

均匀各向同性湍流的频率波数能量谱

张曙光 雷 磊 何国威*

(北京航空航天大学飞行力学与控制教研室, 北京 100083)

*(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 对均匀各向同性湍流的频率波数能量谱进行了初步研究, 得出均匀各向同性湍流中能量随时间、空间尺度分布的解析表达式, 并运用直接数值模拟的方法对理论预测进行验证. 数值结果很好地支持了理论预测: 横扫速度是决定频率波数能量谱的特征量.

关键词 均匀各向同性湍流, 时间关联函数, 频率波数能量谱, 横扫假设, 直接数值模拟

引 言

1941 年, 柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 根据湍流的能量级串 (cascade) 过程, 应用量纲分析的方法, 导出了均匀各向同性湍流波数能量谱的 $-5/3$ 律^[1]. 它反映了湍流在不同空间尺度上的能量分布, 已成为湍流历史上最重要的结论之一. 然而, 湍流的频率波数能量谱, 即湍流的能量在不同时间尺度上的分布, 至今尚未见诸文献. 最近兴起的湍流噪声的研究要求我们能够预测湍流的频率波数能量谱. 根据莱特希尔 (Lighthill) 的比拟理论^[2], 湍流的噪声与其频率波数能量谱密切相关. 因此, 对湍流的频率波数能量谱的探讨无论对理论研究还是工程应用都十分重要^[3].

本文将研究均匀各向同性湍流的频率波数能量谱. 在第 1 节里, 我们将根据湍流的横扫假设 (sweeping hypothesis)^[4], 推导出湍流频率波数能量谱的解析表达式. 第 2 节里我们将应用直接数值模拟的方法求出均匀各向同性湍流的频率波数能量谱, 并与上一节的理论结果进行比较, 最后一节是我们的结论.

1 均匀各向同性湍流的频率波数能量谱

设 $\mathbf{u}(\mathbf{k}, t)$ 为均匀各向同性湍流速度场中波矢量为 \mathbf{k} 的模态, 则速度模态的时间相关函数定义为^[5]

$$C(\mathbf{k}, \tau) \equiv \langle \mathbf{u}(\mathbf{k}, t + \tau) \cdot \mathbf{u}(-\mathbf{k}, t) \rangle, \quad \mathbf{k} = |\mathbf{k}| \quad (1)$$

其规一化后的时间相关系数 $c(k, \tau)$ 为

$$c(k, \tau) = \frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{k}, t + \tau) \cdot \mathbf{u}(-\mathbf{k}, t) \rangle}{\langle \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{u}(-\mathbf{k}, t) \rangle} \quad (2)$$

根据湍流速度场的横扫假设

$$c(k, \tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}v^2k^2\tau^2\right) \quad (3)$$

其中 v 为横扫速度 (sweeping velocity).

湍流的频率波数能量谱 $E(k, f)$ 定义为

$$E(k, f) \equiv \mathcal{F}\{C(k, \tau)\} \quad (4)$$

这里 \mathcal{F} 表示傅立叶变换, f 是频率. 因为

$$\mathcal{F}\{c(k, \tau)\} = \frac{1}{vk} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{f^2}{v^2k^2}\right) \quad (5)$$

那么

$$E(k, f) = (vk)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{f^2}{v^2k^2}\right) E(k) \quad (6)$$

这里 $E(k)$ 是湍流的能量谱. 根据 K41 理论^[1]

$$E(k) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{u}(-\mathbf{k}, t) \rangle = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (7)$$

这里 ϵ 是能量耗散率, C 是柯尔莫哥洛夫常数. 那么

$$E(k, f) = C\epsilon^{2/3}k^{-8/3}v^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{f^2}{v^2k^2}\right) \quad (8)$$

令 $f^* = f/vk$, 则

$$vk \cdot E(k, f)/E(k) = \exp\left[-\frac{1}{2}(f^*)^2\right] \quad (9)$$

2 数值方法与结果

为了验证上述理论分析, 我们利用伪谱方

法^[5~9]对均匀各向同性湍流进行了直接数值模拟。求解区域是边长 L_B 为 2π 的立方体, 三个方向等分网格数 N 为 128, 同时令各个方向的边界条件呈周期性变化。由于求解区域的边长为 2π , 所以波矢的各个分量^[5]

$$\left. \begin{aligned} k_j &= \pm n_j \cdot (2\pi/L_B) = \pm n_j \\ n_j &= 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1; j = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

