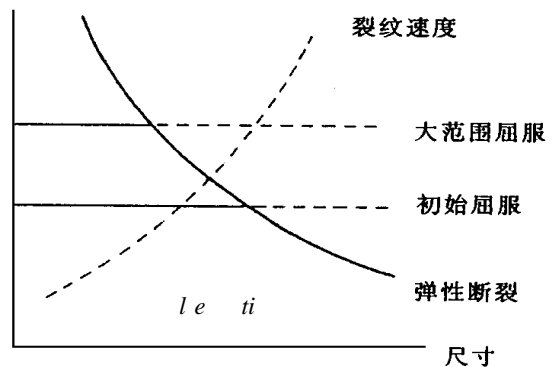


图 1 断裂中的“尺度效应”，断裂应力随尺寸增大而下降，裂纹传播速度随尺寸增大而上升

是，将材料划分为脆性或韧性是根据在实验室中的实验为基础的，当结构含有裂纹时，有时同一材料在同一工况下往往由于尺度效应便可以产生意想不到的断裂的“韧-脆转变”。可以说，这种断裂的“尺度效应”严重地妨碍科学家与工程师根据实验室小试件的实验结果去预测或判断实际大尺寸工程结构的强度。现有的宏观力学强度、失效与塑性理论均不能解释或预测这一现象，因为在现有的理论中均没有考虑材料的尺度^[7]。关于断裂力学中的其它尺度率由于篇幅有限，这里不可能一一列出，可以参阅 [8] 的有关讨论。

对于韧性断裂，即裂纹顶端的塑性屈服不能再被忽略时，如仍假设 K 的存在，此时有

$$P_f, s_f, f = f(l, K, \sigma_y) \quad (6)$$

根据 定理，对于韧性断裂而言，有两个相似准数，它们分别是 $\lambda_1 = \frac{\sigma_y \sqrt{l}}{K}$ ， $\lambda_2 = \frac{\sigma_y \sqrt{l}}{K}$ ，为纪念力学家 Irwin 对断裂力学的卓越贡献，科学家 Barenblatt 将相似准数 λ_2 命名为 Irwin 数^[6]，由于历史上无量纲数一般用科学家的头两个字母表示，如流体力学中的 Re 数、 La 数和 Pr 数等，所以这里用 Ir 来表示 Irwin 数，即

$$Ir = \frac{\sigma_y \sqrt{l}}{K} \quad (7)$$

从 (7) 式可以看出， Ir 数既和材料参数有关，又和结构参数有关。在量纲上，它是结构特征尺寸和裂纹顶端塑性区特征尺寸之比的开方。因此，原则上讲可以应用 Ir 数来定义“小范围屈服 (SSY)”。关于 Ir 数的两个应用实例将在下一节中专门讨论。对于韧性断裂而言，当模型和原型之间满足

$$Ir^{(m)} = Ir^{(p)}, \quad Ir^{(m)} = Ir^{(p)} \quad (8)$$

则韧性断裂的有关尺度率仍由 (5) 式表示。

线弹性脆性断裂是一种理想情况。像对于混凝土、陶瓷和冰等所实际发生的准脆性断裂 (quasi-brittle fracture)，美国西北大学 Bazant 教授及其合作者从 80 年代初期开始，对准脆性断裂中的尺度效应开展了系统的研究 (有关论文是大量的，其总结性参考文献可见 [9, 10])。Bazant 提出的用双对数坐标表示的尺度效应的关系如图 2 所示。从该图中可以看出，当结构特征尺寸足够大时，准脆性断裂的行为近似为线弹性脆性断裂，反之，则和 LFM 的偏离越来越大。关于 Bazant 准脆性断裂尺度效应的实验验证方面的文献也较多，如对于耐火陶瓷材料可见 van Gils 等最近的有关工作^[11]、对于混凝土可见文献 [12, 13]、对于岩石材料可见 Bazant 等的有关实验^[14]。进而，Bazant 又提出了断面为分维时的用双对数坐标表示的尺度效应的关系图，如图 3 所示。

郑哲敏曾将量纲分析应用于断裂力学^[15]，提出了裂纹顶端表征材料内部结构“特征尺度”的概念，并指出对于韧窝断裂，该尺度与韧窝尺寸即二相粒子 (或夹杂物) 的有效距离为同一量级。事实上，当应用具有普适性的量纲分析对含有裂纹体的结构进行相似分析时，除材料基本参数 E ， σ_y 外，作为结果还必然出现被假定为材料常数的断裂韧性 (或表面能)，而断裂韧性是不能仅由材料基本参数 E ， σ_y 决定的，还必须考虑材料的不均匀性，即反映材料内部结构的内部尺度。应该说到目前为止，这一问题还没有得到解决，有待于深入细致的实验和理论研究^[8]。关于合金材料韧性断裂的表征和断裂模型可参阅文 [16] 的有关综述。需要指出，从物理上看，对于实际弹塑性材料，无细观结构的材料是几乎不存在的，因此 K 的量纲，以及是否还需考虑其它量纲，仍是尚未解决的问题。

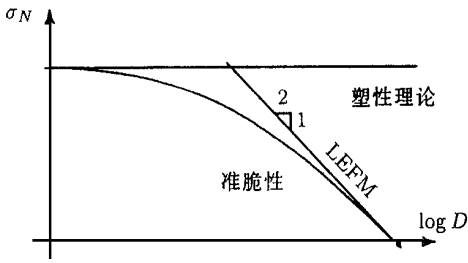


图2 准脆性断裂的尺度效应

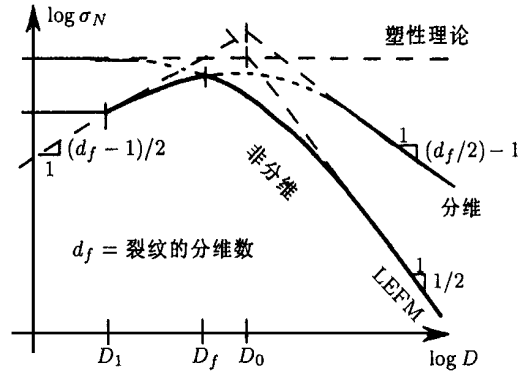


图3 考虑断面为分维时有限过程区尺寸的尺度效应

郑哲敏指出^[15]，对于线弹性材料 $(K_{IC}/E)^2$ 为长度的量纲，并提出了“它的物理意义是什么？”的疑问。事实上，对于疲劳而言，有如下熟知关系式^[17]

