

高速掺气水流的压缩性准则*

赵建福

李炜

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080) (武汉水利电力大学河流工程系, 武汉, 430072)

摘要 本文利用双流体连续介质模型建立了高速掺气水流基本方程, 通过量级分析等方法研究了高速掺气水流的压缩性准则. 在定常均质掺气水流中, 绝热 Mach 数 M 决定着压缩性效应的强弱: $M < 0.3$ 时流动可视为不可压的; 否则需要考虑压缩性效应.

关键词 掺气水流, 压缩性, Mach 数, 双流体连续介质模型.

中图分类号 TV131.3

随着坝工技术的提高和水电建设事业的发展, 世界上高坝建设发展迅速, 坝高不仅突破了 200m, 而且已进入 300m 级; 这一趋势在中国更为突出^[1,2]. 由于落差增大, 水工建筑物渲泄的水流速度相应增大, 甚至超过 50m/s. 这么高速的水流处在大气环境中必然呈现为剧烈的掺气状态. 大量研究表明, 掺入的空气极大地增强了水流的可压缩性, 使得其中的声速远小于单相的水或空气中的声速, 最低约 20m/s^[3]. 这使得掺气水流在很低的流速 (相对于气体动力学中有明显压缩性效应的流速而言) 时就表现出很强的可压缩性^[4]. Cain & Wood^[5]在对高速掺气水流的原型观测中发现, 流速很大时确实需要考虑压缩性的影响. 因此, 必须加强对高速掺气水流压缩性效应的研究, 探索其运动规律, 从而找出控制和利用此类流动现象的途径.

本文利用双流体连续介质模型建立高速掺气水流的基本方程, 通过量级分析等方法确定高速掺气水流的压缩性准则, 为进一步研究提供必要的基础.

1 高速掺气水流基本方程

掺气水流是一种复杂的气/液两相流动现象, 双流体连续介质模型是目前描述此类流动最常用、最可信赖的方法^[6]. 该模型假设各相在其占据的局部时空范围内都满足连续介质条件, 从而建立各相局部的、瞬时的控制方程和相界面间断关系, 然后利用适当的平均化方法得出宏观的两相流动方程和各种相间作用的表达式, 进而实现对两相流动的理论分析和数值模型. 不过, 平均化过程在简化对流动的描述的同时, 不可避免地抹杀了大量的流动细微结构的信息, 导致宏观平均的两相流动方程不封闭; 另外, 这样所得的两相流动方程 (尤其是相间作用) 形式很复杂, 难以直接用来解决具体的流动问题. 因此, 为得到实用的流动方程, 需要结合特定流动的实际情况, 引入合理的近似假设和正确的本构关系.

针对水工高速掺气水流流速高、气泡尺寸大^[5]等特点, 假设: (1) 流动中无相变发生; (2) 水相等温、不可压缩; (3) 气相为完全气体, 流动中绝热; (4) 局部静压平衡, 即平均化后流场内同一点处各相内部压强与相界面压强相等; (5) 忽略粘性应力、附加应力、附加热流量及脉动动能; (6) 相间动量传递由粘性阻力与附加质量力承担. 这样可得如下封闭的、宏观平均的高速掺气水流基本方程^[7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k k) + \nabla \cdot (\rho_k k \vec{u}_k) = 0, \quad (1)$$

* 本文于 1998 年 4 月 8 日收到, 由国家自然科学基金和“211”工程建设专项基金提供资助.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \vec{u}_k) + \nabla \cdot (\rho_k \vec{u}_k \vec{u}_k) = -\rho_k p + \rho_k \vec{g} + \vec{F}_k, \quad (2)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{C_V (\gamma - 1) \vec{F}_1 \cdot \vec{u}_r}{p}, \quad (3)$$

$$p = \gamma R T_1, \quad (4)$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = (\gamma - 1) \rho_2 [41.2 (\gamma - 1) |\vec{u}_r| \vec{u}_r - C_{VM} (\frac{d\vec{u}_1}{dt} - \frac{d\vec{u}_2}{dt})], \quad (5)$$

