

# 正交铺设层合板的蠕变屈曲分析\*

孙远翔 \* 马和中 \* 高镇同 张双寅

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

(\* 北京航空航天大学固体力学研究所, 北京, 100083)

**摘 要** 研究了正交铺设层合板的蠕变失稳问题. 为了更好地模拟实际情况, 在单层板的本构关系中, 材料各主方向模量的松弛时间均取不同值, 并在建立控制方程时考虑了横向剪切变形的影响. 通过理论分析, 得到了粘弹性层合板的瞬时弹性临界载荷和持久临界载荷. 并在算例中首次利用时间增量方法得到了有初始挠度层合板在长期受载时的蠕变变形, 计算结果表明了持久临界载荷对于粘弹性层合板的具体含义, 从而使粘弹性层合板的蠕变屈曲问题有了较为完整的理论体系和数值方法. 而且这种理论分析方法和计算方法可用于解决其它复合材料粘弹性板和壳的蠕变屈曲问题.

**关键词** 正交铺设, 层合板, 蠕变屈曲, 瞬时临界载荷, 持久临界载荷

## 1 引言

目前复合材料结构在航空结构中得到日益广泛的应用. 但是, 许多复合材料的一个较大缺点就是在常温下具有明显的蠕变和松弛特性. 在受压情况下这个特性更加明显. 目前所使用的以复合材料为主受力件的飞机由于使用时间都不长, 所以虽暴露出了一些问题, 但还不至于酿成重大事故. 但随着使用时间的加长, 原有工艺、材料的缺陷(如初曲度等)在压力的作用下将逐渐扩大. 对于某一组经常作用的载荷来说, 即便它低于瞬时弹性临界载荷, 但只要作用时间足够长, 结构也可能发生蠕变屈曲破坏. 至今人们对粘弹性结构的蠕变屈曲问题的研究还很不完善, 其原因在于粘弹性结构的蠕变屈曲不同于弹性结构的屈曲, 它是一个随时间变化的过程, 其控制方程(尤其是材料各主方向模量的松弛时间均不同时)很难求解. 不少学者用弹性-粘弹性对应原理来解决粘弹性结构的响应问题, 但是, 对应原理的应用是有条件的, 而且在很多情况下, 数学变换十分困难. 迄今为止, 人们已对粘弹性板的蠕变屈曲问题做了一些研究, 其中有代表性的文献是: Troyanovskii<sup>[1]</sup>研究了各向同性粘弹性薄板的蠕变屈曲; 马麦斯捷尔<sup>[2]</sup>研究了各向异性粘弹性板的稳定性问题, 但却忽略了板沿纤维方向的蠕变效应; Wilson 和 Vinson<sup>[3]</sup>研究了双边受压矩形粘弹性正交各向异性板的稳定性问题, 但在他们的分析中应用了准弹性近似, 忽略了材料的记忆行为, Sims<sup>[4]</sup>也用类似方法做了研究; Potapov<sup>[5]</sup>确定了正交各向异性粘弹性板的瞬时弹性临界载荷和持久临界载荷, 但未给出求粘弹性结构蠕变变形的数值方法. 总之, 对粘弹性层合板的蠕变屈曲还没有一个完整的理论分析方法和数值方法. 本文通过理论分析得到了正交铺设层合板的瞬时弹性临界载荷和持久临界载荷. 在算例中用时间增量法得到了有初始挠度粘弹性层合板在长期受载时的蠕变变形. 由计算结果可得出持久临界载荷对于有初始小挠度粘弹性板的具体含义.