$$\text{Striation Spacing} = 6 \left(\frac{K}{E} \right)^2 \quad (9)$$

即上述长度和在疲劳裂纹扩展中所对应的量和条纹间距联系在一起。受到这一点的启发，应该能作出这样的推断，即 $(K_{IC}/E)^2$ 和裂纹的扩展机理有联系。再如，由著名的 Hollomon 关系式

$$\sigma = A \epsilon^n \quad (10)$$

Krafft 给出如下著名模型

$$K_{IC} = E n \sqrt{2 d_T} \quad (11)$$

式中： d_T 为材料中第二相粒子间距。(11) 式可以改写成如下形式

$$\left(\frac{K_{IC}}{E} \right)^2 = 2 n^2 d_T \quad (12)$$

如对于不锈钢而言，应变硬化指数 $n = 0.45 \sim 0.55$ ；对于黄铜 $n = 0.35 \sim 0.4$ 。所以对于不锈钢有

$$\left(\frac{K_{IC}}{E} \right)^2 = (1.27 \sim 1.90) d_T \quad (13)$$

对于黄铜有

$$\left(\frac{K_{IC}}{E} \right)^2 = (0.77 \sim 1.0) d_T \quad (14)$$

从 (12) ~ (14) 式可以看出，对于若干合金材料而言长度量 $(K_{IC}/E)^2$ 大致为二相粒子间距的量级。

Cherepanov (1979) 在研究有限变形对裂纹顶端应力、应变场的影响时，曾提出有限变形具有重要影响的区域特征线性尺寸 等于^[18]

$$= \frac{K_I^2}{E^2} \varphi_2(1, 2, \dots) \quad (15)$$

式中： K_I 为应力强度因子， $\varphi_2(1, 2, \dots)$ 为某一无量纲函数。

Mecholsky 和 Freiman 在研究陶瓷断面的分形特征时，提出如下经验关系式^[19]

$$\left(\frac{K_{IC}}{E} \right)^2 = a_0 D^* \quad (16)$$

上式中： D^* 为断面的分维增量， a_0 则为陶瓷材料的某一特征结构参数（量纲为长度），但该参数的物理意义是什么，文中并未说明。文 [19] 又提出了如下关系式

$$K_{Bj} = Eb_0^{1/2} \quad \text{或} \quad (K_{Bj}/E)^2 = b_0$$

式中： K_{Bj} 为裂纹分叉应力强度因子，而 b_0 也是一种特征尺度。

另外，文 [15] 还指出，对于合金等材料，不能将塑性功看作是表面能的一部分，因为塑性功是体积能，与表面能的量纲不同。略晚 G. C. Sih 也指出^[20]，由 Orowan^[21] 提出的将塑性功和表面能相加是不妥的 (not justified)。

3 两类自相似理论及其在断裂力学中的应用

根据 G. I. Barenblatt 的定义^[31]，自相似是指：一种现象如果在某时刻其性质的空间分布可以通过相似变换从另一时刻得到的话，它就是自相似的。

在很多数学物理的分支中都会遇到“自相似”解（例如可参阅 [2, 22~25] 等等）。关于自相似解这里引用 Barenblatt 的一句话^[31]：建立自相似解对一个研究者来说总是代表着一种进步。应用自相似解具有一个突出的优点，那就是该方法可以将很难求解的偏微分方程退化为较容易求解的常微分方程，从而可以在很大程度上使问题的求解得以简化。所以 Barenblatt 又指出：自相似解还是在解决更困难问题时评价近似方法的一种标准。那么计算机的出现是不是使人们对自相似解的兴趣减小了呢？Barenblatt 针对这一问题有以下评论：计算机的出现改变了人们对自相似解的总体认识，但并没有减少人们对它的兴趣。……像以前一样，自相似解作为一种具有深刻内涵的物理事实 (fact) 继续吸引着人们的注意力，而上述对于更广范围条件下有效的物理事实表明，所研究的过程存在某种稳定性。……当所研究的问题的范围扩大时，针对该问题自相似解的寻找将随之立即开始。自相似可以划分为如下两类：

- 完全 (complete) 自相似，又称为第一类自相似；
- 不完全 (incomplete) 自相似，又称为第二类自相似。

第一类自相似，或完全自相似是指对于如下无量纲函数关系

$$= (1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n-k) \quad (17)$$

假如相似准数 i 趋近于零或无穷大时，(17) 式可以表示成下式

$$= 0 (1, \dots, i-1, i+1, \dots, n-k) \quad (18)$$

则称这种现象是关于相似准数 i 完全自相似的。

第二类自相似，或不完全自相似是 Zel'dovich 于 1956 年首先提出的。式 (17) 中当 $i \rightarrow 0$ 或 $i \rightarrow \infty$ 时，函数也收敛于 0 或 ∞ ，此时函数可以表示成如下形式

$$= i^{-1} (1, \dots, i-1, i+1, \dots, n-k) + O(i) \quad (19)$$

则该种现象被称为关于相似准数 i 是不完全自相似的。上式中： d 为不规则量纲 (anomalous dimension)，而上述过程称为“适中渐进 (intermediate asymptotics)”。为了说明不完全自相似和不规则量纲的用途，这里仅举一个例子。疲劳断裂中著名的 Paris 公式为

$$da/dn = A (K)^m \quad (20)$$

式中： da/dn 为每一应力循环的裂纹扩展量， $K = K_{\max} - K_{\min}$ 为应力强度因子变程。从传统

的量纲分析来看，(20) 式右端的所谓材料常数 A 和 m 是有量纲的量，如何从量纲上理解该式？事实上由量纲分析可得下式^[26]

$$da/dn = (K/\sigma_y)^2 (K/K_{IC}, K_{min}/K_{max}, Ir, f \times t) \quad (21)$$

式中： f 为频率。当 $K/K_{IC} \rightarrow 0$ ，而且时间较长时，根据第二类自相似原理，可知

$$m = 2 + \frac{1}{2} \ln(K_{min}/K_{max}, Ir) \quad (22)$$

式中： I_r 为不规则量纲。将 (22) 代回 (21) 中，便可以得到 (20) 式。而

$$\left. \begin{aligned} m &= 2 + \\ A &= (1/\sigma_y K_{IC})^{2+m} (K_{min}/K_{max}, I_r) \end{aligned} \right\}$$