为了消除混淆误差, 我们采用了 1/3 法则^[7]。初始速度场为均匀各向同性高斯场, 其能量谱为 $E(k) \propto (k/k_0)^4 \exp(-2(k/k_0)^2)$, 这里 $k_0 = 4.76$ 为能量谱峰值对应的波数。为了维持速度场统计定常, 我们采取在前两个波壳加力的方法, 加力因子依 $k^{-5/3}$ 律选取, 分别为 0.5554 和 0.1598。其它数值模拟参数和结果如表 1 所示。

表 1 数值模拟参数表

Table 1 DNS parameters and statistical quantities of 128^3 run

Kinematic viscosity	Mean energy dissipation rate	Integral length scale	Taylor-scale Reynolds number	Skewness
ν	ϵ	L_f	R_λ	S_3
0.0035	0.12	1.667	125	-0.5

谱空间的 Navier-Stokes 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} = \mathbf{P}(\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_k - \nu k^2 \mathbf{u}_k + \mathbf{f}_k \quad (11)$$

这里 \mathbf{u} 代表速度, $\boldsymbol{\omega}$ 代表涡量, ν 是动力黏性系数, \mathbf{f} 代表外力。其中张量 $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ 定义为

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \quad (12)$$

数值积分采用 Adams-Bashforth 方法^[8], 积分格式为

$$\frac{\mathbf{u}_k^{n+1} - \mathbf{u}_k^n e^{-\nu k^2 \Delta t}}{\Delta t} = \mathbf{P}(\mathbf{k}) \cdot \left[\frac{3}{2} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_k^n e^{-\nu k^2 \Delta t} - \frac{1}{2} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_k^{n-1} e^{-2\nu k^2 \Delta t} + \mathbf{f}_k^n e^{-\nu k^2 \Delta t} \right] \quad (13)$$

算例中, 最大波数 k_{\max} 和柯尔莫哥洛夫尺度 $\eta (\eta \equiv (\nu^3/\epsilon)^{1/4})$ 的乘积大于 1, 证明模拟的最小涡尺度小于柯尔莫哥洛夫尺度; CFL 数为 0.4, 表明数值积分稳定^[5]; 泰勒微尺度雷诺数 R_λ 为 125, 速度导数斜度 (skewness) 的值为 -0.5, 与先前的结论一致^[5,8,9]。图 1 是算例的能量谱, 为比较起见, 我们用虚线画出了 k 为变量, 斜率 -5/3 的直线。

图 2 显示了波数 $k = 15, 20, 25, 30, 35$ 等模态的时间相关性, 如图所示, 不同模态的时间相关系数随时间演变的曲线在用横扫速度重整化后完全重合, 证明横扫速度是决定不同尺度涡时间相关性的特征量^[5]。

图 3 显示了波数 $k = 15, 20, 25, 30, 35$ 等模态的频率能量谱, 如图所示, 不同模态的频率能量谱用横扫速度重整化后也完全重合。这与公式 (6) 的预测是一致的, 因此, 横扫速度也是决定湍流频率能量谱的特征量。

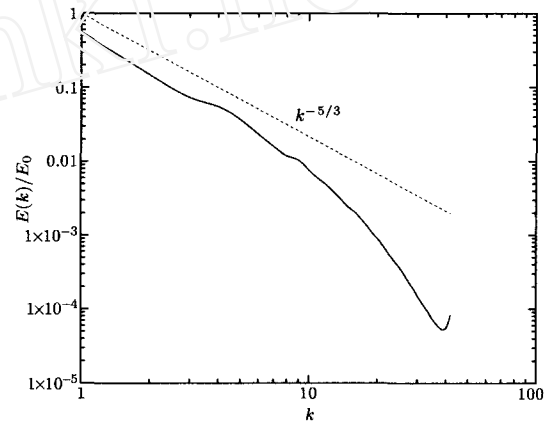
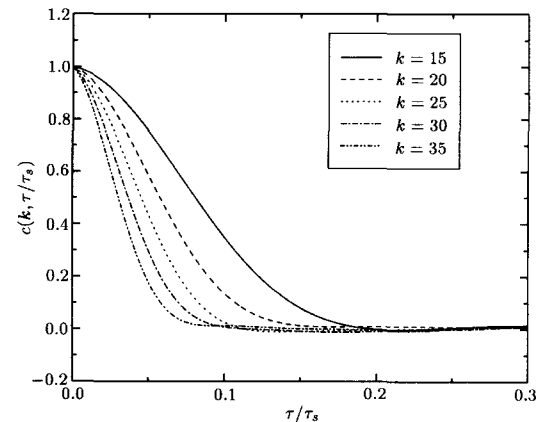