\* 1996-04-23 收到第 1 稿, 1997-10-07 收到修改稿

### 2 理论推导

由 Reissner 平板理论, 板的位移场可近似地表示成

$$\begin{aligned}
 V_1(x, y, z, t) &= z\psi_x(x, y, t) \\
 V_2(x, y, z, t) &= z\psi_y(x, y, t) \\
 V_3(x, y, t) &= W(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

这里  $V_1, V_2$  和  $V_3$  分别是随时间变化的  $x, y$  和  $z$  方向的位移,  $\psi_x$  和  $\psi_y$  分别是中面法线变形后在  $xz$  平面和  $yz$  平面上的转角

层合板的几何方程为

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= z\psi_{x,x} \\
 \epsilon_{yy} &= z\psi_{y,y} \\
 \epsilon_{xy} &= z(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\
 \epsilon_{xz} &= \psi_x + W_{,x} \\
 \epsilon_{yz} &= \psi_y + W_{,y}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

以  $(x_1, x_2, x_3)$  表示笛卡尔坐标系,  $x_1$  的方向与单层板中纤维的铺设方向相同 这种等效横观各向同性复合材料的本构方程可由细观力学分析<sup>[6]</sup> 确定为如下形式

$$\bar{\sigma} = E\bar{\epsilon} \tag{3}$$

其中  $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{23})$  是平均应力,  $\bar{\epsilon} = (\bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22}, \bar{\epsilon}_{33}, 2\bar{\epsilon}_{12}, 2\bar{\epsilon}_{13}, 2\bar{\epsilon}_{23})$  是平均应变, 并且

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & e_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & e_{44} & 0 & 0 \\ \text{symm} & & & & e_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(e_{22} - e_{23}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

式(4)中的  $E$  代表等效横观各向同性单向铺设复合材料的五个独立的弹性常数, 它们可用纤维和基体的性质以及增强相体积含量来表示<sup>[6]</sup>. 可以得到描述粘弹性复合材料性质的五个随时间变化的函数 纤维和基体两相的性质可由 Boltzmann 叠加原理<sup>[7]</sup> 表示, 以张量的卷积形式表示为

$$\sigma_{ijkl}^{(p)}(t) = Q_{ijkl}^{(p)}(t) \epsilon_{kl}^{(p)}(0) + \int_0^t Q_{ijkl}^{(p)}(t - \tau) \dot{\epsilon}_{kl}^{(p)}(\tau) d\tau = Q_{ijkl}^{(p)} * d\epsilon_{kl} \tag{5}$$

其中  $Q_{ijkl}^{(p)}$  是  $p$ -相的松弛函数 “ $*$ ” 表示卷积 通过利用细观力学分析和相域中的对应原理以及拉氏反变换<sup>[8]</sup>, 可以得到单层板的随时间变化的松弛函数  $Q_{ij}(t)$ . 单层板的本构方程的形式与式(5)相同, 只要用等效松弛函数  $Q_{ij}(t)$  代替相的松弛函数即可<sup>[9]</sup>.

松弛函数  $Q_{ij}(t)$  可取为如下形式<sup>[9]</sup>

$$Q_{ij}(t) = \delta + \lambda e^{-\gamma t} \tag{6}$$

其中  $\delta > 0, \lambda > 0, \gamma > 0$

层合板是由多层单层板叠合而成, 对于第  $k$  层有如下面内本构关系

$$[\sigma]_k = [Q]_k * \{d\epsilon\}_k \tag{7}$$

其中  $[Q]_k = [T]_{\alpha k} [Q] [T]_{\alpha k}^T$ , (见文[10])



对于层合板内力可表示为

$$\begin{cases} (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \\ (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, Q_{xx}, Q_{yy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)和式(8)可推得层合板的内力及变形关系如下

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d\epsilon^0 \\ d\chi \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中  $N, M$  为层合板内力, 子矩阵  $[A]$ 、 $[B]$  和  $[D]$  分别为面内刚度矩阵、耦合刚度矩阵和弯曲刚度矩阵,  $\epsilon^0$  为层合板面内应变,  $\chi$  为中面曲率及扭率

对粘弹性材料,  $A_{ij}, B_{ij}$  和  $D_{ij}$  定义为<sup>[9]</sup>

$$(A_{ij} \quad A_{ij}(t), B_{ij} \quad B_{ij}(t), D_{ij} \quad D_{ij}(t)) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(t) (1, z, z^2) dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (10)$$

由文献[9]可知层合板的横向剪切内力与剪应变之间的关系如下

$$\begin{Bmatrix} Q_{yy} \\ Q_{xx} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d(\psi_y + W_{,y}) \\ d(\psi_x + W_{,x}) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中,  $k$  是剪切校正系数