式中, $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, $\rho_2 = 1 - \rho_1$, $\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla s$, ρ_k 、 \vec{u}_k 、 p 、 \vec{g} 、 \vec{F}_k 、 C_{VM} 和 T 分别表示掺气浓度、密度、速度、压强、重力加速度、广义相间力、附加质量系数和温度, 下标 1、2 分别表示气相和水相, C_V 、 γ 和 R 分别表示空气的定容比热、比热比和气体常数, $\vec{u}_r = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ 为相间滑移速度, $s = C_V \ln(p/p_0)$ 为气相的 (类) 熵。

压缩性效应是水气两相混合物的整体表现, 因此, 空义混合密度 $\rho = \rho_1 + (1 - \rho_1) \rho_2$ 和混合速度 $\vec{u} = [\rho_1 \vec{u}_1 + (1 - \rho_1) \rho_2 \vec{u}_2] / \rho$, 相应的控制方程由式 (1)、(2) 分别对 $k=1, 2$ 求和得出:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\rho p + \rho \vec{g} - \nabla \cdot [(\gamma - 1) \rho_2 \vec{u}_r \vec{u}_r]. \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\rho p + \rho \vec{g} - \nabla \cdot [(\gamma - 1) \rho_2 \vec{u}_r \vec{u}_r]. \quad (7)$$

掺气水流中, $\rho_1 / \rho_2 \sim 10^{-3}$, $\vec{u}_1 \sim \vec{u}_2$, 只要 ρ_1 不是很接近于 1, 则总有 $\rho \approx \rho_2$, $\vec{u} \approx \vec{u}_2$. 这样, 由式 (6) 可得:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla. \quad (8)$$

式 (7) 右端最后一项可近似表示为 $-\nabla \cdot (\rho_1 \vec{u}_r \vec{u}_r)$, 式 (3) 可表示为:

$$\frac{ds}{dt} = \vec{u}_r \cdot [\nabla s + C_V (\gamma - 1) \frac{\vec{F}_1}{p}]. \quad (9)$$

最后, 掺气水流中的声速可由 Wood 绝热公式确定^[3]:

$$a^2 = \frac{\gamma a_1^2}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (10)$$

2 高速掺气水流的压缩性准则

压缩性效应的一个显著表现是流体介质密度的变化. 对于掺气水流, 由式 (6) 可得:

$$\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (11)$$

这样, 通过分析混合速度散度的量级可以判定混合密度变化的大小, 从而确定必须考虑压缩性效应的条件, 即掺气水流的压缩性准则. 此外, 利用混合密度的定义及式 (8) 可得:

$$\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho_1}{dt}. \quad (12)$$

此式表明掺气水流的压缩性效应主要来自气相的可压缩性; 但和单相气流不同, 掺气水流的压缩性效应还受到掺气浓度的影响.

利用前节的定义及公式, 经过繁复的推导, 可得^[7]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{a^2} & \left\{ \frac{\partial u_r^2}{\partial t} + \frac{C_{VM} (\gamma - 1)}{2} \frac{\partial u_r^2}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{u} \cdot \vec{g} \right. \\ & + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \nabla u^2 + \frac{C_{VM} (\gamma - 1)}{2} \vec{u} \cdot \nabla u_r^2 + \vec{u} \cdot [\nabla \cdot (\rho_1 \vec{u}_r \vec{u}_r)] \\ & \left. - C_{VM} (\gamma - 1) \vec{u}_r \cdot (\vec{u}_r \cdot \vec{u}) + 41.2 (\gamma - 1) (\gamma - 1) \rho_2^3 + \frac{\rho \vec{u}_r \cdot \vec{s}}{C_V} \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

式中, $u = |\vec{u}|$, $u_r = |\vec{u}_r|$.

选择如下变量作为相应量的特征值将式 (13) 无量纲化: u_0 、 l_0 、 t_0 、 ρ_0 、 a_0 、 ρ_0 或 $(1 - \rho_0)$ 、 ρ_{10} 、 s_0 、 u_{r0} 和 g_0 , 其中, 特征速度 u_0 表示在特征长度 l_0 内发生的速度变化的量级. 此外, 可压缩流体介质内压力扰动是以声速传播的, 利用动量定理可知压力的特征值应为 $\rho_0 a_0 u_0$. 这样可得式 (13) 的无量纲形式为:

$$\begin{aligned} \vec{u}^* = & \frac{a_0^2}{a^2} \frac{l_0}{a_0 t_0} \left(\frac{M_0}{2} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{C_{VM}(\rho_0 - 1)}{2} \frac{\rho_0^2 M_0}{\rho_0} \frac{\partial u_r^{*2}}{\partial t^*} - \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} \right) \\ & + \frac{a_0^2}{a^2} \left\{ - \frac{g_0 l_0}{a_0^2} \vec{u}^* \cdot \vec{g}^* + \frac{M_0^2}{2} \vec{u}^* \cdot \vec{u}^{*2} + \frac{C_{VM}(\rho_0 - 1)}{2} \frac{\rho_0^2 M_0^2}{\rho_0} \vec{u}^* \cdot \vec{u}_r^{*2} \right. \\ & + \frac{\rho_0 - \rho_{10}}{\rho_0} \frac{\rho_0^2 M_0^2}{\rho_0} \vec{u}^* \cdot [\vec{s}^* \cdot (\vec{u}_r^* \vec{u}_r^*)] - C_{VM}(\rho_0 - 1) \frac{\rho_0^2 M_0^2}{\rho_0} \vec{u}_r^* \cdot (\vec{u}_r^* \cdot \vec{s}^*) \\ & \left. + 41.2(1 - \rho_0)^2 (\rho_0 - 1) l_0 \frac{\rho_0^3 M_0^2}{\rho_0} u_r^{*3} + \frac{\rho_0 s_0}{C_V} \rho_0 M_0 p^* \vec{u}_r^* \cdot \vec{s}^* \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

式中, $\rho_0 = (1 - \rho_0) / (1 - \rho_0)$, $M_0 = u_0 / a_0$ 为 (绝热) Mach 数, $\rho_0 = u_{r0} / u_0$ 为速度滑移率, 上标 “*” 表示相应的无量纲变量, \vec{s}^* 表示无量纲坐标系中的梯度算符. 上式最后两项表面上的量纲不一致源于相间阻力及气相 (类) 熵的定义.

显然, $\vec{u}^* \sim 1$ 即为所要求的压缩性准则. 根据前面特征量的选择可知, 式 (14) 中的每一项除系数外都粗略地是 1 的量级, 因此, 每一项的大小便可近似地由其系数确定. 如果该式右端任一项量级为 1, 那么, 流动一般就不能作为不可压流处理.

文献 [7] 详细分析了式 (14) 右端各项量级大小, 这里仅介绍 3 种常见的必须考虑掺气水流压缩性效应的流动情况: 1) 掺气水流中的声运动, 此时最主要的是 $\frac{\partial p^*}{\partial t^*}$ 项. 由于 ρ_0 、 $\frac{a_0^2}{a^2}$ 均为 1 的量级, 声运动中 l_0 和 t_0 分别为波长和周期, $l_0 / a_0 t_0$ 正好是 1, 因此, 所有的声运动都和压缩性有关. 2) 特大水深的掺气水流, 这对应于 $\vec{u}^* \cdot \vec{g}^*$ 项. 此时 g_0 为重力加速度, 由于掺气水流中声速一般约为 30m/s, 若 $l_0 \sim a_0^2 / g_0 = 90\text{m}$, 并且速度和重力方向大致平行, 掺气水流的压缩性效应将不可忽略. 这对应于水垫塘冲击区内的掺气水流, 因此, 超高速掺气水流的压缩性效应对水垫塘安全、高效运行的影响, 需要引起足够重视. 3) 流速和声速同量级的超高速定常掺气水流. 在这种情形中, $\vec{u}^* \cdot \vec{u}^{*2}$ 项起着主要作用. 其量级为 Mach 数的平方. 此外, $p^* \vec{u}_r^* \cdot \vec{s}^*$ 项的系数中 $s_0 / C_V = \ln(p_0 / p_{10}) \sim 10$, $\rho_0 \sim 10^{-1[8]}$, 这样, 该项量级与 Mach 数相同. 因此, 和单相介质一样, Mach 数可以作为判断超高速定常掺气水流的压缩性程度的准则; 不过, 由于相间速度滑移现象也会引起定常掺气水流的压缩性效应, 这使得具体的掺气水流压缩性判据一般难以确定.