图 1 直接数值模拟的能量谱

Fig.1 Energy spectrum from DNS (solid line) with a plot of $k^{-5/3}$ (dash line) in comparison and E_0 total energy



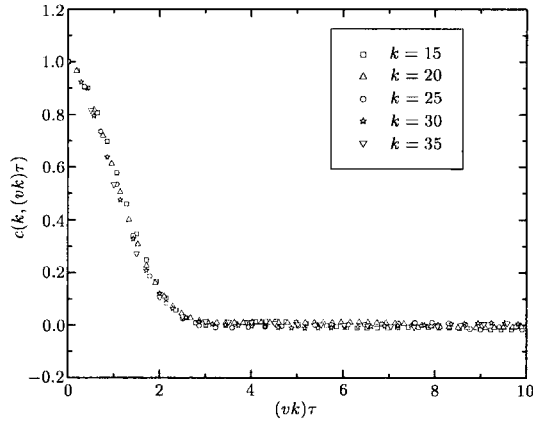
(a) 不同模态的时间相关系数, $\tau_s = (\nu k_{\min})^{-1}$

(a) Time correlation $c(k, \tau)$ vs time lag τ/τ_s

τ_s denoted as $\tau_s = (\nu k_{\min})^{-1}$

图 2 不同波数各模态的时间相关系数随时间的演变

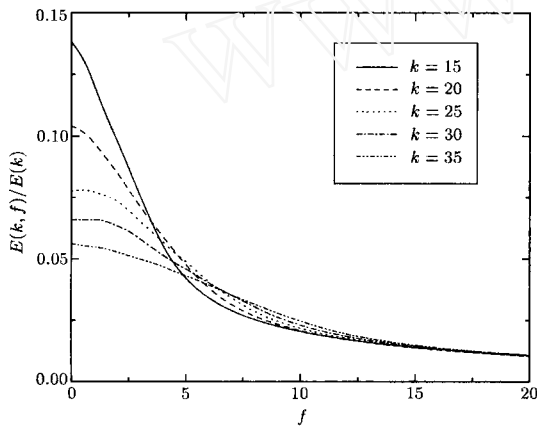
Fig.2 Time correlation $c(k, \tau)$ at different wavenumbers



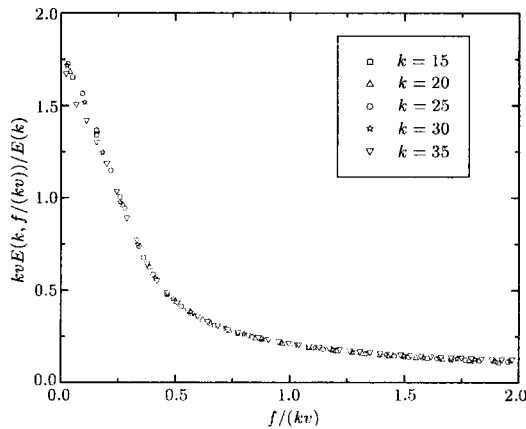
(b) 重整化后各模态的时间相关系数
(b) Normalized time correlation $c(k, \tau)$
vs normalized time lag $(vk)\tau$

图 2 不同波数各模态的时间相关系数随时间的演变 (续)

Fig.2 Time correlation $c(k, \tau)$ at different wavenumbers
(continued)