$A_{ij}$  定义为<sup>[9]</sup>

$$A_{ij} \quad A_{ij}(t) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(t) dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (12)$$

其中

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{44}^{(k)} \\ \bar{Q}_{45}^{(k)} \\ \bar{Q}_{55}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{44}^{(k)} \cos^2 \theta_k + Q_{55}^{(k)} \sin^2 \theta_k \\ (Q_{55}^{(k)} - Q_{44}^{(k)}) \cos \theta_k \sin \theta_k \\ Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta_k + Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta_k \end{Bmatrix}, \quad (\text{见文}[11])$$

受面内单向压缩外载的层合板的平衡方程为

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0 \\ Q_{xx,x} + Q_{yy,y} - N_{1x} W_{,xx} &= 0 \\ M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{xx} &= 0 \\ M_{yy,y} + M_{xy,x} - Q_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $N_1$  是  $x$  方向的面内单向压缩外载

对于四边简支正交铺设层合板  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ,  $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$  (图 1)

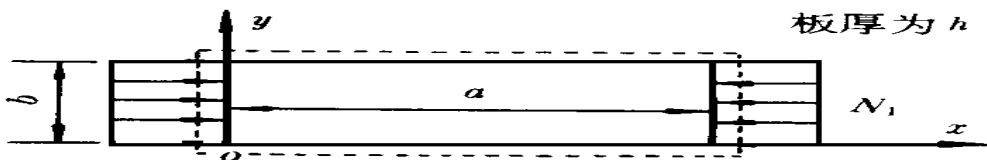


图 1 单向受压简支板

设位移函数为如下形式

$$\begin{aligned}
 W(x, y, t) &= \sin \frac{u\pi x}{a} \sin \frac{v\pi y}{b} f_w(t) \\
 \Psi_x(x, y, t) &= \cos \frac{u\pi x}{a} \sin \frac{v\pi y}{b} f_x(t) \\
 \Psi_y(x, y, t) &= \sin \frac{u\pi x}{a} \cos \frac{v\pi y}{b} f_y(t)
 \end{aligned} \tag{14}$$

其中  $u, v$  是正整数

令  $\alpha_u = u\pi/a, \beta_v = v\pi/b$ , 刚度  $B_{ij} = A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = A_{45} = 0$

这时式(13)中的后三式与前两式完全解耦, 可以独立地求解, 即

$$\begin{aligned}
 M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{xx} &= 0 \\
 M_{yy,y} + M_{yx,x} - Q_{yy} &= 0 \\
 Q_{xx,x} + Q_{yy,y} - N W_{,xx} &= 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

层合板的本构关系式变为

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ & D_{22} & 0 \\ \text{symm} & & D_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d\Psi_{x,x} \\ d\Psi_{y,y} \\ d(\Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}) \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} Q_{yy} \\ Q_{xx} \end{Bmatrix} &= k \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d(\Psi_y + W_{,y}) \\ d(\Psi_x + W_{,x}) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{16}$$

于是, 对于任意的  $u$  和  $v$ , 方程(15)中的各项有如下形式(为书写简便, 省去脚标  $u, v$ )

$$\begin{aligned}
 M_{xx,x} &= \{\alpha^2[D_{11x}(t)] + \alpha\beta[D_{12y}(t)]\}CS \\
 M_{xy,y} &= \{\alpha\beta[D_{66y}(t)] + \beta^2[D_{66x}(t)]\}CS \\
 M_{yx,x} &= \{\alpha^2[D_{66y}(t)] + \alpha\beta[D_{66x}(t)]\}SC \\
 M_{yy,y} &= \{\alpha\beta[D_{12x}(t)] + \beta^2[D_{22y}(t)]\}SC \\
 Q_{xx} &= k\{\alpha[A_{55w}(t)] + [A_{55x}(t)]\}CS \\
 Q_{yy} &= k\{\beta[A_{44w}(t)] + [A_{44y}(t)]\}SC
 \end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$SC = \sin\alpha x \cos\beta y, \quad CS = \cos\alpha x \sin\beta y, \quad SS = \sin\alpha x \sin\beta y.$$

且

$$F_{ijq}(t) = F_{ij}(t)f_q(0) + \int_{0^+}^t F_{ij}(t-\tau)f_q(\tau)d\tau \tag{18}$$

其中  $F_{ij} = A_{ij}, D_{ij}$ , 脚码  $q$  代表  $x, y, w$ .

