复 合 材 料 学 报 第 18 卷 第 1 期 2 月 2001 年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol 18 No. 1 February 2001

文章编号: 1000-3851(2001)01-0093-04

材料损伤开裂的数值模拟方法

李国琛

(中国科学院 力学研究所非线性力学国家重点实验室(LNM), 北京 100080)

摘 要: 针对数值模拟材料损伤开裂的现有方法——空单元技术和嵌入过程区中结点力释放方法,提出了释放空单元内结点力的新模拟方法,既可解决原有空单元技术未曾明确的残余应力的释放问题,又可避免采用嵌入过程区方法时所引入的大量重叠结点。已有算例表明,本方法具有模型简明,操作便利的特点。

关键词: 损伤开裂; 空单元; 有限元分析

中图分类号: TB330.1 **文献标识码**: A

METHOD FOR NUMERICAL SIMULATION OF DAMAGE AND CRACKING IN MATERIALS

LI Guo-chen

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract: Concerning the existing methods (empty element technique and embedded process zone method used for releasing nodal forces) applied to the numerical simulation of damage and cracking in materials, a new method of modeling is proposed for releasing the internal nodal forces of the empty elements. It provides a way to release the residual stresses which are not specified by the previous empty element technique, but without resort to using redundant overlap nodes as that in the embedded process zone method. Previous computation examples have demonstrated that this method has the advantages of simple modeling and convenient implementation.

Key words: damage and cracking; empty element; finite element method

受损后的材料力学行为的描述和预测一直为固体力学与材料科学所共同关注,但至今尚未获得满意解决。其困难在于材料本构行为的多变性,尤其是损伤演变过程的一些随机性因素更使问题大为复杂化。实践表明,单纯从设置理论模型出发是难以解决问题的。有限的“内变量”无从包容实际材料的多种演变状况。再者,理论模型自身的局限性又往往导致不能正确给定有关“内变量”在损伤过程中所应具有的内涵及其表征值。

比较而言,以数值模拟与实验测定相结合的方法处理应能提供可行的出路。概括地说,它的思路是:针对一类材料问题设置一个力学模型,以数值方法求解和模拟该模型在给定受力和环境条件下的力学行为,通过与有限的实验测定相比较后,拟合和标定该模型中所包含的待定“内变量”参数(计算与实验的响应如不相符则需调整给定的“内变量”初始值直至满意为止)。一旦确定这些材料参数后又可通过数值计算在一定范围内预测材料在其他状况下的力学行为。这一作法的优点在于数值求解可以适用于更复杂又更多样的材料模型。以其计算结果与有限实验相比较不仅可以为确定“内变量”提供可靠的物理依据,又可以验证所设定力学模型的正确性。它的缺点也是明显的,工作量大,经验色彩重;但仍不失为一条有效途径。因为它实际上可以发挥正反两方面的功能。一是,在已知和给定“内变量”参数后,预测材料行为;再则是,根据实验结果反推“内变量”参数并验证力学模型(参见文献[1,2])。

采用数值方法模拟材料损伤开裂的核心技巧就是如何运用已有的结点力松弛方法(也称嵌入过程区(embedded process zone)模型[3])和空单元技

收稿日期: 2000-10-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872064);非线性力学国家重点实验室资助
作者介绍: 李国琛(1936),男,研究员,博士生导师,主要从事材料计算细观损伤力学。

术[4]。第一种方法的优点是开裂(内)边界上结点残余力可以逐次松弛为零,但它的局限性是必须事先设定开裂路径并埋设重叠结点。空单元技术[4]可以免去这种局限性。采用这种方法时,任一单元内的应力/应变达到预定的临界条件后,该单元即被排空,其局部刚度就不再参与后继计算中的总体刚度矩阵。所以,它可以适用于任何损伤开裂的路径,也可以克服采用损伤单元(如应变软化效应)时而导致的总体刚度矩阵的“病态”现象。但原有的空单元技术[4]一直未曾交待如何将其内部残余应力释放掉,已有的金属板材计算结果表明[5],板材颈缩区将引发中心区内部开裂,以空单元模拟其开裂演变过程时,不同的应力松弛率将大大影响材料的后继拉伸度。因此,不考虑释放其中的残余应力就无从正确模拟板材的实际韧性。再有,原有的空单元技术[4]也不能描述一些材料损伤区的取向性。例如,高分子材料受损后出现银纹就是一个明显的情况。