(a) 不同模态的频率能量谱
(a) Energy spectra $E(k, f)$ vs frequency f

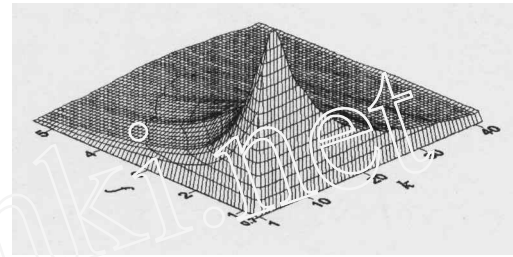


(b) 重整化后不同模态的频率能量谱
(b) Normalized energy spectra vs normalized frequency

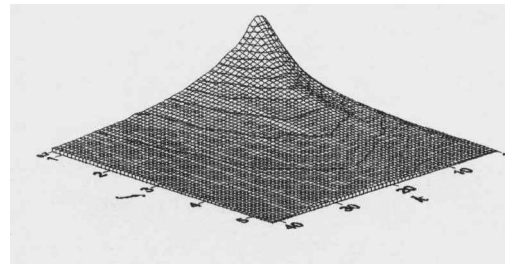
图 3 不同模态的频率能量谱

Fig.3 Energy spectra $E(k, f)$ at different wavenumbers

图 4 显示了频率波数能量谱，这里的平面坐标轴分别是波数 k 和频率 f ，垂直坐标轴是用能量谱 $E(k)$ 重整化后的频率波数能量谱 $E(k, f)/E(k)$ 。图中粗黑线条表示的是频率波数能量谱的等高线。沿 k 轴，频率波数能量谱依 $(vk)^{-1}e^{-\frac{1}{2}(f/(vk))^2}$ 变化，沿 f 轴，频率波数能量谱依 $e^{-\frac{1}{2}(f^*)^2}$ 递减，而频率波数能量谱的等高线形状为 $e^{-\frac{1}{2}(f^*)^2} \propto vk$ ，这与公式 (9) 的预测是一致的。



(a) 频率波数能量谱 (前视图)
(a) Frequency-wavenumber energy spectra
 $E(k, f)$ normalized by $E(k)$ (front view)



(b) 频率波数能量谱 (后视图)
(b) Frequency-wavenumber energy spectra
 $E(k, f)$ normalized by $E(k)$ (back view)

图 4 频率波数能量谱

Fig.4 Frequency-wavenumber energy spectra $E(k, f)$
normalized by $E(k)$

3 结 论

本文根据横扫假设，导出湍流的频率波数能量谱的解析表达式。直接数值模拟的结果验证了我们的理论预测。在湍流的频率波数能量谱中，横扫速度仍然起着主导作用，这导致波数不同的频率能量谱之间表现出相似性，它们用横扫速度重整化后会完全重合在一起。因此，横扫速度是刻画湍流频率波数能量谱的特征量。

致谢 作者感谢攀登项目“非线性科学”的支持。

参 考 文 献

- 1 Frisch U. Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 2 Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. *Proc Roy Soc A*, 1952, 211: 564~587
- 3 He GW, Wang M, Lele SK. Evaluation of subgrid-scale models in terms of time correlations. Proceedings of the Summer Program 2002, Center for Turbulence Research, Stanford University. 73~78
- 4 Kraichnan R.H. Kolmogorov's hypotheses and Eulerian turbulence theory. *Phys Fluids*, 1964, 7: 1723
- 5 He GW, Rubinstein R, Wang L.P. Effects of subgrid-scale modeling on time correlations in large eddy simulation. *Phys Fluids*, 2002, 14(7): 2186~2193
- 6 Gottlieb D, Orszag SA. Numerical Analysis of Spectral Methods. SIAM CBMS-NSF, Regional Conference Series in Applied Maths, 1977
- 7 Patterson GS, Orszag SA. Spectral calculations of isotropic turbulence: efficient removal of aliasing interactions. *Phys Fluids*, 1971, 14: 2538~2541
- 8 Vincent A, Meneguzzi M. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence, *J Fluid Mech*, 1991, 225: 1~20
- 9 Kerr RM. Higher-order derivative correlations and the alignment of small-scale structures in isotropic numerical turbulence, *J Fluid Mech*, 1985, 153: 31~58

FREQUENCY-WAVENUMBER ENERGY SPECTRA IN ISOTROPIC TURBULENCE

Zhang Shuguang Lei Lei He Guowei*

(The Flight Dynamics and Control Faculty, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

*(State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

Abstract The energy spectra with respect to wavenumbers in isotropic homogeneous turbulence have been studied thoroughly. However, less attention has been paid to the frequency-wavenumber energy spectra, which are important to the temporal statistics in turbulence and aeroacoustics. In this paper, the frequency-wavenumber energy spectra are at first formulated based on the Kolmogorov's classic theory and the sweeping hypothesis. A direct numerical simulation on isotropic turbulence is carried out to verify our theoretical predictions. It is indicated from our theoretical arguments and numerical simulations that the sweeping velocity dominates the frequency-wavenumber energy spectra. The frequency energy spectra at different wavenumbers are shown to be collapsed under the normalization of the sweeping velocity.

Key words isotropic turbulence, time correlation, frequency-wavenumber energy spectra, sweeping hypothesis, direct numerical simulation

Received 31 December 2002, revised 20 March 2003.