由式(6)、式(10)和式(12)可知刚度  $A_{ij}(t)$  和  $D_{ij}(t)$  具有如下表达形式

$$F_{ij}(t) = G_{ij}^0 + \sum_{m=1}^M G_{ij}^m e^{-r_{ij}^m t} \tag{19}$$

其中

$$G_{ij}^0 > 0, \quad G_{ij}^m > 0, \quad r_{ij}^m > 0$$

由式(19)可知

$$\begin{cases} F_{ij}(0) = G_{ij}^0 + \sum_{m=1}^M G_{ij}^m \\ F_{ij}(\infty) = G_{ij}^0 \end{cases} \tag{20}$$

$F_{ij}(0)$  称为瞬时刚度,  $F_{ij}(\infty)$  称为持久刚度

将式(14)和式(17)代入式(15)得

$$[Z]\{f\} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ & Z_{22} & Z_{23} \\ \text{symm} & & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

其中

$$Z_{11} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55}$$

$$Z_{12} = \alpha\beta(D_{12} + D_{66})$$

$$Z_{13} = \alpha A_{55}$$

$$Z_{22} = \beta^2 D_{22} + \alpha^2 D_{66} + A_{44}$$

$$Z_{23} = \beta A_{44}$$

$$Z_{33} = \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44} - \alpha^2 N_1$$

用类似于文[5]中的方法,在式(21)中分别用瞬时刚度  $F_{ij}(0)$  和持久刚度  $F_{ij}(\infty)$  代替算子  $F_{ij}$  ( $F_{ij}$ 代表  $A_{ij}$ 和  $D_{ij}$ )后,可得到两个方程,而所得两方程有非零解的条件是

$$\det[Z] = 0 \quad (22)$$

解上式可得瞬时临界载荷  $N_0$  和持久临界载荷  $N_\infty$ 。

### 3 算例

考虑有初始小挠度的四边简支正交铺设层合板[0°/90°/0°/90°] (图 1)。板厚  $h = 0.375 \text{ mm}$ ,  $b/h = 20$ ,  $a/b = 3$ ,为简化计算,设初始波形与蠕变失稳波形相同

设初始挠度为

$$w_0 = f_{w_0} \sin\alpha x \sin\beta y \quad (23)$$

上式满足四边简支的边界条件

$$f_{w_0} = h/15$$

剪切校正系数  $k$  取为  $2/3$  [12]。

设板为碳纤维增强环氧树脂基体板,单层板的松弛函数  $Q_{ij}(t)$  取为 [13]

$$Q_{11}(t) = 2.002 \times 10^5 + 1.724 \times 10^3 e^{-(0.3746 \times 10^{-3})t} \text{ (MPa)}$$

$$Q_{22}(t) = 2.215 \times 10^3 + 4.668 \times 10^3 e^{-(0.3986 \times 10^{-3})t} \text{ (MPa)}$$

$$Q_{12}(t) = 8.924 \times 10^2 + 1.816 \times 10^3 e^{-(0.3785 \times 10^{-3})t} \text{ (MPa)}$$

$$Q_{55}(t) = Q_{66}(t) = 4.773 \times 10^2 + 1.068 \times 10^3 e^{-(0.4356 \times 10^{-3})t} \text{ (MPa)}$$

$$Q_{44}(t) = 3.67 \times 10^2 + 8.234 \times 10^2 e^{-(0.4365 \times 10^{-3})t} \text{ (MPa)}$$

