

压电材料平面问题的尖端场和应力强度因子的求解*

杨丽敏 柳春图 曾晓辉

(中国科学院力学研究所 北京 100080)

摘要:利用 Lekhnitskii 理论和 Stroh 理论的相互联系,把已知的基于 Lekhnitskii 理论平面应变结果转化为 Stroh 理论形式的结果,直接获得 Stroh 公式中 A, B 的显式表达式,此方法可扩展到平面应力情况,然后导出压电材料平面应变问题的尖端场 Williams 形式的展开式,采用半权函数法计算有限大压电体平面问题应力和电位移强度因子。对无穷大板含中心裂纹的情况下本文结果和已有结果进行了比较,表明本文方法得到的结果精度可靠。本文方法的最大优点是可以求解有限压电体的应力强度因子,并且需要的单元少,精度高,实用性好。

关键词:压电;半权函数;应力强度因子;平面问题;Stroh;Lekhnitskii

中图分类号:O346.1 **文献标识码:**A

1 引言

压电材料的平面断裂问题已经有许多人研究(Pak^[1], Sosa^[2~4], Suo 等^[5], Qin 和 Yu^[6], Liu 等^[7], Gao 和 Wang^[8], 和 Han 和 Wang^[9]等),但大都是针对无穷大板的情况进行求解。有限大体的情况更有实际意义,因此本文研究有限尺寸压电体的平面断裂问题。

压电介质弹性理论目前有代表性的有两种,一种是 Lekhnitskii 方法,另一种是 Stroh 公式,这两种理论都是针对广义二维问题建立的。两种理论之间的区别和联系在 Ting^[10]的专著中已有论述。Sosa^[2,3,11,4]采用 Lekhnitskii 理论研究了含孔洞和裂纹的横观各向同性压电介质平面应变问题。高存法^[12,13]采用 Lekhnitskii 理论对压电断裂平面问题进行了研究,同时他也采用 Stroh 方法对压电介质的广义二维问题进行了详细的分析^[14~16]。上述研究都是针对无穷大板的情况,而在实际的应用中,压电元件是以各种不同的大小和形状出现,且工作在各种各样的载荷条件下,因此有限大的情况更有实

际意义。对有限压电体的研究,目前见到的有:有限元方法^[17]和权函数法^[18]。

本文首先利用 Lekhnitskii 理论和 Stroh 理论的相互联系,把 Sosa^[2]基于 Lekhnitskii 理论的平面应变结果转化为 Stroh 理论形式的结果,直接获得 Stroh 公式中 A, B 的显式表达式,然后进一步把此方法扩展到平面应力的情况。其次参照 Yuan^[19]方法导出压电材料平面问题尖端场的 Williams 形式展开式(现有的结果只给出首项^[2]),并求得半权函数,然后采用半权函数法计算有限尺寸压电体平面问题应力强度因子和电位移强度因子。

2 基本方程

2.1 Stroh 公式

高存法^[15]给出了无穷大板压电材料广义二维问题 Stroh 形式的解。对于压电介质的平面应变和平面应力问题,是广义二维问题的特例,此时二维问题的特征根有六个三对共轭的复根,方程的解可以写为

$$\{u_r, \phi\}^T = 2\text{Re} \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha f_\alpha(z_\alpha)$$

* 来稿日期:2004-06-02 修回日期:2004-12-27

第一作者简介:杨丽敏,女,1971年生,中科院力学所博士研究生;研究方向:压电材料的强度分析。

其中 $u_r (r=1,2)$ 表示位移, ϕ 表示电势。对于一个给定的边值问题, 上面的三个函数 $f_\alpha(z_\alpha)$ 可以看作是满足边界条件的函数, 则应力和电位移可以写为

$$\begin{aligned} \{\sigma_{2,j}, D_2\}^T &= 2\text{Re} \sum_{\alpha=1}^3 b_\alpha f'_\alpha(z_\alpha), \\ \{\sigma_{1,j}, D_1\}^T &= -2\text{Re} \sum_{\alpha=1}^3 b_\alpha \mu_\alpha f'_\alpha(z_\alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