对于含有界面的两相或多相材料的界面剥离问题,现有的一种作法[6,7]是设定界面结合力与剥离位移间的本构关系。但由此需在虚功原理中附加界面剥离功。对于事先不能确定的剥离和开裂路径则需在大范围内嵌入结合界面,于是几乎每个结点都要成为重叠的,结点周边交叉的单元数愈多,重叠的次数也愈多,因为只有这样才能模拟结点间的分离位移。其结果是问题的自由度数大为增加[7],计算工作量也会很大。

综上所述,为发展破坏单元技术[8],寻求将空单元与结点力松弛相结合的方法应是可取的选择。以下将介绍松弛空单元中残余应力的原理并提供两类常用情况下(平面,轴对称)有关计算式以便于实行有限元计算时采用。

1 松弛空单元中残余应力的原理

采用空单元技术模拟材料的损伤开裂时,将限定使用恒定应变的单元类型,而不用等参单元。后者将因同一单元内不同积分点上应力/应变状态不同形成取舍单元的困难。

从空单元排除残余应力所依据的主要原理是在单元内边界的结点上施加反向结点力。下面将说明确定反向结点力的过程与方法。已知在某一增量计算之前空单元内的残余应力分量为 $\sigma_{(i)}$ ($i=1,\cdots,6$)。实行增量计算之后拟松弛各分量为 $d\sigma_{(i)}$,其符号与相应的 $\sigma_{(i)}$ 相同,那么可以取

$$d\sigma_{(i)} = p_{(i)}\sigma_{(i)} \qquad (i=1,\cdots,6) \tag{1a}$$

$p_{(i)}$ 为对应各应力分量的松弛百分数。如为各向同性松弛,则 $p_{(i)}$ 可归为一数值;而对于有取向性的松弛,则各值 $p_{(i)}$ 可以不同。为避免过度松弛可以取各百分数为常数,于是现时所存残余应力 $\sigma_{(i)}$ 与初始实行空单元中的残余应力 $\sigma^0_{(i)}$ 之间的关系是

$$\sigma_{(i)} = (1-p_{(i)})^N \sigma^0_{(i)} \tag{1b}$$

其中 N 为空化某单元后的后继计算增量次数,这样 $\sigma_{(i)}$ 只会趋向零而不致越过零向相反方向发展。为消除增量型计算中步长 Δt 的选取对应力松弛过程的影响,可以在后继计算中固定 Δt 值,并以

$$\theta_{(i)} = p_{(i)}/\Delta t \tag{1c}$$

形式表征各方向的松弛率。$\theta_{(i)}$ 各就是应力松弛过程的主要“内变量”,当 $p_{(i)}$ 取为同一数值而不考虑损伤的取向性时,则 $\theta_{(i)}$ 也归为一个参数。

由给定的应力松弛量(1a),可以确定相应的恢复应变的变化量 $\{d\epsilon\}$,即

$$[D]\{d\epsilon\} = -\{d\sigma\} \tag{2a}$$

右端项前的负号体现松弛应力的反向特点。由于松弛过程主要将取决于 $\theta_{(i)}$ 的选择,刚度阵 $[D]$ 的一般形式可以简化取为

$$[D] = E\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2b}$$

其中 E 为弹性模量。这一形式可以形象地称为“杆膜”体系,即各方向的恢复应变的变化仅与相关方向的应力松弛有关。轴向应力和应变构成“杆”系,而剪切应力和应变则是“膜”系。这样的系统可表征材料损伤区的取向性,也便于实际操作。

此后可按有限元方法由 $\{d\epsilon\}$ 计算相应的恢复位移量 $\{\delta\}$,即

$$[B]\{\delta\} = \{d\epsilon\} \tag{3}$$

矩阵 $[B]$ 中各元素都是常量,仅决定于结点坐标和单元的面积。这里,式(3)中所包含的方程个数不足以求解恢复位移。所差的方程可借助于单元的刚体位移和刚体转动应为零的条件。以下将通过典型示例予以说明。

最后一步是由已解出的恢复位移确定在排空单元内结点上所应施加的反向松弛力

$$\{f\} = [K]\{\delta\},\ [K] = [B]^T[D][B]S \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} (x_jy_k - x_ky_j) & 0 & (x_ky_i - x_iy_k) & 0 & (x_iy_j - x_jy_i) & 0 \\ 0 & (x_jy_k - x_ky_j) & 0 & (x_ky_i - x_iy_k) & 0 & (x_iy_j - x_jy_i) \\ (x_k - x_j) & (y_k - y_j) & (x_i - x_k) & (y_i - y_k) & (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}u_i \\ \mathrm{d}v_i \\ \mathrm{d}u_j \\ \mathrm{d}v_j \\ \mathrm{d}u_k \\ \mathrm{d}v_k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5b}$$