其中时间  $t$  的单位是分钟

由式(22)可得

$$\text{瞬时临界载荷 } N_{00} = 87.13888 \text{ (N/mm)} \quad (u=2, v=1)$$

$$\text{持久临界载荷 } N_\infty = 58.42492 \text{ (N/mm)} \quad (u=2, v=1)$$

所以,  $N_\infty/N_{00} = 0.67048$

建立板的平衡方程

$$\begin{aligned} M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{xx} &= 0 \\ M_{yy,y} + M_{xy,x} - Q_{yy} &= 0 \\ Q_{xx,x} + Q_{yy,y} - N_1(W + W_0)_{,xx} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

把式(14)、式(17)和式(23)代入式(24)可得

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ & Z_{22} & Z_{23} \\ \text{symm} & & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 N_{1f_w0} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

上式中用瞬时刚度  $F_{ij}(0)$  代替算子  $F_{ij}$ , 由 Gramer 法则可得弹性解:  $f_x(0), f_y(0)$  和  $f_w(0)$ .

为求得板在  $N_1$  长期作用下蠕变变形, 采用时间增量法对式(25)求解:

由式(18)和式(19)可推得

$$F_{ij}q(t_{n+1}) - F_{ij}q(t_n) = \Delta F_{ij}^n f_q(0) + \Delta N_q^n$$

其中  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t, t_n = n\Delta t, \Delta t$  是时间增量,  $n$  是正整数, 且  $t_0 = 0$

$$\Delta F_{ij}^n = F_{ij}(t_{n+1}) - F_{ij}(t_n)$$

$$\Delta N_q^n = \int_0^{t_{n+1}} F_{ij}(t_{n+1} - \tau) \frac{df_q}{d\tau} d\tau - \int_0^{t_n} F_{ij}(t_n - \tau) \frac{df_q}{d\tau} d\tau$$

类似于文[14]中的推导, 可得

$$\Delta N_q^n = E_{ij}(t) \Delta f_q^n - N_{ijq}^n$$

其中

$$E_{ij}(t) = G_{ij}^0 + \sum_{m=1}^M \frac{G_{ij}^m}{r_{ij}^m \Delta t} (1 - e^{-r_{ij}^m \Delta t})$$

$$\Delta f_q^n = f_q(t_{n+1}) - f_q(t_n)$$

$$N_{ijq}^n = \sum_{m=1}^M (1 - e^{-r_{ij}^m \Delta t}) C_{ijq}^m$$

$$C_{ijq}^m = G_{ij}^m e^{-r_{ij}^m t_n} \int_0^{t_n} e^{r_{ij}^m \tau} \frac{df_q}{d\tau} d\tau$$

且

$$C_{ijq}^m = e^{-r_{ij}^m \Delta t} C_{ijq}^{(n-1)m} + \frac{G_{ij}^m (1 - e^{-r_{ij}^m \Delta t})}{r_{ij}^m \Delta t} (f_q(t_n) - f_q(t_{n-1}))$$

将  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ , 及  $t_n = n\Delta t$  分别代入式(25), 并将所得两式相减得

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ & Y_{22} & Y_{23} \\ \text{symm} & & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta f_x^n \\ \Delta f_y^n \\ \Delta f_w^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^n \\ R_2^n \\ R_3^n \end{Bmatrix} \quad (26)$$

其中

$$Y_{11} = \alpha^2 E_{11} + \beta^2 E_{66} + E_{55}$$

$$Y_{12} = \alpha\beta(E_{12} + E_{66})$$

$$Y_{13} = \alpha E_{55}$$

$$Y_{22} = \beta^2 E_{22} + \alpha^2 E_{66} + E_{44}$$

$$Y_{23} = \beta E_{44}$$

$$Y_{33} = \alpha^2 E_{55} + \beta^2 E_{44} - \alpha^2 N_1$$

$$R_1^n = -\alpha^2 \Delta D_{11}^n f_x(0) + \alpha^2 N_{11x} - \alpha\beta \Delta D_{12}^n f_y(0) + \alpha\beta N_{12y} - \beta^2 \Delta D_{66}^n f_x(0) + \beta^2 N_{66x} - \alpha\beta \Delta D_{66}^n f_y(0) + \alpha\beta N_{66y} - \Delta A_{55}^n f_x(0) + N_{55x} - \alpha \Delta A_{55}^n f_w(0) + \alpha N_{55w}$$