在一般的实际应用中, 任意函数 f_α 对于每一个 α 可以有相同的函数形式, 因此我们可以令

$$\begin{aligned} f_\alpha(z_\alpha) &= f(z_\alpha) q_\alpha, f_{\alpha+4}(\bar{z}_\alpha) = \overline{f(z_\alpha) q_\alpha}, \\ (\alpha &= 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 q_α 是任意的复常数。式(3)中第二个方程是用于获得广义位移和广义应力函数实数形式的解

$$\begin{aligned} \{u_r, \phi\}^T &= 2\text{Re}[A\langle f \rangle q], \\ \{\Phi_r, \Phi_e\}^T &= 2\text{Re}[B\langle f \rangle q] \end{aligned} \quad (4)$$

其中 A, B 是复数矩阵, $\langle f(z) \rangle = \text{diag}[f(z_1), f(z_2), f(z_3)]$, $z_\alpha = x_1 + \mu_\alpha x_2$, $\text{Im}[\mu_\alpha] > 0, \alpha = 1, 2, 3$ 。 $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ 。在上面公式里面, $f(z)$ 是一个任意的函数, q 是一个待定的复常数。

2.2 Lekhnitskii 理论平面应变问题的复势解及其与 Stroh 公式的关系

下面针对单斜晶系的压电材料的平面应变问题进行详细研究, Sosa^[2] 基于 Lekhnitskii 理论已经给出了上述问题的应力, 电位移, 位移和电势的复势表达式。此时本构关系为

$$\epsilon = s' \sigma + g' D, \quad E = -g'^T \sigma + \delta D \quad (5)$$

其中 $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}]^T$, $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}]^T$, $D = [D_1, D_2]^T$, $E = [E_1, E_2]^T$

$$s' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, g' = \begin{bmatrix} 0 & b_{21} \\ 0 & b_{22} \\ b_{13} & 0 \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{11}}, a_{12} = s_{13} - \frac{s_{12}s_{13}}{s_{11}}, a_{22} = s_{33} - \frac{s_{13}^2}{s_{11}},$$

$$a_{33} = s_{44}, b_{21} = (1 - \frac{s_{12}}{s_{11}})g_{31}, b_{22} = g_{33} - \frac{s_{13}}{s_{11}}g_{31},$$

$$b_{13} = g_{15}, \delta_{11} = \beta_{11}, \delta_{22} = \beta_{33} + (g_{31}^2/s_{11}) \quad (6)$$

式(6)中 $s_{ij}, g_{ij}, \beta_{ij}$ 分别表示压电材料的弹性常数, 压电常数和介电常数。

在 Sosa^[2] 中, 压电材料平面应变问题 Lekhnitskii 方法的特征方程为

$$\begin{aligned} a_{11}\delta_{11}\mu^6 + (a_{11}\delta_{22} + 2a_{12}\delta_{11} + a_{33}\delta_{11} + b_{21}^2 + b_{13}^2 + \\ 2b_{21}b_{13})\mu^4 + (a_{22}\delta_{11} + 2a_{12}\delta_{22} + a_{33}\delta_{22} + \\ 2b_{21}b_{22} + 2b_{13}b_{22})\mu^2 + (a_{22}\delta_{22} + b_{22}^2) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

这个方程有六个三对共轭的复根, 令 μ_1, μ_2, μ_3 为虚部为正的根, 相应的特征向量为 a_α , 且 $z_\alpha = x_1 + \mu_\alpha x_2$ 。得到应力和电位移的表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \varphi'_k(z_k), \sigma_{22} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \varphi'_k(z_k), \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \varphi'_k(z_k), D_1 = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k \varphi'_k(z_k), \\ D_2 &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \varphi'_k(z_k) \end{aligned} \quad (8)$$

位移(不计刚体位移)和电势(不计参考电势)表达式

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 p_k \varphi_k(z_k), \quad u_2 = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \varphi_k(z_k) \\ \phi &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \varphi_k(z_k), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - b_{21}\lambda_k, q_k = \frac{a_{12}\mu_k^2 + a_{22} - b_{22}\lambda_k}{\mu_k}$,

$$\begin{aligned} \gamma_k &= -(b_{13} + \delta_{11}\lambda_k)\mu_k, \lambda_k(\mu_k) = \\ &= -\frac{(b_{21} + b_{31})\mu_k^2 + b_{22}}{\delta_{11}\mu_k^2 + \delta_{22}}, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

下面就利用 Sosa^[2] 基于 Lekhnitskii 方法给出的应力、电位移、位移和电势表达式, 通过 Lekhnitskii 方法和 Stroh 公式之间的联系来确定 Stroh 方法中 $a_\alpha, b_\alpha, \mu_\alpha$ 的值。