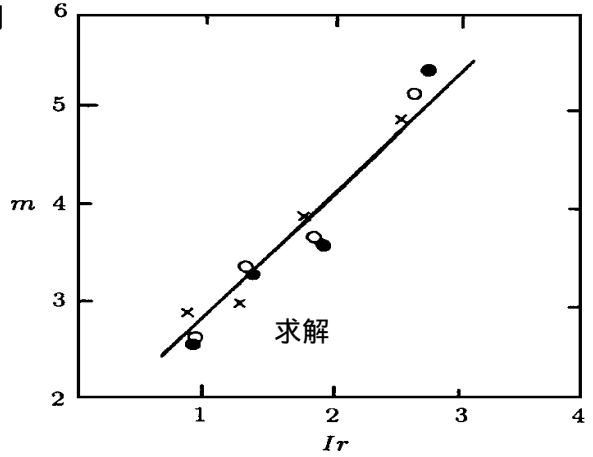


图4 指数 m 对 I_r 数的依赖关系 (实验材料 4340 钢, 轧制方向 A (○)、L (●)、T (×))

根据 Carpinteri 后来的进一步研究, 他又将脆性数划分为“能量脆性数 (energy brittleness number)”和“应力脆性数 (stress brittleness number)”两种^[29]。由 (27) 式定义的无量纲数为“应力脆性数”, 而能量脆性数则为

$$s_E = \frac{G_{IC}}{u b} \quad (29)$$

式中: G_{IC} 为裂纹顶端能量释放率, 由于对于平面应力而言有 $G_{IC} = K_{IC}^2 / E$, 所以 (29) 式还可以表示成

$$s_E = \frac{K_{IC}^2}{u E b} \quad (30)$$

因此, 本文对 Carpinteri 定义的能量脆性数的另一个解释是, 在量级上它是裂纹张开位移和结构特征尺寸之比。

考虑到 Cherepanov 的脆性数以及 Carpinteri 的应力脆性数和 Barenblatt 命名的 Irwin 数在物理意义上的一致性, 而且 Cherepanov 和 Carpinteri 两者的脆性数在形式上并不一致, 为了尊重 Irwin 对断裂力学的卓越贡献以及科学家 Barenblatt 的命名, 所以本文 (而且在所发表的有文章中) 在讨论韧性断裂时, 仍只采用 I_r 数。

在理论演绎中, 为了使理论具有更高的概括性和更广泛的适用性, 往往采用一些无量纲参数, 这些参数既反映物理本质, 又是单纯的数字, 不受尺寸、单位制、工程性质、实验装置类型的牵制^[30]。如上精辟的论述说明了量纲分析以及无量纲数在力学分析中的作用, 下面本文将着重讨论 I_r 数在断裂力学中的某些应用。

4.1 由试件尺寸所引起的断裂的韧脆转变

由上面所述及断裂中的“尺度效应”可知, 有时同一种材料在同一工况下, 往往只是由于试件尺寸便可引起断裂的韧脆转变。该问题的重要性已经在近年来的有关综述文章和专著中被多次强调 (例如 [31, 32]), 这里不再赘述。下面将用两个有名的例子来说明如何用 I_r 数来表征该种转变^[33]。

著名的 Ludwik - Davidenkov - Orowan 假设假定, 脆性断裂和塑性流动为两个独立过程, 设外力为应力, 由量纲分析, 可得下式

$$f(\sigma / \sigma_y, I_r, \dots) = 0 \quad (31)$$

断裂的韧脆转变发生时 $\sigma = \sigma_y$, 其中 $0 < \sigma / \sigma_y \leq 1$, 此时 (31) 式变为

$$f(I_r, \dots) = 0 \quad (32)$$

所以, 在给定的温度、加载速率等情况下, 断裂的韧脆转变可以表示成

$$I_r = I_{r_{cr}} \quad (33)$$

因此, 断裂的韧脆转变可以理解为当 I_r 数达到某一临界值时发生, 即裂纹顶端的塑性区尺寸和结构的特征尺寸之比达到某一临界值时发生。当

$$I_r > I_{r_{cr}} \quad (34)$$

时, 断裂形式为脆性; 相反则为韧性^[33]。

例 1 Kendall 问题: 该问题如图 5 所示^[34, 35]。经推导, 对于文中所选定的特征尺寸, 临界 I_r 数为

$$I_{r_{cr}} = 4\sqrt{3} \quad (35)$$

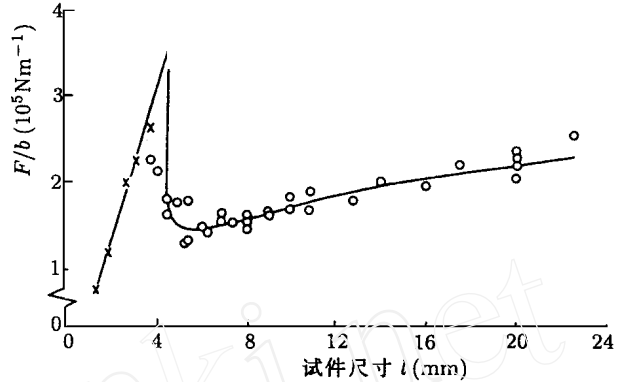
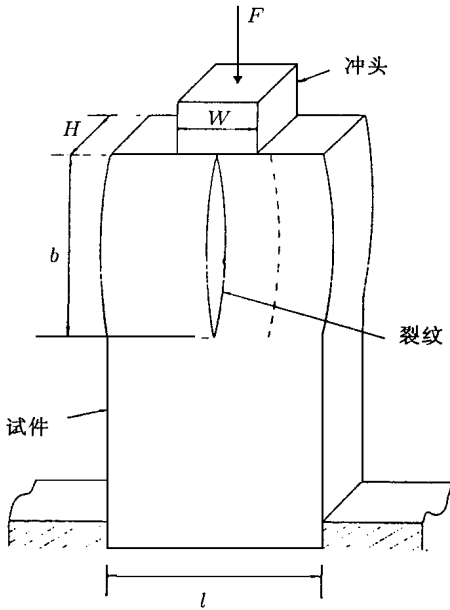


