

# 压电材料中心裂纹问题\*

王自强 韩学礼

(LNM,中国科学院力学研究所,北京,100080)

**摘 要** 以电位移法向分量及电势连续通过裂纹面为边界条件,对均匀压电材料的裂纹问题及两种不同压电材料界面裂纹问题进行了系统分析,得到了含中心裂纹无限大体封闭形式的全场解,证实了裂纹引起的非均匀扰动场只依赖于外加力场而与外加电场无关。

**关键词** 压电材料,裂纹,界面

## 1 引言

压电材料是智能元件中用得最多的一种材料,它既可以用作具有感知功能的传感器,又可用作具有致动功能的执行器。由于电和机械的耦合效应,压电材料的电致断裂和电致疲劳现象时有发生,对于压电材料断裂行为研究引起了广泛注意。

关于裂纹问题的理论研究中,裂纹面边界条件的提法存在着两种不同的观点。Parton<sup>[1]</sup>首先提出,裂隙中的介质可以是真空或空气,它们不能承受机械载荷,但它们是电介质,可以承受电场作用。因此,电位移矢量的法向分量及电势连续穿过裂纹面

$$D_n^+ = D_n^-, \quad \phi^+ = \phi^- \quad (1)$$

这种提法,后来得到 Zhang 和 Hack<sup>[2]</sup>、Hao 和 Shen<sup>[3]</sup>、Dunn<sup>[4]</sup>与 Zhang 和 Tong<sup>[5]</sup>的支持。

Pak<sup>[6]</sup>、Sosa 和 Pak<sup>[7]</sup>、Kuo 和 Barnett<sup>[8]</sup>与 Suo 等人<sup>[9]</sup>认为裂隙中的介质,介电常数远小于压电介质的介电常数,因此如果裂纹面上没有外加电荷,那么裂纹面上的边界条件,可以归结为

$$D_n^+ = D_n^- = 0 \quad (2)$$

公式(2)在欧美各国得到广泛应用。McMeeking<sup>[10]</sup>指出公式(2)在某些情况下,并不合适。当参数 $(\epsilon_f/\epsilon_m)(a/b)$ 很小时,(2)式是合适的。这里 $\epsilon_f, \epsilon_m$ 分别是裂隙介质及基体的介电常数,而 $a$ 和 $b$ 分别是椭圆缺陷的长半轴及短半轴。对于理想裂纹, $b$ 趋近于零,该参数变为无穷大,(2)式就不再合适。

Zhang 和 Tong<sup>[5]</sup>的近期工作,再次强调了(1)式的正确性。从经典电动力学的角度来分析,如果裂隙中的介质是真空,那么(1)式无疑是正确的。即使裂隙中的介质是空气,只要裂隙中的电场强度小于空气的击穿强度,那么(1)式依然成立。

本文采用(1)式作为裂纹面的电边界条件,分析了均匀压电介质中及两种压电介质界面上的裂纹问题。

\* 国家自然科学基金重大项目(编号 19704100)和中国科学院重大项目(编号 KJ951-1-201)资助。  
1998-03-31 收到第 1 稿,1998-11-20 收到修改稿。

## 2 基本公式

线性压电材料的本构方程为

$$\begin{cases} ij = c_{ijkl} kl - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ikl} kl + ik E_k \end{cases} \quad (3)$$

式中  $ij$ ,  $kl$  分别是应力和应变张量,  $D_i$ ,  $E_i$  分别是电位移矢量和电场强度.  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ikl}$ ,  $ij$  分别是压电材料的弹性模量张量, 压电系数和介电系数.

场方程为

$$\begin{cases} ij, i = 0 \\ D_i, i = 0 \end{cases} \quad (4)$$

应变  $ij$ , 电场强度  $E_i$  可表示为

$$\begin{cases} ij = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ E_i = - \phi, i \end{cases} \quad (5)$$

式中  $u_i$  是位移,  $\phi$  是电势.