在没有体力和体自由电荷情况下, Stroh 公式中应力和电位移与广义应力函数 $\{\Phi_r, \Phi_e\}^T$ 的关系为

$$\begin{aligned} \sigma_{j1} &= -\Phi_{j,2}, \quad \sigma_{j2} = \Phi_{j,1}, \quad (j = 1, 2), \\ D_1 &= -\Phi_{e,2}, \quad D_2 = \Phi_{e,1} \end{aligned} \quad (10)$$

由式(10)和式(8)比较可得平面应变问题 Stroh 公式中的广义应力函数为

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 (-\mu_k) \varphi_k(z_k), \Phi_2 = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \varphi_k(z_k), \\ \Phi_e &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 (-\lambda_k) \varphi_k(z_k) \end{aligned} \quad (11)$$

由式(9)可得平面应变问题 Stroh 公式中的广义位移矢量 $\{u_r, \phi\}^T$ 。

假定对每一个 $k, \varphi_k(z_k)$ 都有相同函数形式, 即

$$\varphi_k(z_k) = f(z_k) q_k \quad (12)$$

则广义位移和广义应力函数写为矩阵的形式

$$\begin{aligned} \{u_r, \phi\}^T &= 2\text{Re}[A\langle f \rangle q], \\ \{\Phi_r, \Phi_e\}^T &= 2\text{Re}[B\langle f \rangle q] \end{aligned} \quad (13)$$

把式(12)代入基于 Lekhnitskii 理论给出的广义位移, 应力和电位移表达式——式(9)和式(8), 并与 Stroh 公式表示的广义位移和广义应力函数表

达式——式(13)比较,可得 Stroh 公式中矩阵 A 和 B 的显式表达式为

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

对一个给定的问题,方程(13)中未知 $f(z)$ 和 q 需要由以下步骤来求解

- 1) 函数 $f(z)$ 由加载方式和几何形状(比如切口或裂纹)来决定。
- 2) 由边界条件来确定复矢量 q 。

3 裂纹尖端场的求解

上面已经给出了压电材料平面应变问题 Stroh 理论的基本方程,下面就在其基础上来推导压电材料平面应变问题裂纹尖端场(这里的基本思路参见 Yuan^[19] 求解各向异性材料平面问题裂纹尖端场的做法)。

考虑压电体内的一个裂纹,令坐标系原点位于裂纹尖端,裂纹平面在 $x_1 - x_3$ 面内,假定裂纹面没有力和自由电荷。为了求解裂纹尖端场,方程(13)可以改写为^[10]

$$\begin{cases} \langle u_r, \phi \rangle^T = \text{Re}[A \langle f \rangle B^{-1} g], \\ \langle \Phi_r, \Phi_e \rangle^T = \text{Re}[B \langle f \rangle B^{-1} g] \end{cases} \quad (15)$$

在式(15)中令 $f(z_a) = z_a^{\delta+1}$, 则有

$$\begin{cases} \langle u_r, \phi \rangle^T = \text{Re}[A \langle z^{\delta+1} \rangle B^{-1} g], \\ \langle \Phi_r, \Phi_e \rangle^T = \text{Re}[B \langle z^{\delta+1} \rangle B^{-1} g] \end{cases} \quad (16)$$

其中复变量 z_a 定义为: $z_a = r(\cos\theta + \mu_a \sin\theta)$, $-\pi < \theta < \pi$ 。 g 是复常数的向量, δ 是一个复常数,我们要寻找允许的 δ 值,即在 $r \rightarrow 0$ 时保证能量有限,由此有 $-1 < \text{Re}(\delta)$ 。

由式(16)解的唯一性,可以推出裂纹尖端场为

$$\begin{cases} \langle u_r, \phi \rangle^T = \sum_{n=1} \text{Re}[A \langle z^{\delta_n+1} \rangle B^{-1} g_n], \\ \langle \Phi_r, \Phi_e \rangle^T = \sum_{n=1} \text{Re}[B \langle z^{\delta_n+1} \rangle B^{-1} g_n] \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\delta_n = (n-2)/2$, $g_n = [g_{n1}, g_{n2}, g_{n3}]^T$, 当 $n = 1, 3, 5, \dots$ 时, g_n 为实数;当 $n = 2, 4, 6, \dots$ 时, g_n 为纯虚数, g_n 的数值依赖于裂纹体的几何形状,材料性能和加载条件。