图5 Kendall 问题示意图

例2 如图6所示的双悬臂梁试件, 临界 Ir 数则为

$$Ir_{cr} = \sqrt{3} \quad (36)$$

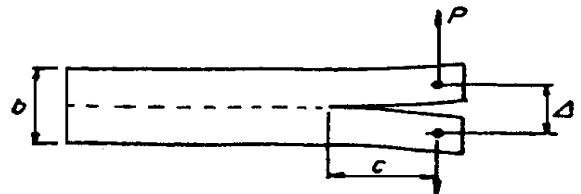


图6 双悬臂梁试件示意图

4.2 在复合材料失效分析中的应用

复合材料的失效模式和各向同性材料有着很大的不同, 因此也甚为复杂, 如对于纤维复合材料, 纤维和基体的脱粘、纤维断裂、基体材料断裂、分层以及桥联等为其主要失效模式. 在进行其失效模式分析时, 一般要涉及到很多参量, 而此时也正是应用量纲分析进行分析的好用场, 这对于更好地把握失效模式和对应力学量之间的关系有很大帮助.

上面定义了对于拉应力的 Ir 数, 对于剪应力本文定义一个相应的 Ir 数

$$Ir_s = \sqrt{l} / K_c \quad (37)$$

式中 K_c 为材料的屈服剪应力. 本文之所以定义 Ir_s , 是考虑到层状复合材料层间相对滑动 (即当层间剪应力达到极限时) 也是其一种重要的失效模式.

对于纤维增强金属基复合材料 (fibre reinforced MMCs), 应用 定理可知, 某一失效模式对应于下列无量纲函数关系

$$f(\nu, \nu_y, \nu_f, \sqrt{D} / K, \sigma_f / \sigma_y, \sigma_f / \sigma_y) = 0 \quad (38)$$

式中: ν, ν_y 为 Dundurs 参数, σ_f 分别为分层 (debonding) 和层间摩擦 (friction) 应力, σ_y 和 σ_f 分别为基体和纤维屈服应力, D 为纤维直径 (选作特征尺寸), K 为材料韧性. 由 (38) 可以得到如下关系式

$$\sigma_f / \sigma_y = f(\nu, \nu_y, Ir_s, \sigma_f / \sigma_y, \sigma_f / \sigma_y) \quad (39)$$

式中 $I_r = \sigma_y \sqrt{D} / K$ 为纤维增强金属基复合材料的一个重要相似准数 - I_r 数. Chan 曾提出, 由下列关系来表征上述材料的失效模式^[36]

$$\sigma_f \sim \sigma_y \sqrt{D} / K \quad (40)$$

因此, 通过 (39) 式便容易理解 (40) 式了, 这也说明可以用 I_r 数来表征复合材料的失效模式¹. 用 (40) 关系式来表征纤维增强 MMCs 的失效模式图如图 7 所示^[36,37]. 另外, Chan, He 和 Hutchinson (1993) 还利用无量纲数 \sqrt{l} / K_C 对陶瓷层状复合材料进行了断裂机理分析^[38], 这里的无量纲数就是由 (37) 式所定义的剪切 I_r 数.

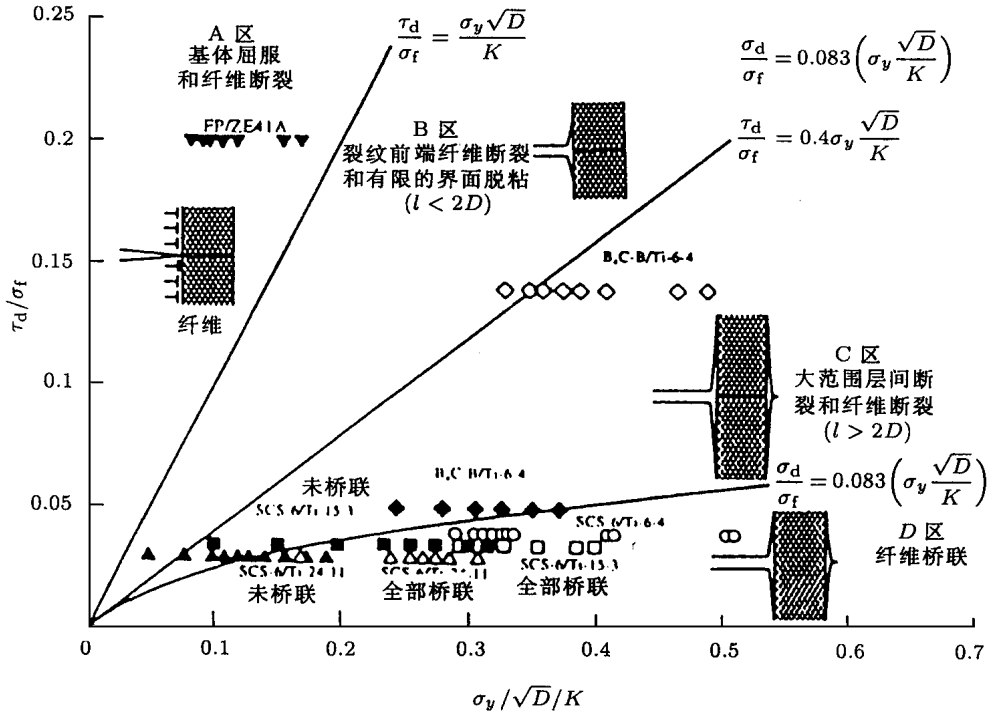


图 7 用 I_r 数来划分的纤维增强 MMCs 失效模式图

5 尺度率与重正化群

直到目前为止, 对材料强度的“尺度效应”还没有一个非常满意的解释, 究其原因, 是由于一般在研究尺寸效应时没有考虑材料的内部结构或材料内部的内禀不规则性.

重正化群理论在很多物理学分支中得到了广泛应用, 如量子场论、统计力学、湍流和爆炸等. 它的目的是在改变物体的粗视化程度 (或物体的长度标尺) 时观察物体中各物理量的变化规律. 当将重正化和重正化群方法应用于具体问题时, 有两种彼此不同的步骤^[24]:

· 第一种步骤是计及重正化效应的量纲分析的推广 (extension);

· 第二种步骤是将重正化群和近似方法 (如摄动法) 联合使用, 来估计不规则量纲的值.

关于重正化和不规则量纲之间的关系, 可以参阅 Goldenfeld (1992) 的专著 [24].