将公式 (3), (5) 代入 (4) 式得

$$\begin{cases} (c_{ijkl} u_k + e_{lij}) , li = 0 \\ (e_{ikl} u_k - ik \phi) , li = 0 \end{cases} \quad (6)$$

讨论平面应变二维问题, 参照 Suo 等人<sup>[9]</sup>的工作, 一般解可以用复势函数表示

$$\{ u_i, \phi \} = a f( z_1 x + z_2 y) \quad (7)$$

式中  $a$  是含有 4 个元素的列阵,  $z_1 = 1, z_2 = p$ . 将 (7) 式代入 (6) 式得

$$\begin{cases} (c_{jk} a_k + e_{ja} a_4) = 0 \\ (e_{ka} a_k - ik a_4) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中  $a_k$  取值  $1, 2, j, k$  取值  $1, 2, 3$ . 这是关于列阵  $a$  的本征值问题. Suo 等人<sup>[9]</sup>证实了该问题的本征方程具有 8 个复根, 它们构成 4 对共轭复数. 用  $p_1, p_2, p_3, p_4$  表示具有正的虚部的 4 个复根, 则有

$$\{ u_i, \phi \} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k f(z_k) \quad (9)$$

式中  $z_k = x + p_k y$ .

对于应力分量及电位移矢量有

$$\begin{cases} \{ \sigma_{2j}, D_2 \} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_k f_k(z_k) \\ \{ \sigma_{1j}, D_1 \} = - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_k p_k f_k(z_k) \end{cases} \quad (10)$$

列阵  $b$  的分量为

$$\begin{cases} b_j = (c_{2jk1} a_k + e_{12j} a_4) + (c_{2jk2} a_k + e_{22j} a_4) p \\ b_4 = (e_{21k} a_k - ik a_4) + (e_{22k} a_k - ik a_4) p \end{cases} \quad (11)$$

引入  $4 \times 4$  矩阵  $A$  和  $B$

$$\begin{cases} A = [ a_1, a_2, a_3, a_4 ] \\ B = [ b_1, b_2, b_3, b_4 ] \end{cases} \quad (12)$$

定义单变量复函数矢量  $f(z)$

$$f(z) = \{f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)\} \tag{13}$$

那么在实轴上广义的位移矢量及面力矢量可表示为

$$U(x) = \{u_j, \} = Af(x) + \overline{A} \overline{f(x)} \tag{14}$$

$$t(x) = \{t_j, D_2\} = Bf(x) + \overline{B} \overline{f(x)} \tag{15}$$

### 3 裂纹问题

设想一条中心裂纹位于两个半无限大压电材料的界面上. 坐标原点设在裂纹中心位置,  $x$  轴位于界面上. 用  $L$  表示裂纹段, 如图 1 所示. 在实轴上, 面力是连续的

$$t_1(x) = t_2(x) \quad -a < x < a \tag{16}$$

上式可以改写为

$$B_1 f_1^+(x) + \overline{B_1} \overline{f_1^-(x)} = B_2 f_2^-(x) + \overline{B_2} \overline{f_2^+(x)} \quad -a < x < a \tag{17}$$

上式中  $B_1$  是材料 1 (上半平面) 的  $B$  矩阵,  $B_2$  是材料 2 (下半平面) 的  $B$  矩阵.  $f_1(z), f_2(z)$  分别是上、下平面的复函数矢量  $f(z)$ .

设想无穷远处, 受外载  $t_{11}, t_{12}, t_{22}, t_{23}$  的作用及外加电位移  $D_1, D_2$  的作用. 全场解可以看作是外载, 外加电位移引起的均匀场及裂纹引起的非均匀扰动场的叠加. 这里需要求解的是非均匀扰动场. 显然该扰动应力及电位移场, 在无穷远处趋于零.

参照文[9], 由(17)式, 推得

$$\begin{cases} B_1 f_1(z) = \overline{B_2} \overline{f_2(z)} & y > 0 \\ B_2 f_2(z) + \overline{B_1} \overline{f_1(z)} & y < 0 \end{cases} \tag{18}$$

进而可推得

$$i \quad (x) = HB_1 f_1^+(x) - \overline{H} B_2 f_2^-(x) \tag{19}$$

式中  $(x)$  是广义的张开位移,  $(x) = \{u_i^+ - u_i^-, \quad + - \quad - \}$

$$H = Y_1 + \overline{Y_2} \tag{20}$$

$$Y_1 = iA_1 B_1^{-1}, \quad Y_2 = iA_2 B_2^{-1} \tag{21}$$

当中心裂纹位于均匀材料中,  $H$  必是实矩阵

$$H = 2\text{Re } Y \tag{22}$$

对双材料界面裂纹, 一般情况下  $H$  是复矩阵, 但对具有某种对称性的双材料,  $H$  可以是实矩阵. 本文限于篇幅, 只讨论  $H$  是实矩阵的情况. 这样由广义位移的连续性条件, 立即看出下述函数  $h(z)$  是全平面解析函数除了实轴上的裂纹割痕.