其中 S 在二维问题中代表单元面积, 而在三维问题中则是单元积体。$\{f\}$是作用在排空单元内结点上的自平衡力系。在各个后继增量型计算中, 一方面不使空单元再介入到总体刚度矩阵以避免“病态”化, 另一方面单元内应力松弛的效应会体现在被列入矩阵右端载荷列中的松弛力$\{f\}$。

这样作法的合理性和简便性是显而易见的。它避免了要预先埋设损伤开裂界面的烦琐[7], 而是随损伤随处理。处理的方法就是在损伤开裂所形成的空单元内边界上施加松弛力。一旦某结点为空单元所包围, 则该结点自动失去意义, 可处理为冗点。因此, 随着损伤开裂的扩大化, 问题的总自由度数只可能逐渐减少而不致增大[7]。松弛过程所涉及的“内变量”$\theta_{(i)}$的个数也不会比采用嵌入过程区法[3,7]更多。确定 $\theta_{(i)}$的最好方法就如前言中所述, 即采用数值模拟与实验测定相结合的方法。

从本质上说, 式(1)和式(2)中各式提供了一种以数值模型描述材料损伤行为的方法。它通过式(3)和式(4)式规定作用于空单元内边界上的松弛力, 从而再与材料的其他部分继续交互作用。它的可模拟性和正确性可由实验标定和检验。对于含有界面的材料, 界面需以界面层表示并以有限元离散。这样可以避免引入界面剥离功的作法[6,7]。与界面层有关的材料参数可按情况取为不同于基体部分的参数。

2 平面问题

设平面问题三角形单元的三个结点号为 i, j 和 k。达到局部损伤条件时, 单元内应力为 σ^0_{xx}, σ^0_{yy} 和 τ^0_{xy}, 有待在后继计算过程中逐次松弛。按(1a)选择各项松弛量 $\mathrm{d}\sigma_{xx}$, $\mathrm{d}\sigma_{yy}$ 和 $\mathrm{d}\tau_{xy}$。由(2a)可以相应确定恢复应变的变化为 $\mathrm{d}\epsilon_{xx}$, $\mathrm{d}\epsilon_{yy}$ 和 $\mathrm{d}\gamma_{xy}$。

实行无量纲运算时, 通常可对 x 坐标和位移 u 除以长 l, 又对 y 坐标和位移 v 除以宽 b。取 $\rho = l/b$。利用三角形有限元知识可知式(3)的具体形式为式(5a)

$$\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i/\rho & \rho b_i & c_j/\rho & \rho b_j & c_k/\rho & \rho b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}u_i \\ \mathrm{d}v_i \\ \mathrm{d}u_j \\ \mathrm{d}v_j \\ \mathrm{d}u_k \\ \mathrm{d}v_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{d}\epsilon_{xx} \\ \mathrm{d}\epsilon_{yy} \\ \mathrm{d}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5a}$$

其中, $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_k - x_j$ 等依次类推; Δ 为三角形面积(已无量纲化)。

由刚体位移及刚体转动为零可提供另外三个补充条件(式(5b)见上)。

通过式(5a)和(5b)可以解出 3 个结点上的 6 个位移恢复量

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u_i &= 2\Delta\left(\frac{\rho}{1+\rho^2}\alpha_1 \mathrm{d}\gamma_{xy} + \alpha_2 \mathrm{d}\epsilon_{xx}\right) \\ \mathrm{d}v_i &= 2\Delta\left(\frac{\rho}{1+\rho^2}\alpha_3 \mathrm{d}\gamma_{xy} + \alpha_4 \mathrm{d}\epsilon_{yy}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\alpha_1 = (a_kb_j - a_jb_k)/A,\quad \alpha_2 = (a_jc_k - a_kc_j)/A$$

$$\alpha_3 = (a_kc_j - a_jc_k)/B,\quad \alpha_4 = (a_jb_k - a_kb_j)/B$$

$$A = (a_kb_j - a_jb_k)c_i + (a_ib_k - a_kb_i)c_j + (a_jc_i - a_ib_j)c_k$$

$$B = (a_kc_j - a_jc_k)b_i + (a_ic_k - a_kc_i)b_j + (a_jc_i - a_ic_j)b_k$$

按 i, j, k 依次循环置换可以得到其他 4 个位移分量的表达式。将结果代入到平面问题条件下的式(4)就可以确定空单元内结点上所应附加的反向松弛力。

3 轴对称问题

轴对称问题的三角形单元内有 4 个残余应力分量 σ^0_{rr}, $\sigma^0_{\theta\theta}$, σ^0_{zz} 和 τ^0_{rz}。由于轴对称情况下单元的转动将引起应变, 又不会有不形成环向应变的径向位移, 所以约束刚体运动的条件可以表示为