Carpinteri (1994) 称他在固体力学中引进了一种全新的方法——分形几何和重正化群结合的方法^[39], 他认为这是给无序材料强度和断裂能的尺度效应以合理、一致解释的唯一途径.

¹ Chan 和 Guo 等文中并没有应用量纲分析来分析复合材料的失效模式.

如图 8 所示的两个几何相似、材料一样的物体，相似比为 b ，设重正化拉伸强度 u^* 为材料常数，其量纲为 [力] [长度] $^{-(2-d)}$ ， d 为由于裂纹及空洞等缺陷存在对截面造成弱化的量纲减小量，此时截面的分形维数为 $= 2 - d$ ，其中 $0 \leq d < 1$ ，这样材料的重正化拉伸强度为

$$u^* = \frac{F_1}{1^{2-d}} = \frac{F_2}{b^{2-d}} \quad (41)$$

式中： F_1 和 F_2 分别为各物体的极限拉力。另外，两物体的名义拉伸强度为

$$u^{(1)} = \frac{F_1}{1^2}, \quad u^{(2)} = \frac{F_2}{b^2} \quad (42)$$

由 (41) 和 (42) 两式得到

$$u^{(2)} = u^{(1)} b^{-d} \quad (43)$$

对上式两边取对数，有

$$\ln u^{(2)} = \ln u^{(1)} - d \ln b \quad (44)$$

(44) 式如图 (9a) 所示。另外，(44) 式还可以表示成

$$\ln u = \ln u^* - d \ln b \quad (45)$$

众所周知，金属和混凝土的断裂表面具有分形的性质，断面的维数在 2 的基础上有一增量 d_p ， $0 \leq d_p < 1$ ，如图 8 所示相应的重正化断裂能 P_F^* 为

$$P_F^* = \frac{W_1}{1^{2+d_p}} = \frac{W_2}{b^{2+d_p}} \quad (46)$$

式中 W_1 和 W_2 分别为耗散在两个物体中的能量。而和 (42) 式对应的断裂能量为

$$P_F^{(1)} = \frac{W_1}{1^2}, \quad P_F^{(2)} = \frac{W_2}{b^2} \quad (47)$$

同样有

$$P_F^{(2)} = P_F^{(1)} b^{d_p} \quad (48)$$

而且

$$\ln P_F = \ln P_F^* + d_p \ln b \quad (49)$$

上述关系式由图 9 (b) 所示。经过推导，可以得到如下关系式

$$K_I^* = K_{IC}^* \quad (50)$$

式中

$$K_I^* = \sqrt{a^{1-d_p}}, \quad K_{IC}^* = \sqrt{(1+d_p) P_F^* E} \quad (51)$$

上式中， $2a$ 为分形裂纹的投影长度，此时的应力强度因子量纲为 [力] [长度] $^{-(3+d_p)}$ 。对应于 (29) 式，广义能量脆性数定义为

$$s_E^* = \frac{P_F^*}{u^* b^{(1-d-d_p)}} \quad (52)$$

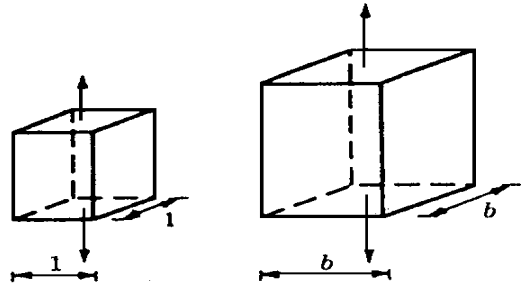


图 8 两个几何相似、同样材料制成的物体

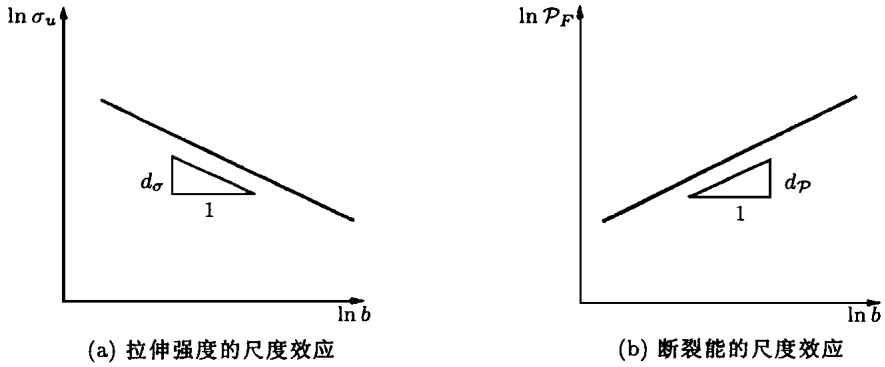


图 9

6 量纲分析和置换群

Zel'dovich 指出：自相似的概念是和群的置换群相联的，作为一个规则，这些群已经由过程的微分方程（或积分 - 微分方程）来表示。方程的置换群由方程中变量的量纲来确定（见 Ya. B. Zel'dovich 为专著 [3] 所写的序言）。

量纲分析具有明显群的特征^[3]。当量纲分析不足以建立自相似或确定自相似变量时，从群的观点出发考虑问题就显得很有用。

置换与置换群又称为变换或变换群。

首先给出置换群的定义。设有一组 k 个参量的变换

$$x = f(x_1, \dots, x_n; A_1, \dots, A_k) \quad (53)$$

其中 $f(i = 1, \dots, n)$ 为关于其变量的光滑函数。如果下列三条都满足的话，则说 (53) 为一个 k 参数的置换群：

在 (53) 的变换中，存在恒等变换；

对 (53) 中的每一个变换都存在逆变换；

对于一对变换，有 A_1, \dots, A_k 个参数的变换 A 和有 B_1, \dots, B_k 个参数的变换 B ，而有一个唯一由 (53) 确定的具有 C_1, \dots, C_k 个参数的变换 C

$$C_i = C_i(A_1, \dots, A_k; B_1, \dots, B_k) \quad (54)$$

则变换 C 称为变换 A 和 B 的积。

量纲分析是基于 定理。其大意是对于有 n 个变量的函数

$$f = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (55)$$

若有 k 个独立量纲的话，则存在如下无量纲关系式

$$= (1, 2, \dots, n-k) \quad (56)$$

其中

$$= \frac{a}{a_1^p a_2^q \dots a_k^r}, \quad 1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} a_2^{q_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}} \quad (57)$$