$$R_2^n = -\alpha\beta \Delta D_{12}^n f_x(0) + \alpha\beta N_{12x} - \beta^2 \Delta D_{22}^n f_y(0) + \beta^2 N_{22y} - \alpha\beta \Delta D_{66}^n f_x(0) + \alpha\beta N_{66x} -$$



$$\alpha^2 \Delta D_{66}^n f_y(0) + \alpha^2 N_{66}^n - \Delta A_{44}^n f_y(0) + N_{44}^n - \beta \Delta A_{44}^n f_w(0) + \beta N_{44}^n$$

$$R_3^2 = -\alpha \Delta A_{55}^n f_x(0) + \alpha N_{55}^n - \beta \Delta A_{44}^n f_y(0) + \beta N_{44}^n - \alpha^2 \Delta A_{55}^n f_w(0) + \alpha^2 N_{55}^n -$$

$$\beta^2 \Delta A_{44}^n f_w(0) + \beta^2 N_{44}^n$$

用 Cramer 法则可求得  $\Delta f_x^n$ ,  $\Delta f_y^n$  和  $\Delta f_w^n$ .

利用  $f_q^{n+1} = f_q^n + \Delta f_q^n$  [其中  $f_q^n = f_q(t_n)$ ], 可得到任意时刻的  $f_q(t)$  值

图(2)为当  $N_1$  取小于瞬时失稳临界载荷  $N_0$  的不同值时,  $f_w(t)/f_{w0}$  随时间变化的曲线

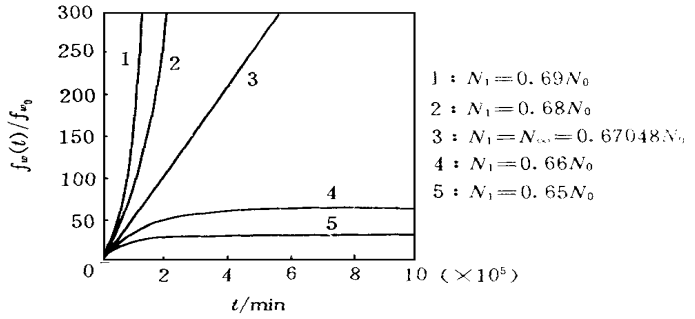


图 2 各种载荷值下的挠度-时间曲线

#### 4 结果分析与结论

(1) 通过理论分析可知, 粘弹性层合板的瞬时失稳临界载荷  $N_0$  与相应的弹性板 (其刚度等于粘弹性层合板的瞬时刚度) 的临界载荷相同。当外载  $N_1 = N_0$  时, 板在  $t = 0$  时就发生瞬时失稳。

(2) 除了瞬时失稳临界载荷  $N_0$  外, 粘弹性板还具有持久临界载荷  $N$ , 由式(20)可知, 粘弹性层合板的持久刚度  $F_{ij}(\infty)$  小于瞬时刚度  $F_{ij}(0)$ , 因此, 持久临界载荷  $N$  小于瞬时失稳临界载荷  $N_0$ 。

(3) 由图 2 可看出, 当  $N < N_1 < N_0$  (曲线 1、曲线 2) 时, 挠度的增长速度随时间而加快; 当  $N_1 = N$  (曲线 3) 时, 挠度以匀速发展; 而当  $N_1 < N$  (曲线 4、曲线 5) 时, 挠度的增长速度将随时间而逐渐衰减。挠度的增长随时间而减慢的情况, 可以认为是板的稳定状态。板的不稳定状态, 是指它的挠度以越来越大的速度发展的情况 (即  $N < N_1 < N_0$ )。文献 [1, 2] 对粘弹性结构得到了与本文意义相似的瞬时失稳临界载荷与持久临界载荷。

