

# 非线性系统的任意项精细积分外插多步法 及其在混沌数值分析中的应用\*

唐 晨<sup>1)2)</sup> 张 睿<sup>1)</sup> 闫海青<sup>1)†</sup> 张桂敏<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (天津大学应用物理系, 天津 300072)

<sup>2)</sup> (中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

(2002 年 7 月 18 日收到; 2002 年 9 月 9 日收到修改稿)

对非线性系统提出了高精度的精细积分任意项外插多步法的计算公式. 本方法只需增加插值项数即可提高计算精度, 同时不会增加过大的计算量, 发展完善了精细积分法. 将本方法应用于混沌方程中, 取得了较好的效果. 数值计算结果表明, 该方法是一种高精度、高效率的方法, 在求解混沌系统上比传统方法有很大的优势.

关键词: 非线性系统, 任意项精细积分多步法, 混沌系统

PACC: 0545

## 1. 引 言

近年来非线性系统在数值计算<sup>[1,2]</sup>和控制<sup>[3,4]</sup>等方面取得了相当大的进展. 但一些数值计算方法在处理非线性系统时计算效率较低, 所以建立新的高精度、高效率及稳定性好的数值计算方法有着重要的科学意义和实际应用价值.

文献[5]提出了求解常微分方程的精细时程积分法, 这种方法放弃了传统的差分格式, 对有限的步长又进一步作了  $2^N$  个 ( $N$  为正整数) 细化, 是一种高精度绝对稳定的显式积分格式. 该方法已经应用于非线性动力学研究中<sup>[6,7]</sup>. 在目前的精细积分应用中, 非齐次项在时间步长  $(t_k, t_{k+1})$  内近似为  $t_k$  时刻的值, 称为精细积分单步法, 精细积分单步法局部截断误差是  $O(h^2)$ . 或者把非齐次项在时间步长  $(t_k, t_{k+1})$  内近似为一线性函数. 文献[8]将非齐次项在时间步长  $(t_k, t_{k+1})$  内近似为一插值函数, 称为精细积分外插法. 外插法是指在插值点  $t_{k-i}, \dots, t_{k-1}, t_k$  之外, 仍以插值函数的值近似为其精确值. 但文献[8]没有提出任意项外插多步法, 并且精细积分外插算法的实现和应用还未见报道. 本文在文献[8]的基础上, 提出了非线性系统的任意项精细积分外插多

步法的计算公式, 采用任意精度计算算法和通过编制高效递归算法程序, 实现了任意项精细积分外插多步法, 并将本文方法应用于混沌方程中, 取得了较好的效果. 数值计算结果表明, 本文的方法是一种高精度、高效率的方法, 在求解混沌系统上比传统方法有很大的优势, 通过外插多步法的精确求解有助于对混沌系统的分析.

## 2. 非线性系统的精细积分任意项外插多步法

对一非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, t) \quad t \in [a, b], |y| < \infty, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $t \in R, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n, y$  是  $n$  维的待求向量,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ . 引进任意一个满秩定常矩阵  $H, H \in R^{n \times n}$ , 将(1)式进行等价变换, 则有

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Hy + F(t), \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $F(t) = f(t, y(t)) - Hy$ .

经此等价变换, 将方程中的非线性项作为非齐次处理. 对方程(2)进行积分, 得方程(2)的求解公式成为

\* 上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验(批准号: VSN-2003-03)和天津大学“985 教育振兴计划”资助的课题.

† 通讯作者, E-mail: haiqingyan@yahoo.com.cn

$$y(t) = \exp(Ht) \cdot y(0) + \int_0^t \exp H(t - \tau) \cdot F(\tau) d\tau \quad (3)$$

对方程(3)进行离散化方法,并令  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $h$  为积分步长,  $t_k$  时刻的  $y(t_k)$  用  $y_k$  表示,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , 在  $t_{k+1}$  时刻(3)式的精确离散积分形式为

$$y_{k+1} = \exp(Hh) \cdot y_k + \int_0^h \exp H(h - \tau) \cdot F(t_k + \tau) d\tau \quad (4)$$

令  $T = \exp(Hh)$ , 采用  $2^N$  类算法实现指数矩阵  $T$  的精细计算<sup>[8]</sup>.