对于任何正的 A_1, \dots, A_k ，具有独立量纲的控制参数的相似变换

$$a_1 = A_1 a_1, a_2 = A_2 a_2, \dots, a_k = A_k a_k \quad (58)$$

可以由原来的测量单位系统变到另外一种单位系统而得到。而对于另外其它的参量 a, a_{k+1}, \dots, a_n , 则随其量纲以下列方式变换

$$a = A_1^p A_2^q \dots A_k^r a, a_{k+1} = A_1^{p_{k+1}} A_2^{q_{k+1}} \dots A_k^{r_{k+1}} a_{k+1}, \dots, a_n = A_1^{p_n} A_2^{q_n} \dots A_k^{r_n} a_n \quad (59)$$

很明显, (58) 和 (59) 构成了 k 参数群。量 a, a_{k+1}, \dots, a_n 为该群的不变量。自相似和自相似变量可以由辅助群的不变性来确定。

7 多重断裂和充分发展的湍流之间的比拟

固体的破坏过程被认为是与湍流相并列的力学两大难题之一。固体的破坏过程和湍流在研究上有没有共同点? 二者之间有没有可以相互借鉴的地方自然成为人们所关心的问题。

高强度材料的使用就必然引入了多重断裂 (multiple fracture) 的问题。Barenblatt 在方法论上对多重断裂问题和充分发展的湍流的研究上作出了比拟^[6,26] (analogy), 而且认为这种比拟是富有成果的。很显然在湍流中的介质是流体, 而在多重断裂中介质是可变形的固体, 而湍流中的“涡”对应着多重断裂中的“裂纹”或“缺陷”。湍流中包含各种不同尺度的相互作用的涡的级串 (cascade)。流体中一定小数目涡 (例如 2~4 个) 的流动正像固体中小数目的裂纹或缺陷在外载作用下的演化一样可以得到有效的研究。在对充分发展的湍流的研究中, 实质性的进展 (如著名的 Kolmogorov - Obukhov 标度理论), 对涡的级串而言是建立在统计方法和相似性原理基础之上的, 而研究多重断裂也可以采用类似的方法。

对于包含有相互作用的缺陷 (裂纹、空洞、位错等) 级串的可变形固体, 原则上缺陷间的相互作用可以分为两类: 缺陷相互间或是增强或是减弱。较大缺陷顶端的应力集中引发产生新的小缺陷, 反过来小缺陷又促使大缺陷扩展或形核。Barenblatt 和 Botvina 给出如下基本假定: 在多重断裂中, 缺陷级串的发展从统计的意义上而言是自相似的。换言之, 也就是说无量纲级串的统计性质始终保持为不变量。特别地, 对一种缺陷级串而言存在着一缺陷尺寸的分布曲线, 在损伤累积的过程中, 自相似是指曲线的形式保持固定, 只有最大频率 N_{SC} 和平均缺陷尺寸 l_{SC} 变化, 这样尺寸分布满足如下普遍关系式

$$N/N_{SC} = (l/l_{SC}) \quad (60)$$

图 10 给出的实验曲线表明, 不同材料在蠕变、疲劳、静态拉伸等条件下的缺陷尺寸分布曲线存在普适规律, 这种普适规律竟然针对不同的材料性质、不同的加载条件特别是针对不同的尺度成立。上述关系式被 Borodich^[41] 称为 Barenblatt - Botvina 分布。另外, Borodich^[41] 用如下曲线拟合上述实验结果

$$\ln(N/N_{SC}) = -\ln^2(l/l_{SC}) \quad (61)$$

Borodich^[41] 还指出, 并不是所有的断裂的自相似和标度性质都可以用分形的方法来描述, Barenblatt - Botvina 分布以及对数周期性等便是这方面的例子。

本文作者^[42] 最近解释了晶体中位错线和流体中涡丝的比拟性以及二者和电磁学中通电导线所诱导的磁场的比拟性。该工作的出发点是, 位错是固体中最为重要的二维 (或线) 缺陷; 新近的研究工作表明, 湍流中包含有非常致密且错综复杂的细微二维结构——涡丝^[43], Moffatt^[44] 指出, 涡丝是湍流的“肌腱”。因此, 研究固体中位错和湍流中涡丝的比拟性, 是一个

有意义的问题。文 [42] 指出，螺旋位错的 Burgers 矢量 b 对应于涡丝的环量，上述量还对应于导线中的电流强度 I ；螺旋位错在其附近所诱导的剪切应变 ϵ_z 对应于涡丝所诱导的流速，还对应于导线所诱导的磁场强度 H 。

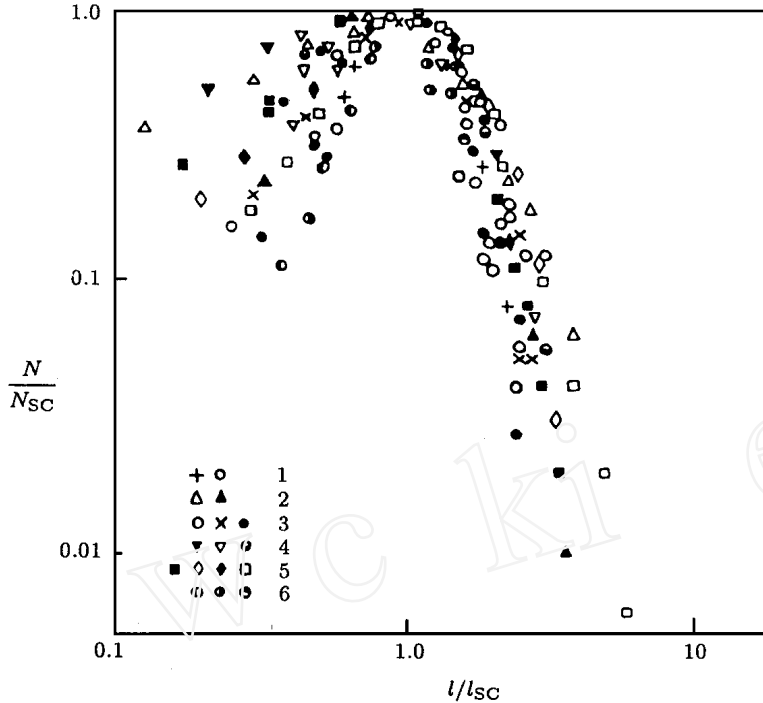


图 10 各种加载条件下不同材料的曲线尺寸分布

1. 铜多晶，疲劳；
2. 黄铜，静态拉伸；
3. 铁，蠕变；
4. 347 号钢，蠕变；
5. 304 号钢，蠕变；
6. 岩石（取材于 Botvina^[40]）