$$h(z) = \begin{cases} B_1 f_1(z) & y > 0 \\ B_2 f_2(z) & y < 0 \end{cases} \tag{23}$$

在裂纹面上, 广义面力  $t_1(x), t_2(x)$  满足如下边界条件

$$t_1(x) = t_2(x) = -T \quad x \in L \tag{24}$$

式中

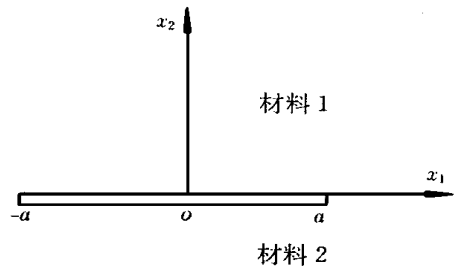


图 1 压电双材料界面上的有限裂纹

$$T = \{ t_{21}, t_{22}, t_{23}, d \} \tag{25}$$

$d$  是待定参量. 边界条件(24)已确保在裂纹面上,法向电位移的连续性. 将公式(17), (23)代入(24),得

$$h^+(x) + h^-(x) = -T \quad x = L \tag{26}$$

这是典型的 Hilbert 问题,其解答为

$$h(z) = T f_0(z) \tag{27}$$

$$f_0(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right] \tag{28}$$

由(27)式,进一步得到

$$t(x) = 2 T f_0(x) \quad |x| > a \tag{29}$$

$$\phi(x) = \sqrt{a^2 - x^2} HT \quad |x| < a \tag{30}$$

公式(1)表示的在裂纹面上电势连续性,意味着

$$\phi_+(x) - \phi_-(x) = 0 \tag{31}$$

由公式(30)、(31)立即得到

$$H_{41} t_{21} + H_{42} t_{22} + H_{43} t_{23} + H_{44} d = 0 \tag{32}$$

由此推出

$$d = - (H_{41} t_{21} + H_{42} t_{22} + H_{43} t_{23}) / H_{44} \tag{33}$$

公式(33)表明待定参数  $d$  只依赖于外加应力场,而与外加电场无关. 这说明,中心裂纹引起的非均匀扰动场,只依赖于无穷远处的外加应力场而与外加电场无关.  $d$  由(33)式求得之后,列阵  $T$ 就完全确定下来了. 由(27)式,可求得  $h(z)$  函数,再由(23)式可以得到  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  及相应的分量函数. 将单一自变量  $z$  换成相应的自变量  $z_k$ ,由(9), (10)即可求得每种材料内的场量.

由(29)式可以得到裂纹顶端的应力强度因子

$$\begin{cases} K = \sqrt{a} t_{21}, & K = \sqrt{a} t_{22} \\ K = \sqrt{a} t_{23}, & K = \sqrt{a} d \end{cases} \tag{34}$$

特别需要指出的是,尽管法向电位移  $D_2$  及电势  $\phi$  在裂纹面上是连续的,但电位移  $D_2$  在裂纹前方依然有奇异性.

### 3.1 均匀材料中裂纹问题

限于讨论裂纹引起的非均匀扰动场.

#### 3.1.1 极轴与 $z$ 轴一致的情况

本构方程是横观各向同性的,

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 23 \\ 31 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 2 \ 23 \\ 2 \ 31 \\ 2 \ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 2 \ 23 \\ 2 \ 31 \\ 2 \ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

此时在  $(x, y)$  平面内, 材料是各向同性的. 依照复势理论, 应力和位移可表示为

$$\begin{cases} y - i y_x = (z) + \overline{(z)} + (z - \overline{z}) \overline{(z)} \\ 2\mu(u + iv)_x = (z) - \overline{(z)} - (z - \overline{z}) \overline{(z)} \end{cases} \quad (37)$$

在实轴上, 有

$$\begin{cases} y - i y_x = (x) + \overline{(x)} \\ 2\mu(u + iv)_x = (x) - \overline{(x)} \end{cases} \quad (38)$$