令  $t = h/2^N$  ( $N$  为正整数), 可以用截断的 Taylor 展开式去近似  $\exp(Ht)$ .

$$\exp(Ht) = I + Ht + (Ht)^2/2 + \dots + (Ht)^n/n! = I + T_a,$$

则

$$T = (\exp(Ht))^{2^N} = (I + T_a)^{2^{N-1}} \times (I + T_a)^{2^{N-1}} \quad (5)$$

这样分解一直做  $N$  次, 用  $N$  次矩阵相乘得到矩阵  $T$  中的非单位矩阵部分. (4) 式是精细积分的一般公式, 有了  $T$  矩阵, 精细积分的关键是(4) 式中的  $\int_0^h \exp H(h - \tau) \cdot F(t_k + \tau) d\tau$ .

精细积分外插法是用已求出的  $t_{k-i}, \dots, t_{k-1}, t_k$  时刻的值  $y_{k-i}, \dots, y_{k-1}, y_k$  来构造  $F(t, y(t))$  的插值函数. 假设节点  $t_{k-i}, \dots, t_{k-1}, t_k$  上解的近似值  $y_j$  ( $y(t_j)$ ) 已经求出, 由  $F(t) = f(t, y(t)) - Hy$ , 得  $F_j = f(t_j, y(t_j)) - Hy(t_j)$ ,  $j = k - i, \dots, k - 1, k$ . 由  $i + 1$  对值  $(t_k, F_k), (t_{k-1}, F_{k-1}), \dots, (t_{k-i}, F_{k-i})$  ( $i < k$ ) 来构造  $F(t)$  牛顿等距插值多项式.

令  $t = t_k + h$ ,  $F(t)$  的牛顿等距插值函数

$$P_{ik}(t) = P_{ik}(t_k + h) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix}^j F_{k-j}, \quad (6)$$

(6) 式采用了下式的符号约定:

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!},$$

且  $\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$  (7)

将牛顿等距插值函数  $P_{ik}(t)$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  近似代替(4) 式的  $F(t)$ , 并根据差商的性质将(6) 式中的函数  $F_{k-j}$  在节点  $t_{k-j}$  上的  $j$  阶向前差分  $\Delta^j F_{k-j}$  用其

函数  $F$  的值表示, 则(4) 式成为

$$y_{k+1} = \exp(Hy) \cdot y_k + h \sum_{s=0}^i (-1)^s \sum_{j=s}^i b_j \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix} F_{k-s}, \quad (8)$$

其中

$$b_j = \int_0^1 \exp Hh(1 - \tau) \cdot (-1)^j \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix} d\tau \quad (9)$$

令

$$is = (-1)^s \sum_{j=s}^i b_j \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix},$$

则精细积分的多步法的公式为

$$y_{k+1} = \exp(Hh) \cdot y_k + h \sum_{s=0}^i is F_{k-s}. \quad (10)$$

(9) 式是积分运算, 不具备由计算机实现任意项外插计算的. 对(9) 式作如下变形, 令

$$A = \frac{H^{-1}}{h}, T = \exp(Hh),$$

$$b_j = \int_0^1 \exp Hh(1 - \tau) \cdot (-1)^j \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix} d\tau$$

$$= (-1)^j \left[ (-A) \int_0^1 \exp Hh(1 - \tau) \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix} d\tau \right]$$

$$= (-1)^j \left\{ (-A) \left[ \exp Hh(1 - \tau) \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix} \right]_0^1 - \int_0^1 \exp Hh(1 - \tau) \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix} d\tau \right\}$$

$$\dots$$

$$= (-1)^j \left[ (-1)^0 (-A)^1 \exp Hh(1 - \tau) \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix} \right]_0^1$$

$$+ (-1)^1 (-A)^2 \exp Hh(1 - \tau) \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix} \Big|_0^1 + \dots$$

$$+ (-1)^j (-A)^{j+1} \exp Hh(1 - \tau) \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix} \Big|_0^1$$

$$= (-1)^j \sum_{s=0}^j (-A)^{s+1} \left[ I \cdot \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix}^{(s)} \right]_{=1}$$

$$- T \cdot \begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix}^{(s)} \Big|_{=0}, \quad (11)$$