多重断裂具有多阶段（multi - stage）和多尺度（multi - scale）的特点，因此在其损伤累积过程中，自相似性也将一种阶段过渡到另一阶段。自相似性的失去意味着缺陷级串演化稳定性的失去，而这种稳定性由材料性质和外载作用下 l_{sc} 的某一临界值来表示。

Barenblatt 指出^[26]，缺陷级串的统计自相似原理可以成为唯像强度研究和位错、空洞等微观研究的一座独特的桥梁。在湍流的理论中，湍流计算的实用方法总是建立在湍级串自相似的基础上的，而这种自相似将计算简化为求关于湍能密度、平均涡尺寸等的非常合理的（rather reasonable）方程组。原则上讲，类似的方法也可以应用于材料多重断裂的研究之中。

8 本文小结

综上所述，本文的工作主要集中在以下几个方面：

·首先简要回顾了量纲分析和尺度率研究的历史；

·简要介绍了断裂力学中的有关“尺度效应”，对于脆性断裂而言，模型和原型间的唯一一个相似准数是材料的泊松比，而对于韧性断裂，除泊松比外，还有另外一个相似准数，这就是 Barenblatt 命名的 Irwin 数 Ir 。 Ir 数是一个既和材料性质又和结构尺寸有关的无量纲数，在量级上它是结构特征尺寸和裂纹顶端塑性区特征尺寸之比的开方。

·对郑哲敏所提出的“ $(K_{Ic}/E)^2$ 是长度的量纲，它的物理意义是什么？”的疑问，给出了自己的初步分析；

介绍了两类自相似理论，即完全（又称第一类）自相似和不完全（又称第二类）自相似，而一般的所谓“scaling”，就是第二类自相似问题。由于失效力学的复杂性，可能第二类自相似理论会在这类问题中发挥更大的作用；

总结了前人在断裂力学中所提出的有关无量纲数，它们是 Cherepanov 的脆性数、Carpinteri 的应力脆性数和能量脆性数，以及 Barenblatt 所命名的 I_r 数，并讨论了它们之间的关系及其物理含义。其实，针对郑哲敏所提出的上述长度量，本文认为还有一个无量纲数，它是： $l/\sqrt{K_{IC}}$ ，式中， l 是某一内部约束（材料的微结构及内部缺陷等）或外部约束（载荷或位移的边界条件、结构和裂纹的几何形状和尺寸等）的特征尺寸，不过该数的物理含义得等到上述郑哲敏疑问彻底搞清楚后，才能随之清楚；

讨论了 I_r 数在断裂力学中的某些应用^[45]，如提出由该相似准数来表征断裂的韧脆转变、区分复合材料不同的失效模式等，在剪切失效中，还有对应的剪切 I_r 数，此时该数中的应力应为剪切屈服应力，韧性应为剪开型（II 型）材料韧性；

简要介绍了尺度率与重正化群以及量纲分析和置换群之间的关系。用群论的观点去认识量纲分析和尺度率往往会更加增进对问题本身的理解；

介绍了 Barenblatt 所提出的多重断裂和充分发展的湍流之间的比拟，两者均采用统计和相似分析的方法。在固体多重断裂和湍流的研究方法上，二者可以相互借鉴。

量纲分析以及尺度率研究在断裂力学中的应用已经被忽视了很长时间^[9]。事实上，不只是断裂构件存在尺度效应，尺度效应是工程中一种重要的现象，例如爆炸容器结构的动载行为和强度研究中一个重要问题就是其尺度效应，也就是不同结构尺寸的爆炸容器具有不同的失效强度，例如研究表明，对于几何和材料相似的爆炸容器，如果其特征尺寸分别为 L_1 和 L_2 的话，则其许用应力之间满足下列尺度率^[46]

$$\sigma_1/\sigma_2 = \sqrt{L_2/L_1} \quad (62)$$

探讨材料与结构的尺度效应的原因，并建立新的强度、破坏与塑性理论，是目前国际学术界瞩目的中心之一。从研究的方法来看，由于材料的强度是跨越从原子、晶格、位错一直到宏观尺寸的不同层次的现象，孤立地限于一个尺度的研究必然带来局限性^[7]。不同尺度与层次研究的结果与连接将是破坏学科取得突破的主要途径。由于尺度效应的重要性，1994 年在意大利专门召开了材料和结构失效力学中尺度效应的 IUTAM 专题讨论会，而且于 1995 年在剑桥大学举行的 IUTAM 非线性断裂分析学术讨论会上，断裂的尺度效应被列为 3 个议题之一。由此可见，失效力学中有关尺度率的研究近年来得到了国际学术界的广泛重视，关于该方面问题的研究还只是方兴未艾，有大量的工作可做。

参 考 文 献

- 1 David F W, Nolle H. *Experimental Modeling in Engineering*. Butterworths, 1982
- 2 库塔捷拉泽 C C. *热物理学相似分析*. 蒋章焰等译. 北京: 科学出版社, 1987
- 3 Barenblatt G I. *Similarity, Self - Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Consultants Bureau, New York, 1979
- 4 哈宽富. *金属力学性质的微观理论*. 北京: 科学出版社, 1991
- 5 Barenblatt G I. *Dimensional Analysis*. Gordon and Breach Science Publishers, 1987
- 6 Barenblatt G I. *Modeling of Defects and Fracture Mechanics*. Herrmann Geds. Springer - Verlag, 1993
- 7 黄克智. 国际理论与应用力学联合会 (IUTAM) 非线性断裂分析学术讨论会介绍. *力学进展*, 1996, 26: 140 ~ 142
- 8 赵亚涛. 断裂力学中的相似方法及尺度率. *力学与实践*, 1995, 17 (5): 11 ~ 16, 80
- 9 Bazant Z P. Scaling laws in mechanics of failure. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 1993, 119:: 1828 ~ 1844
- 10 Bazant Z P. Scaling of quasi - brittle fracture and the fractal question. *ASME Journal of Engineering Materials*