进而裂纹尖端场应力,电位移,位移和电势的分量可以写为

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [\sigma_{11}, \sigma_{12}, D_1]^T, & \tau_2 &= [\sigma_{12}, \sigma_{22}, D_2]^T, \\ u &= [u_1, u_2, \Phi]^T \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= - \sum_{n=1} (\delta_n + 1) \text{Re}[B \langle \mu z^{\delta_n} \rangle B^{-1}] g_n, \\ \tau_2 &= \sum_{n=1} (\delta_n + 1) \text{Re}[B \langle z^{\delta_n} \rangle B^{-1}] g_n \end{aligned} \quad (19)$$

如果令 $\tau_i^{(n)}, u^{(n)}, \dots$ 是裂纹尖端场的第 n 阶项,则裂纹尖端的主导项可以令 $n = 1$,也就是

$$\begin{aligned} \tau_1^{(1)} &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Re}[B \langle \frac{\mu}{\sqrt{z}} \rangle B^{-1}] K, \\ \tau_2^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Re}[B \langle \frac{1}{\sqrt{z}} \rangle B^{-1}] K, \\ u^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Re}[A \langle \sqrt{z} \rangle B^{-1}] K \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $K = [K_{II}, K_I, K_D]^T$ 是应力强度因子和电位移强度因子,定义为

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_2^{(1)}(r, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g_1$$

4 半权函数法求解应力强度因子

根据柳春图^[20] 半权函数的定义,即半权函数满足以下三个条件:1) 满足平衡方程,2) 在裂尖处有 $\lim_{r \rightarrow 0} u_i^{(s)} = O(r^{-1/2})$, 3) 满足裂纹面的边界条件。可以令式(17)中 $\delta_n = -3/2$, 得到半权函数为

$$\begin{cases} \langle u_r^{(s)}, \phi^{(s)} \rangle^T = \text{Re}[A \langle z^{-\frac{1}{2}} \rangle B^{-1} h], \\ \langle \Phi_r^{(s)}, \Phi_e^{(s)} \rangle^T = \text{Re}[B \langle z^{-\frac{1}{2}} \rangle B^{-1} h], \\ \tau_1^{(s)} = \frac{1}{2} \text{Re}[B \langle \mu z^{-\frac{3}{2}} \rangle B^{-1}] h, \\ \tau_2^{(s)} = - \frac{1}{2} \text{Re}[B \langle z^{-\frac{3}{2}} \rangle B^{-1}] h \end{cases} \quad (21)$$

其中 $h = [h_1, h_2, h_3]^T$ 为未知的常数。

基于压电材料贝蒂互等定理^[21], 可以写出用半权函数来计算强度因子的表达式

$$\int_C (t \cdot u^{(s)} - \omega \phi^{(s)}) ds = \int_C (t^{(s)} \cdot u - \omega^{(s)} \phi) ds \quad (22)$$

其中 C 是任意闭合曲线, u 是位移矢量, ϕ 是电势, ω 是电位移, t 是曲线 C 上的面力, $u^{(s)}, \phi^{(s)}, \omega^{(s)}, t^{(s)}$ 半权函数相应的量。 C 为任何一个围成单连通区域的闭合曲线。如果令外边界 $C = C_s + C_r + \Gamma$, 其中 C_s 为去掉裂纹顶端后的顶端边界, C_r 为裂纹面, Γ 为裂纹顶端以外的弹性体的外边界, 它们的正方向如图 1 所示。

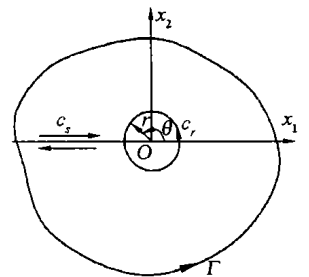


图 1 闭合曲线示意图

考虑裂纹面上 $\tau_z = 0$

则式(22)经变换后化为

$$-\int_{C_r} [(t_1^{(s)} u_1 + t_2^{(s)} u_2 - \omega^{(s)} \phi) - (t_1 u_1^{(s)} + t_2 u_2^{(s)} - \omega \phi^{(s)})] ds =$$

$$\int_{\Gamma} [(t_1^{(s)} u_1 + t_2^{(s)} u_2 - \omega^{(s)} \phi) - (t_1 u_1^{(s)} + t_2 u_2^{(s)} - \omega \phi^{(s)})] ds \quad (23)$$