式中

$\begin{bmatrix} - \\ j \end{bmatrix}^{(s)} \Big|_{=1}$  是  $\frac{(-1)(-1-1)\dots(-1-j+1)}{j!}$  的  $s$  阶导数在  $=1$  处的值,

$\left( \begin{matrix} - \\ j \end{matrix} \right)_{=0}^{(s)}$  是  $\frac{(-1)(-1-1)\dots(-1-j+1)}{j!}$  的  $s$  阶导数在  $=0$  处的值,将  $b_j$  的积分运算转换为求和运算,才使计算机实现任意项外插系数求解成为可能.使用  $(i+1)$  个插值点构造的精细积分多步法的局部截断误差的阶可达到  $O(h^{i+2})$ .

本文在实现任意项外插多步法的过程中发现(11)式中求和各项的值非常接近,因此在其各项的相减过程中,使得  $b_j$  的计算存在精度损失,精度的损失大约在每项 6 位有效数字.因此本文采用任意精度计算算法解决计算精度不足的问题.在实现任意项精细积分外插法的过程中,对矩阵  $T$  的求解也需要高精度值,因此将对矩阵  $T$  的求解也改写成了任意精度运算算法.在求解  $b_j$  时,求解的关键是要计算  $\left( \begin{matrix} - \\ j \end{matrix} \right)_{=1}^{(s)}$  和  $\left( \begin{matrix} - \\ j \end{matrix} \right)_{=0}^{(s)}$ ,本文通过编制高效递归算法程序一次实现对  $\left( \begin{matrix} - \\ j \end{matrix} \right)_{=0}^{(s)}$  的全部  $1-j$  阶导数,这部分需要乘法运算的次数较多,但是  $b_j$  不依赖于函数值  $F_{k-i}, \dots, F_{k-1}, F_k$  和  $y_{k-i}, \dots, y_{k-1}, \dots, y_k$ ,可预先求出.

### 3. 精细积分任意项外插多步法运算量分析

由于目前公认 Runge-Kutta 法是计算效果比较好的算法,所以将本文方法计算量与 Runge-Kutta 法计算量进行比较.

由(10)式可见,精细积分外插多步法每步运算只需要计算一次  $F(t, y)$ .每步计算量为 1 次  $F(t, y)$ ,  $(i+2)$  次乘法( $i+1$  次  $is \cdot F_{k-s}$  和 1 次  $T \cdot y_k$ )以及  $i$  次加法( $\sum_{s=0}^i$ )的计算量.  $T, is$  不依赖于函数值  $F_{k-i}, \dots, F_{k-1}, F_k$  和  $y_{k-i}, \dots, y_{k-1}, y_k$ ,可预先求出.根据实际计算情况,  $F(t, y)$  的计算量是其总计算量的主要部分,尤其是当  $F(t, y)$  很复杂时,其计算量将占总计算量的绝大部分.

相比较 4 阶 Runge-Kutta 法,从 4 阶 Runge-Kutta 法计算公式可见,每步运算中仅利用一次上一步的函数计算结果.4 阶 Runge-Kutta 法的每步计算量为 3 次求函数值运算,6 次乘法和 6 次加法.此时 4 阶 Runge-Kutta 法的局部截断误差为  $O(h^5)$ .要使精细积分法的局部截断误差为  $O(h^5)$ ,需要外插 4 项,即

$i=3$ ,此时精细积分法多步法的每步计算量为 1 次  $F(t, y)$ ,5 次乘法(4 次  $is \cdot F_{k-s}$  和 1 次  $T \cdot y_k$ )和 3 次加法.可见在相同的局部截断误差条件下精细积分多步法比 Runge-Kutta 法计算量要少.