3 均质掺气水流的压缩性判据

对于均质 ($\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$)、定常 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) 掺气水流, 忽略体积力的作用并利用近似关系 (1 -)₂, 可以得出如下关系^[7]:

$$M^2 = \frac{2}{(\rho_0 - 1)} \left\{ (\rho_0 - 1 + \rho_0) \frac{1 - \rho_0}{1 - \rho_0} \left[\frac{(1 - \rho_0)}{\rho_0(1 - \rho_0)} \right] - (\rho_0 - 1 + \rho_0) \right\}, \quad (15)$$

式中, ρ_0 为滞止状态时的掺气浓度. 和经典可压缩流体动力学相比较可知, 该式相当于单相介质可压缩流动中各变量间的等熵关系. 利用式 (15) 可以确定掺气水流各变量随 Mach 数的变化情况. 图 1 表示均质、定常掺气水流中混合密度的相对变化率 $(\rho - \rho_0) / \rho_0$ 随 Mach 数的变化. 该图表明: $M < 0.3$ 时, 混合密度的相对变化率不大于 4%, 可以忽略, 流动可视为不可压缩; $M > 0.3$ 时, 混合密度变化增大, 应该按可压缩流动处理. 这一结果和李炜^[9]的提议相似, 只是 Mach 数的定义中

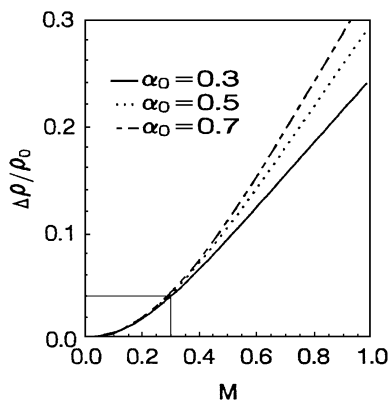


图1 均质、定常掺气水流混合密度的相对变化率随 Mach 数的变化

声速由 Wood 等温声速改为 Wood 绝热声速。

4 结论

水流掺气后改变了原有的结构特征，大大增加了水流的可压缩性。本文利用双流体连续介质模型建立了高速掺气水流的基本方程，利用量级分析等方法讨论了高速掺气水流的压缩性准则。在定常掺气水流中，（绝热）Mach 数可以作为判断可压缩性程度的准则。而对于均质、定常掺气水流，具体的压缩性判据为： $M < 0.3$ 时，为不可压缩流动； $M > 0.3$ 时，为可压缩流动。

参 考 文 献

- 1 Mermel, T. W. The World's major dams and hydro plants. *Water Power & Dam Construction*, 1991, 43 (6): 67 ~ 77.
- 2 柴恭纯. 高坝施工导流洞改建为永久泄洪洞的探讨. *泄水工程与高速水流*, 1994, (3): 1 ~ 41.
- 3 赵建福, 李炜. 掺气水流中的声速研究综述. *泄水工程与高速水流*, 1996, (3): 26 ~ 35.
- 4 普朗特, L. 等. 郭永怀, 陆士嘉译. *流体力学概论*, 力学名著译丛. 北京: 科学出版社, 1981.
- 5 Cain, P. & Wood, I. R. Measurements of self-aerated flow on a spillway. *J. Hyd. Div., ASCE*, 1981, 107 (HY11): 1425 ~ 1444.
- 6 刘大有. *二相流体动力学*. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- 7 赵建福. 掺气水流可压缩特性的研究 [博士学位论文]. 武汉水利电力大学河流工程系, 1998, 2.
- 8 赵建福, 李炜. 掺气水流相间作用力模型分析. *水动力学研究与进展*, 1999, A13 (4): 381 ~ 387.
- 9 李炜. 关于超音速掺气水流的若干问题. *泄水工程与高速水流*, 1993, (4): 9 ~ 19.

On the compressibility criterion of high velocity aerated flows

Zhao Jianfu

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences*)

Li Wei

(*Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering*)

Abstract The fundamental equation of high velocity aerated flows are deduced by using the two-fluid continuum model. The compressibility criterion is studied using the analysis of magnitude order of the equations mentioned. It is shown that the compressibility effect depends on the adiabatic Mach number. The flow can be referred to incompressible if $M < 0.3$, while the effect of compressibility should be considered if M is higher than 0.3.

Key words aerated flow, compressibility criterion, Mach number.