下面为了方便令

$$M = (t_1^{(s)} u_1 + t_2^{(s)} u_2 - \omega^{(s)} \phi) - (t_1 u_1^{(s)} + t_2 u_2^{(s)} - \omega \phi^{(s)})$$

当靠近裂尖圆的半径趋近于零时,把裂纹尖端场和半权函数代入式(23)左端,其积分值可表示为

$$H_r = -\int_{C_r} M ds = c_{11} h_1 K_{II} + c_{12} h_2 K_I + c_{13} h_3 K_D \quad (24)$$

式(23)右端由远离裂纹尖端的数值解和半权函数沿路径的积分可以写为

$$H_r = \int_{\Gamma} M ds = c_{21} h_1 + c_{22} h_2 + c_{23} h_3 \quad (25)$$

其中 $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}$ 为积分结果的常数部分。由于 $H_r = H_r$, 且 h_1, h_2, h_3 为任意实常数, 所以必有

$$K_I = c_{22}/c_{12}, K_{II} = c_{21}/c_{11}, K_D = c_{23}/c_{13} \quad (26)$$

因此只要已知裂纹体沿路径 Γ 上的应力, 电位移, 位移和电势, 就可以分别求出三个强度因子。裂纹体沿路径 Γ 上的各分量数值可以通过多种数值方法得到。本文将采用有限元软件 ANSYS 来获取裂纹体沿路径 Γ 上所需分量数值, 然后利用数学计算软件 MATHEMATICA 来计算回路积分获得强度因子数值。

对于压电材料平面应力断裂问题, 只要令式(6)中 $a_{11} = s_{11}, a_{12} = s_{13}, a_{22} = s_{33}, a_{33} = s_{44}, b_{21} = g_{31}, b_{22} = g_{33}, b_{13} = g_{15}, \delta_{11} = \beta_{11}, \delta_{22} = \beta_{33}$ (27) 即可得到压电材料平面应力断裂问题相应的解。

5 算例

压电材料取为 PZT-4, 本构关系为式(5)形式时, 材料柔度系数如下: $s_{11} = 10.98 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$, $s_{12} = -5.36 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$, $s_{13} = -2.22 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$, $s_{33} = 8.24 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$, $s_{44} = 8.24 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$, 压电常数 $g_{31} = -10.7 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{C}$, $g_{15} = 39.97 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{C}$, $g_{33} = 25.1 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{C}$, 介电常数 $\beta_{11} = 7.68 \times 10^7 \text{ V}^2/\text{N}$, $\beta_{33} = 8.69 \times 10^7 \text{ V}^2/\text{N}$, 板的长度 $2L$, 宽度 $2W$, 裂纹长度为 $2a$, 见图 2。取板的半宽度 $W = 0.508 \text{ m}$, 裂纹半长 $a = 0.0508 \text{ m}$, 取不同的板的长度: $a/L = 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ 。只

加电载荷的情况, 在 x_2 方向上加电位移, 通过加电压的形式来实现加电位移。

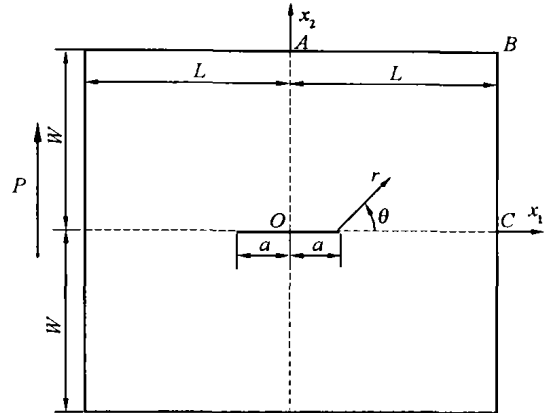


图 2 板的几何结构图

5.1 不同裂纹长度和板长比情况下电位移强度因子计算

首先用有限元软件 ANSYS 计算积分回路上的应力, 电位移, 位移和电势。由于对称, 只取板的四分之一 ABCO 作为研究对象, 在 OA 和 OC 边取对称的边界条件, AB 边接地, BC 边加电压 1000V, 单元为 PLANE13, 平面应变情况。有限元网格划分如图 3 所示, 裂纹尖端的网格和积分路径如图 4 所示。把路径上的应力, 电位移, 位移和电势代入(25)式, 就可以求出电位移的强度因子 K_D , 进而可以得到裂纹尖端场电位移分量的分布。不同裂纹长度和板长比情况下电位移强度因子如表 1 所示。