### 4. 精细积分任意项外插多步法在混沌方程中的应用

#### 算例 1 超混沌 Rössler 系统模型<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0.25y + w, \\ \dot{z} &= 3 + xz, \\ \dot{w} &= -0.5z + 0.05w, \end{aligned} \tag{12}$$

其中,初值为  $x(0) = -18.8503, y(0) = -29.5013, z(0) = 0.1483, w(0) = 30.1428$ .

使用四—五阶变步长 Runge-Kutta 方法与本文方法相比较.图 1—3 分别是外插多步法在  $h = 0.001$  步长下,外插项分别取 2,3,4 项时,本文方法和 Runge-Kutta 法计算  $y$  值的对比图,Runge-Kutta 法的相对误差是  $10^{-15}$ .由图 1—3 可看出外插 2 项时,在  $t = 47.5$  时出现偏差;外插 3 项时,在  $t = 78$  时出现偏差;外插 4 项时,在  $t = 106$  时出现偏差.外插 5 项时,在对比时间内( $t = 0 \dots 120$ )已完全吻合,图 4 为 Runge-Kutta 法和本文外插 5 项、步长为 0.001 计算方程(12)得变量  $y$  和  $w$  的结果对比,计算结果相比吻合非常好.

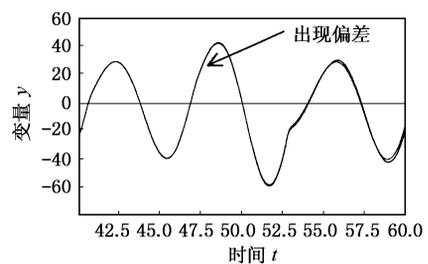


图 1 外插 2 项时本文方法与 Runge-Kutta 法计算结果比较

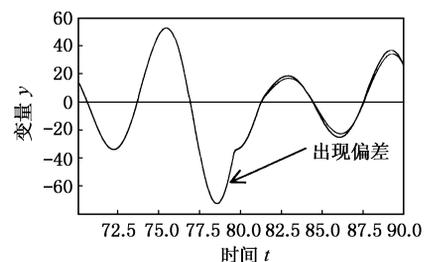


图 2 外插 3 项时本文方法与 Runge-Kutta 法计算结果比较

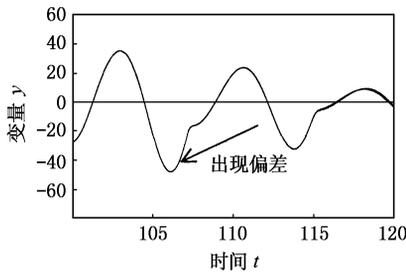


图3 外插4项时本文方法与 Runge-Kutta 法计算结果比较

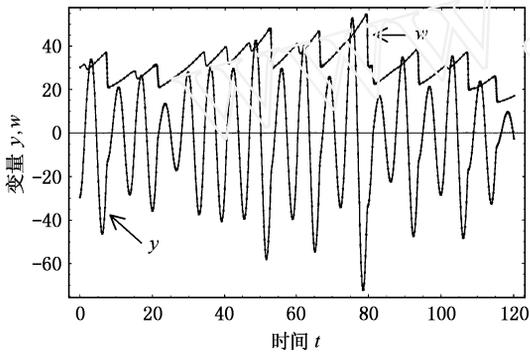


图4 本文方法 (...) 与 Runge-Kutta 法 (—) 计算方程(12)结果比较

### 算例 2 心脏-血液耦合动力学方程

一种心脏-血液耦合动力系统混沌同步模型<sup>[10]</sup>,由心脏自持张弛振荡、血液在心脏内的流体动力学和窦房结自律性振动三部分相互耦合,其基本方程是 7 维非线性系统,即