$$\mathrm{d}u_i = 0,\ \mathrm{d}w_i = 0\ (或常量) \tag{7}$$

与前相似, 为实行无量纲运算, 对径向坐标 r 和位移 u 除以半径 R, 对轴向坐标 z 和位移 w 则除以长度 l。此时取 $\rho = l/R$。再通过(1a)和(2)分别确定松弛应力分量和恢复应变量后就可进入式(3)运算。考虑到约束条件(7), 可以消去两个位移分量, 从而使式(3)简化为

$$\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_j & 0 & b_k & 0 \\ f_j & 0 & f_k & 0 \\ 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_j/\rho & \rho b_j & c_k/\rho & \rho b_k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} du_j \\ dw_j \\ du_k \\ dw_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_r \\ d\epsilon_{\theta\theta} \\ d\epsilon_z \\ d\gamma_{zr} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中, $f_j = \frac{a_j}{r_0} + b_j + \frac{c_j z_0}{r_0}$, $a_j = r_k z_i - r_i z_k$, $b_j = z_k - z_i$, $c_j = r_i - r_k$, $r_0 = (r_i + r_j + r_k)/3$, $z_0 = (z_i + z_j + z_k)/3$, 依此类推。

由式(8)可以立即解出

$$\begin{aligned} du_j &= 2\Delta(d\epsilon_r f_k - d\epsilon_{\theta\theta} b_k)/(b_j f_k - b_k f_j) \\ du_k &= 2\Delta(d\epsilon_{\theta\theta} b_j - d\epsilon_r f_j)/(b_j f_k - b_k f_j) \\ dw_j &= (2\Delta d\epsilon_{zz} b_k - \gamma c_k)/\rho(c_j b_k - c_k b_j) \\ dw_k &= (\gamma c_j - 2\Delta d\epsilon_{zz} b_j)/\rho(c_j b_k - c_k b_j) \\ \gamma &= 2\Delta\gamma_{zr} - c_j u_j/\rho - c_k u_k/\rho \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)代入轴对称条件下的式(4)就可导出反向松弛力。

4　结束语

(1) 从本文中的介绍和推论可见采用空单元结合残余应力逐次松弛的模拟方法具有简明和便利的特点。它可以用数值方法模拟损伤的起点, 损伤后的应力松弛及损伤的取向性。

(2) 作者曾以此方法成功地模拟出金属板材内后分叉局部化带状颈缩的演化情况[5], 并试验了不同方向上取不同松弛率对材料韧性的影响。

(3) 本文仅以此作为发展这项计算技术的启动, 今后应以更多的实例计算显示和发挥这一新方法的作用。

参考文献:

[1] 李国琛, 耶纳 M. 塑性大应变微结构力学 (第二版, 第 8 章) [M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[2] Shih C F, Cheng L, Faleskog J, Gao X. A cell model for ductile fracture with applications to the transition regime [A]. In: Karihaloo B L, *et al*, eds. Advances in Fracture Research (ICF 9) [C]. Sydney Australia: Pergamon, 1997. 1935- 1946.

[3] Hutchinson J W. Linking Scales in Fracture Mechanics [A]. In: Karihaloo B L, *et al*, eds. Advances in Fracture Research (ICF 9) [C]. Sydney Australia: Pergamon, 1997. 1- 14.

[4] Tvergaard V. Ductile fracture by cavity nucleation between larger voids [J]. *J Mech Phys Solids*, 1982, 30: 265- 286.

[5] 李国琛, 黄　涛. 平板内后分叉的局部化带[J]. 力学学报, 1996, 28(4): 406—411.

[6] Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding [J]. *J Appl Mech*, 1987, 54: 525—531.

[7] Xu X P, Needleman A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids [J]. *J Mech Phys Solids*, 1994, 42: 1397—1434.

[8] 方岱宁. 先进复合材料的宏微观力学与强韧化设计: 挑战与发展 [J]. 复合材料学报, 2000, 17(2): 1—7.

[9] Tvergaard V. Analyses of debonding in metal ceramic systems [A]. In: Karihaloo B L, *et al*, eds. Advances in Fracture Research (ICF 9) [C]. Sydney Australia: Pergamon, 1997. 651—662.