表 1 不同裂纹长度和板长比情况下电位移强度因子 $K_D \times 10^{-6} (\text{C} \cdot \text{m}^{-3/2})$

a/L	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	Sosa ^[2]
K_D	11.559	9.185	8.383	8.073	8.071	8.055

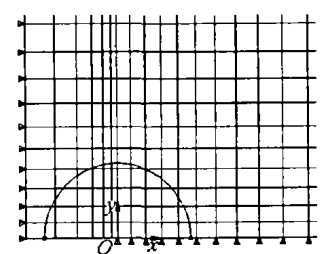
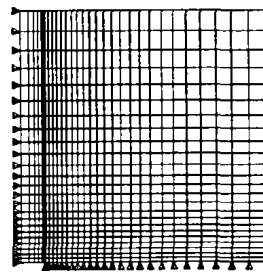


图 3 有限元网格划分

图 4 裂尖网格和积分路径

从表 1 可以看出, 电位移强度因子随着裂纹长度和板宽比减小而减小, 当 $a/L \leq 0.1$ 时, 对裂纹来说可以认为是无穷大板情况。把 $a/L = 0.1$ 时本文结果与 Sosa^[2] 无穷大板的结果进行比较, 两者相对误差为 0.2%, 说明本文方法的精度很好。用本文的方法可以计算平面应力和平面应变情况下含裂纹有限体裂纹尖端场分布和应力强度因子以及电位移强

度因子。

5.2 有限元网格划分与计算精度

为了验证文中半权函数法计算精度的可靠性,对 $a/L = 0.4$ 情况下,采用相同的积分路径,但采用不同粗细的网格划分,采用较粗的网格划分时,单元总数为 36 个,而采用较细的网格划分时,单元总数为 576 个,这两种情况的计算结果如表 2 所示。

表 2 在 $a/L = 0.4$ 情况下不同的网格划分对计算结果精度影响比较

单元数	576	36	偏差
$K_D \times 10^{-6} (C \cdot m^{-3/2})$	8.404	8.582	2.1%

半权函数法的计算精度与积分路径上数值解计算精度有关。由于积分路径可以远离裂纹尖端,因此采用非常粗糙的网格划分有限元模型,也能得到精度较高的应力强度因子和电位移强度因子,这点在表 2 中得到证实。这将大大减少计算的工作量。

6 结 论

本文利用 Lekhnitskii 理论和 Stroh 理论的相互联系,把已有的 Lekhnitskii 理论平面应变结果转化为 Stroh 理论形式的结果,直接获得 Stroh 公式中 A, B 的显式表达式(并进一步扩展到平面应力情况);然后导出压电材料平面应变问题尖端场 Williams 形式的展开式;最后采用半权函数法计算有限大压电体平面问题应力强度因子和电位移强度因子。文中计算了多种不同大小含中心裂纹板的断裂问题,在趋近于无穷大板的情况下,与已有结果的比较表明本文方法得到的结果精度可靠。本文方法的最大优点是可以求解有限大压电体的应力强度因子和电位移强度因子,并且需要的单元少,精度高,实用性好。利用本文方法,对实际应用中有有限大压电介质平面断裂问题进行分析,可为压电元件的力电耦合性态及其可靠性预测提供理论依据。