- and Technology, 1995, 117: 361 ~ 367
- 11 van Gils M A J et al. Size effect predictions for a refractory ceramics. *International Journal of Fracture*, 1996, 75: 273 ~ 283
 - 12 Bazant Z P, Gettu R. Rate effects and load relaxation in static fracture of concrete. *A CI Materials Journal*, 1992, 89: 456 ~ 468
 - 13 Bazant Z P, Kwon T W. Failure of slender and stocky reinforced concrete columns: tests of size effect. *Materials and Structures*, 1994, 27: 79 ~ 90
 - 14 Bazant Z P, Bai S P, Gettu R. Fracture of rock: effect of loading rate. *Engineering Fracture Mechanics*, 1993, 45: 393 ~ 398
 - 15 郑哲敏. 连续介质力学与断裂. *力学进展*, 1982, 12: 133 ~ 140
 - 16 洪友士. 合金材料韧性断裂的表征、空洞成核准则和断裂模型. *力学进展*, 1986, 16: 349 ~ 362
 - 17 Hertzberg R W. *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*. 2nd Ed, John Wiley & Sons. 1983
 - 18 Cherepanov G P. *Mechanics of Brittle Fracture*. McGraw - Hill International Book Company, 1979. 中文版: amma 切列帕诺夫. 脆性断裂力学. 黄克智等译. 北京: 科学出版社, 1990
 - 19 Mecholsky J J, Freiman S W. Relationship between fractal geometry and fractography. *J Am Ceram Soc*, 1991, 74: 3136
 - 20 Sih G C. The state of affairs near the crack tip, in: *Modelling Problems in Crack Tip Mechanics*, CFC10, University of Waterloo, 1983, August 24 ~ 26
 - 21 Orowan E. Energy criterion of fracture, in: *Welding Research Supplement*. 1955, 34: 153 ~ 157
 - 22 Sedov L I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Infosearch, 1958. 中文版: 谢多夫. 力学中的相似方法与量纲理论. 沈青等译. 北京: 科学出版社, 1982
 - 23 Schlichting H. *Boundary - Layer Theory*, 7th Ed, McGraw - Hill Book Company, 1979. 中文版: 史里希廷 H. 边界层理论. 徐燕侯, 徐立功, 徐书轩译. 北京: 科学出版社, 1988
 - 24 Goldenfeld N. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Addison - Wesley Publishing Company, 1992
 - 25 Freund L B. *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press, 1990
 - 26 Barenblatt G I. *Micromechanics of Fracture*, in: *Theoretical Mechanics 1992*, Bodner S R et al eds. Elsevier Science Publishers B V, 1992
 - 27 Barenblatt G I, Botvina L R. Incomplete self - similarity of fatigue in the linear range of crack growth. *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, 1981, 3: 193 ~ 212
 - 28 Carpinteri A. Notch sensitivity in fracture testing of aggregative materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 1982, 16: 467 ~ 481
 - 29 Carpinteri A. Size - scale transition from ductile to brittle failure: structural response vs crack growth resistance curve. *International Journal of Fracture*, 1991, 51: 175 ~ 186
 - 30 钱令希, 钱伟长, 郑哲敏, 林同骥, 朱照宣. 力学. 见: *中国大百科全书·力学卷*. 北京、上海: 中国大百科全书出版社, 1985
 - 31 Jones N. Recent studies on the dynamic plastic behavior of structures. *Applied Mechanics Review*, 1989, 42: 95 ~ 118
 - 32 Jones N. *Structural Impact*. Cambridge University Press, 1989, 中文版: 诺曼·琼斯. 结构冲击. 成都: 四川教育出版社, 蒋平译, 王礼立校, 1994
 - 33 Zhao Ya - Pu (赵亚溥). Irwin number and ductile - brittle fracture transition. *International Journal of Fracture*, 1996, 75: R17 ~ R21
 - 34 Kendall K. The impossibility of comminuting small particles by compression. *Nature* 1978, 272: 710 ~ 711
 - 35 Kendall K. Complexities of compression failure. In: *Proceedings of the Royal Society*. London: 1978, A361. 245 ~ 263
 - 36 Chan K S. Failure diagrams for unidirectional fibre metal - matrix composites. *Metallurgical Transactions A*, 1993, 24A: 1531 ~ 1543
 - 37 Guo Z X, Derby B. Solid - state fabrication and interfaces of fibre reinforced metal matrix composites. *Progress in Materials Science*, 1995, 39: 411 ~ 495
 - 38 Chan K S, He M Y, Hutchinson J W. Cracking and stress redistribution in ceramic layered composites. *Materials Science and Engineering*, 1993, A167: 57 ~ 64
 - 39 Carpinteri A. Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials. *International Journal of Solids and Structures*, 1994, 31: 291 ~ 302
 - 40 Botvina L R. The kinetics of fracture of structural materials, Nauka, 1989 (in Russian)
 - 41 Borodich F M. Some fractal models of fracture. *J Mech Phys Solids*, 1997, 45: 239 ~ 259

- 42 Zhao Ya - Pu. Explaining the analogy between dislocation line in crystal and vortex filament in fluid. *Mechanics Research Communications*, 正式录用
- 43 Frisch U. Turbulence. Cambridge University Press, 1995
- 44 Moffatt H K, Kida S, Ohkitani K. Stretched vortices - the sinews of turbulence; high Reynolds number asymptotics. *J Fluid Mech*, 1994, 259: 241 ~ 264
- 45 Zhao Yapu. On some dimensionless numbers in fracture mechanics. *International Journal of Fracture*. 1997
- 46 朱文辉, 薛鸿陆, 韩钧万, 刘光祚. 爆炸容器动力学研究进展评述. *力学进展*, 1996, 26: 68 ~ 77
- 47 赵亚溥. 冲击载荷作用下裂纹动态起始问题的研究. 中国科学院力学研究所博士后出站报告, 1996

SIMILARITY METHOD IN FRACTURE MECHANICS

Zhao Yapu

Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media (LNM), Institute of Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080

Abstract The "scale effect" exists for either fracture strength of materials or carrying capabilities of structures. The aim of this paper is to summarize systematically the similarity method, dimensionless numbers and scaling laws in fracture mechanics, together with some author's point of views.

Keywords fracture, scale (or size) effect, similarity method, dimensional analysis, self-similar, anomalous dimension, dimensionless number, similarity parameter, multiple fracture, defects, analogy, turbulence, vortices, cascade