(4) 由曲线 4 和曲线 5 可知, 在  $N_1 < N$  情况下, 当  $t$  较大时, 用时间增量法计算所得的  $f_w(t)$  趋向于一个定值, 而这个定值与在式(25)中用持久刚度  $F_{ij}(\infty)$  代替算子  $F_{ij}$  后, 直接用 Cramer 法则求得的  $f_w(\infty)$  相同。这表明了算例中所使用的数值方法的正确性。

(5) 若在使用粘弹性结构时只考虑瞬时失稳临界载荷, 而不考虑持久临界载荷, 则结构虽不发生瞬时失稳, 但有可能在一段时间后发生蠕变失稳。

#### 参 考 文 献

- 1 Troyanovskii I E. On stability of thin viscoelastic plates. Proc Moscow University, Mathematics and Mechanics, 1970, (6): 67~ 72 (in Russian)
- 2 马麦斯捷尔 A K 等, 刘统畏等译. 聚合物与复合材料力学. 新时代出版社, 1988, 307~ 309, 315~ 317
- 3 Wilson D W, Vinson J R. Viscoelastic analysis of laminated plate buckling. AIAA J, 1984, 22(7~ 12): 982~ 988
- 4 Sims D F. Viscoelastic creep and relaxation behavior of laminated composite plates. Ph.D. dissertation, Southern Methodist University, Dallas, Texas, 1972
- 5 Potapov V D. Stability of viscoelastic structural elements [in Russian]. Stroizdat, Moscow, 1986, 122~ 123

- 6 A boudi J. M icromechanical analysis of composites by the method of cells AppIM ech Rev, 1989, 52 (7): 193~ 221
- 7 克里斯坦森著, 郝松林, 老亮译 粘弹性力学引论 北京: 科学出版社, 1990, 6~ 9
- 8 Cederbaum G, A boudi J. M icro-to-m acro analysis of viscoelastic lam inated plates In Composite Structures (edited by I H M arshall), Elsevier, London, 1989, 5: 779~ 793
- 9 Cederbaum G, A boudi J, Elishakoff I Dynamic stability of shear-deformable viscoelastic lam inated plates by lyapunov exponents Int J Solids Structures, 1991, 28(3): 317~ 327
- 10 吕恩琳 复合材料力学 重庆: 重庆大学出版社, 1992, 31~ 32
- 11 王震鸣 复合材料力学和复合材料结构力学 北京: 机械工业出版社, 1991, 118
- 12 Whitney J M , Pagano N J. Shear deformation in heterogeneous anisotropic J AppIM ech, 1970, 37: 1031~ 1036
- 13 Chandiramani N K, L ibrescu L, A boudi J. The theory of orthotropic viscoelastic shear deformable composite flat panels and their dynamic stability. Int J Solids Structures, 1989, 25(5): 465~ 482
- 14 龚尧南, 王寿梅 结构分析中的非线性有限元素法 北京: 北京航空学院出版社, 1986, 120~ 124

## CREEP BUCKLING OF CROSS-PLY LAM INATED PLATES

Sun Yuanxiang      \* M a Hezhong      \* Gao Zhentong      Zhang Shuangyin

(Institute of M echanics, Chinese A cademy of Sciences, B eijing, 100080)

(\* R esearch Institute of Solid M echanics, B eijing University of A eronautics and A stronautics, B eijing, 100083)

**Abstract** A creep buckling analysis of cross-ply lam inated plates is given. In order to simulate the real conditions, the relaxation time of modulus in the principal orientations of material is arbitrary in constitutive equations of lam ina. In deriving the associated governing equations transverse shear deformations are incorporated. By means of theoretical analysis, the instantaneous critical load and durable critical load of viscoelastic lam inated plates are obtained for the first time. In the example a time-incremental method is used for the first time to calculate the deformation of the viscoelastic lam inated plates with initial imperfection, subjected to a constant compressive load for a long time. The calculated result presents the meanings of the durable critical load. Thus a more complete theoretical and calculating system of creep buckling for viscoelastic lam inated plates is obtained. Moreover, this deducing and calculating method can be used to solve the creep buckling questions of other viscoelastic composite plates and shells.

**Key words** cross-ply, lam inated plates, creep buckling, instantaneous critical load, durable critical load