参 考 文 献

- Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material. Transactions of ASME[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57: 647~653
- Sosa H. Plane problems in piezoelectric media with defect[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 28: 491~505
- Sosa H. On the fracture mechanics of piezoelectric solids. International[J]. Journal of Solids and Structures. International Journal of Solids and Structures, 1992, 29: 2613~2622
- Sosa H, Khutoryansky N. New developments concerning piezoelectric materials with defects[J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, 33: 3399~3414
- Suo Z, Kuo C M, Barnett D M. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1992, 40: 739~765
- Qin Q H, Yu S W. On the plane piezoelectric problem of a loaded crack terminating at a material interfaces[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1996, 19: 151~158
- Liu J X, Wang B, Du S Y. Line force, charge and dislocation in anisotropic piezoelectric materials with an elliptic hole or crack [J]. Mechanics Research Communications, 1997, 24: 399~405
- Gao C F, Wang M Z. Generalized 2D problem of piezoelectric media containing collinear cracks [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1999, 15: 235~244
- Han X L, Wang T C. Interacting multiple cracks in piezoelectric materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36: 4183~4202
- Ting T C, T. Anisotropic Elasticity: Theory and Applications [M]. Oxford: Oxford University press, 1996
- Sosa H. Crack problems in piezoelectric ceramics[J]. Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures, ASME, 1993, AMD-Vole. 161/MD-Vole. 42: 63~75
- Gao C F, Fan W X. Exact solutions for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic or a crack. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36: 2527~2540
- 高存法,崔德密. 压电介质平面问题的基本解[J]. 应用力学学报, 1999, 16: 140~143
- Gao C F, Zhao Y T, Wang M Z. An exact and explicit treatment of an elliptic hole problem in thermopiezoelectric media[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39: 2665~2685
- Gao C F. Further study on the generalized 2D problem of an elliptical hole or a crack in piezoelectric media[J]. Mechanics Research Communications, 2000, 27: 429~434
- 高存法. 压电介质断裂问题理论研究(博士论文)[D]. 南京航空航天大学, 1998
- Park S B, Sun C T. Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics [J]. International Journal of Fracture, 1995, 70: 203~216
- McMeeking R, Ricoeur A. The weight function for cracks in piezoelectrics[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 6143~6162
- Yuan F G, Yang S. Crack-tip fields in elastic-plastic material under plane stress mode I loading[J]. International Journal of Fracture, 1997, 85: 131~155
- Liu Chuntu, Zhang duanzhong. Semi-weight function method in fracture mechanics[J]. International Journal of Fracture, 1991, 48: R3~R8
- Ding Haojiang, Chen Weiqiu. Three Dimensional problems of piezoelectricity[M]. New York: Nova Science Publishers, Inc Huntington, 2001. 19~21

energy of inflow is redistributed to heighten the pressure of a part of the the flow to the desired level whereas for the rest of flow a low level of pressure is maintained, which causes moving water with high energy to reach to a higher place. On the basis of the working principles of water hammer pumps, water hammer motive power with applications is investigated, a series of parameters for water wave pump design are proposed. The computational results verified the validity and flexibility.

Keywords: *water wave theory, one-dimensional unsteady flow, water hammer pumps, hydromechanics calculation.*

Effect of Earth Surface Temperature on Saltation Trajectories of Sand particles

Zheng Xiaojing Yue Gaowei

(Department of mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000)

Abstract: The saltation trajectories of sand particles in a horizontal wind field and a vertical wind field arising due to solar radiation are investigated to find out the influence of the temperature variation near the earth surface on the saltation movement of sand particles. Calculated the temperature near the earth surface and the upward wind speeds at different moments during a full day, the saltation trajectories of sand particles in a horizontal wind field combined with the vertical wind field are simulated. The numerical results show that the maximum height and span of the trajectories respectively increase by 55.56% and 73.68% afternoon at which the upward wind speed approaches to 1.5m/s. Moreover, when the upward wind speed is taken into account, the calculated trajectories of sand particles with individual diameters are different, which is quite distinguished from the simulation without upward wind speed.

Keywords: *wind-blown sand movement, saltation trajectory, solar radiation, temperature variation, simulation.*

Crack Tip Field and Stress Intensity Factors in Planar Piezoelectric Problem

Yang Limin Liu Chuntu Zeng Xiaohui

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Division of Engineering Sciences, Beijing, 100080)

Abstract: Crack tip field in planar piezoelectric problem is proposed with Stroh formulas. The matrices A and B are obtained via comparison between Lekhnitskii and Stroh relationships. Semi-weight function method is developed to determine stress intensity factors and electric displacement intensity factor. The stress intensity factors defined in terms of the integral form are derived from the Betti's reciprocal work theorem and expressed with stresses, displacement, electric displacement and electric potential on a path and the semi-weight function. The numerical results for a center-cracked plate under pure electric loading demonstrate the accuracy and practicality of the method, in which tight grids and high resolution near the crack tip are unnecessary.

Keywords: *piezoelectric, semi-weight function, stress intensity factors, plane problem, stroh, lekhnitskii.*