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -Ex_2 - Ex_1 + Bx_4, \\
 \dot{x}_2 &= Ax_1 - x_2 - x_1x_3, \\
 \dot{x}_3 &= x_1x_2 - Gx_3, \\
 \dot{x}_4 &= P_1x_5 + P_2x_4 - P_3x_4^3 + Mx_7, \\
 \dot{x}_5 &= -P_1x_4 + Dx_1, \\
 \dot{x}_6 &= P_0x_7 + 5.0x_6 - 6.0 \times 10^4 x_6^3 + Hx_1, \\
 \dot{x}_7 &= -P_0x_6 - Mx_4,
 \end{aligned} \tag{13}$$

其中,参数  $E=16.0, A=45.92, B=5.0$  保持不变,系数选取为五组:

- $G=4.0, P_0=10.0, P_1=3.4, P_2=60.0, P_3=12.0 \times 10^5, M=1.5, D=0.012, H=0.012$ ;
- $G=0.25, P_0=9.8, P_1=3.4, P_2=18.0, P_3=6.0 \times 10^5, M=1.5, D=0.012, H=0.012$ ;
- $G=0.25, P_0=10.0, P_1=3.4, P_2=18.0, P_3=6.0 \times 10^5, M=1.5, D=0.012, H=0.012$ ;
- $G=0.25, P_0=9.8, P_1=3.4, P_2=60.0, P_3=6.0 \times 10^5, M=1.5, D=0.012, H=0.012$ ;

5.  $G=0.25, P_0=10.0, P_1=3.4, P_2=60.0, P_3=6.0 \times 10^5, M=1.5, D=0.012, H=0.012$ .

图 5 是系数取第 2 组时 Runge-Kutta 法和本文方法计算方程(13)得变量  $x_4, x_5, x_7$  结果对比.图中 Runge-Kutta 法相对误差是  $10^{-15}$ ,本文插值项取为 4 项,步长为 0.0001.

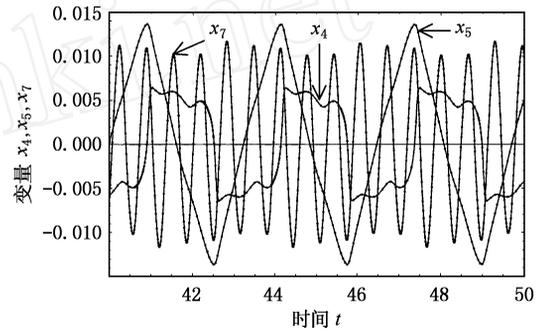


图5 本文方法 (...) 与 Runge-Kutta 法 (—) 计算方程(13)第 2 组系数结果比较

由文献[10]可知方程(13)为三系统耦合方程,为了准确地分析系统状态,分别从三系统中选取变量  $x_2, x_4, x_7$  构成相图,以分析系统状态.图 6 是由外差多步法获得第 4 组系数时  $x_2, x_4, x_7$  构成的相图,可见此时系统处于混沌状态.

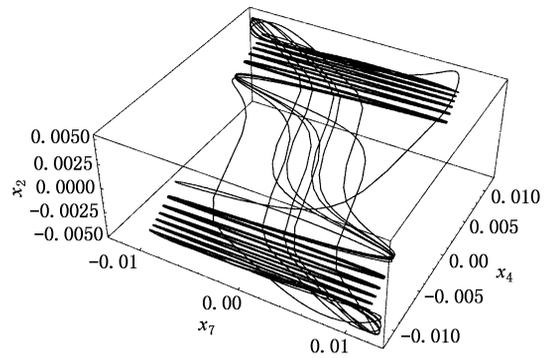


图6 方程(13)第 4 组系数的  $x_2, x_4, x_7$  相图

表 1 给出本文方法与文献[2]获得 5 组系数对应的状态.当系数取第 4 或第 5 组时,文献[2]不能确定李雅普诺夫特性指数(LCE)为正为零的个数,所以不能判定此时系统的状态.本文通过数值计算,由  $x_2, x_4, x_7$  构成相图来确定系统的状态.由此可看出,通过任意项外插多步法的精确求解将有助于对混沌系统的分析.

表1 方程(13)5组系数对应的状态

系数	系 统 状 态	
	本文方法	文献[2]
1	混沌	混沌
2	极限环	极限环
3	极限环	极限环
4	混沌	不确定
5	极限环	不确定

对算例 1 函数  $F$  形式简单,Runge-Kutta 法和本文外插法耗时均为 2s.而对算例 2 函数  $F$  形式相对复杂,Runge-Kutta 法耗时 122s,本文外插法耗时仅为 35s.

### 5. 结 论

应用任意项精细积分外插多步法,可通过增加插值项数方便地增加局部截断误差的阶次.同时与 Runge-Kutta 法相比,增加外插项数不会带来过大的计算量变化.本文的工作发展完善了精细积分,同时较好地解决了传统方法提高精度带来的计算量过大的问题.精细积分多步法是一种高精度、高效率的计算方法,尤其适合复杂系统分析.精细积分外差多步法是求解混沌系统的一种有效方法,可进一步推广应用于其他非线性系统中.

[1] Yang S Q et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636(in Chinese) [杨绍清等 2000 物理学报 **49** 636]

[2] He D H et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 833(in Chinese) [何岱海等 2000 物理学报 **49** 833]

[3] Li Z et al 2001 *Chin. Phys.* **10** 494

[4] Chen S H et al 2002 *Chin. Phys.* **11** 233

[5] Zhong W X 1994 *Journal of Dalian University of Technology* **34** 131 (in Chinese) [钟万勰 1994 大连理工大学学报 **34** 131]

[6] Lü H X et al 2001 *Chinese Journal of Applied Mechanics* **18** 35(in Chinese) [吕和祥等 2001 应用力学学报 **18** 35]

[7] Zhang X A et al 2000 *Chinese Journal of Applied Mechanics* **17** 165 (in Chinese) [张洵安等 2000 应用力学学报 **17** 165]

[8] Kong X T 1998 *Precise Time Integration Algorithms of Ordinary Differential Equations and Application in Multibody System Dynamics* (Doctoral Paper in Chinese) [孔向东 1998 常微分方程的精细积分法及其在多体系统动力学中的应用(博士论文)大连理工大学]

[9] Rössler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155

[10] Pei L Q et al 1998 *Science in China (Series E)* **28** 83(in Chinese) [裴留庆等 1998 中国科学(E辑)**28** 83]

## The free-item extrapolated multistep method for precise integration of a nonlinear system and its application in the digital analysis of a chaotic system \*

Tang Chen<sup>1)2)</sup> Zhang Hao<sup>1)</sup> Yan Hai-Qing<sup>1)†</sup> Zhang Gui-Min<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (Department of Applied Physics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

<sup>2)</sup> (State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

(Received 18 July 2002; revised manuscript received 9 September 2002)

### Abstract

The free-item extrapolated multistep method for precise integration is proposed for a nonlinear system, and the calculation formula for the free - item extrapolated multistep method is obtained. The accuracy of the extrapolated multistep method can be improved through increasing the number of extrapolated points; at the same time, evaluations cannot be increased too much. The precise integration method has been developed and perfected by the present studies. When the method is applied to a chaotic system, the result is admirable. Numerical calculations show that the present method is high by accurate and computationally efficient. It has more advantages than the traditional methods in the analysis of a chaotic system.

**Keywords:** nonlinear system, the free-item multistep method of precise integration, chaotic system

**PACC:** 0545

\* Project supported by the State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiaotong University (Grant No. VSN-2003-03), and the 985 Education Development Plan of Tianjing University.

†Corresponding author. E-mail: haiqingyan@yahoo.com.cn