(38) 式可改写为

$$y = \text{Re}\{ (x) + \overline{(x)} \}, \quad y_x = \text{Re}\{ i (x) - i \overline{(x)} \} \quad (39)$$

$$2\mu u_{,x} = \text{Re}\{ (x) - \overline{(x)} \}, \quad 2\mu v_{,x} = \text{Re}\{ -i (x) - i \overline{(x)} \} \quad (40)$$

此外参照 Pak<sup>[6]</sup>

$$w = u_z = 2\text{Re}[f_3(z)] \quad (41)$$

$$= 2\text{Re}[f_4(z)] \quad (42)$$

将  $(z)$ ,  $\overline{(z)}$  分别比作  $f_1(z), f_2(z)$ , 4 个本征值  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = i$ . 由此得到

$$A = \begin{bmatrix} / (4\mu) & - 1/ (4\mu) & 0 & 0 \\ - i [ / (4\mu) ] & - i/ (4\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$B = \begin{bmatrix} i/2 & - i/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ic_{44} & ie_{15} \\ 0 & 0 & ie_{15} & - i_{11} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$Y = \begin{bmatrix} (1 - )/ \mu & i [ (1 - 2 ) / (2\mu) ] & 0 & 0 \\ - i [ (1 - 2 ) / (2\mu) ] & (1 - )/ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11/ k & e_{15}/ k \\ 0 & 0 & e_{15}/ k & - c_{44}/ k \end{bmatrix} \quad (45)$$

式中  $k = e_{15}^2 + c_{44} \ 11$ .

由此得出

$$H_{41} = H_{42} = 0, \quad H_{43} = (2/ k) e_{15}, \quad H_{44} = - (2/ k) c_{44} \quad (46)$$

$$d = (e_{15}/ c_{44}) \ 23 \quad (47)$$

$$K_D = K = K \ e_{15}/ c_{44} \quad (48)$$

### 3. 1. 2 极轴与 $y$ 轴一致的情况

本构方程为

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 23 \\ 31 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 2_{23} \\ 2_{31} \\ 2_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & e_{33} & 0 \\ 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 2_{23} \\ 2_{31} \\ 2_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

本征问题(8)归结为

$$\begin{bmatrix} c_{11} + c_{44} p^2 & (c_{13} + c_{44}) p & 0 & (e_{31} + e_{15}) p \\ (c_{13} + c_{44}) p & c_{44} + c_{33} p^2 & 0 & e_{15} + e_{33} p^2 \\ 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 + c_{44} p^2 & 0 \\ (e_{31} + e_{15}) p & e_{15} + e_{33} p^2 & 0 & -11 - 33 p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (51)$$

本征方程为

$$(c_{11} - c_{12} + 2c_{44} p^2) (c_0 p^6 + c_1 p^4 + c_2 p^2 + c_3) = 0 \quad (52)$$

式中

$$\begin{cases} c_0 = c_{44} e_{33}^2 + c_{33} c_{44} \\ c_1 = c_{33} (e_{31} + e_{15})^2 - 2c_{13} e_{33} (e_{31} + e_{15}) + c_{11} e_{33}^2 - 2c_{44} e_{31} e_{33} + c_{33} c_{44} \\ \quad (c_{11} c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{13} c_{44}) \\ c_2 = 2c_{11} e_{15} e_{33} - 2c_{13} e_{15} (e_{15} + e_{31}) + c_{44} e_{31}^2 + (c_{11} c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{13} c_{44}) \\ c_3 = c_{11} e_{15}^2 + c_{11} c_{44} \end{cases} \quad (53)$$

参照 Sosa 和 Pak<sup>[7]</sup>可以推出 A, B, H. 矩阵 H 的结构如下

$$H = \begin{bmatrix} 2/C_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/C_T & 0 & 2/e \\ 0 & 0 & 2/C_A & 0 \\ 0 & 2/e & 0 & -2/ \end{bmatrix} \quad (54)$$

参量  $C_L, C_T, C_A,$  和  $e$  需要通过数值方法求得. 由(54)式,得

$$H_{41} = H_{43} = 0, \quad H_{42} = 2/e, \quad H_{44} = -2/ \quad (55)$$

代入(33), (34)得

$$d = ( / e)_{22} \quad (56)$$

$$K_D = K = ( / e) K \quad (57)$$

### 3.2 界面裂纹问题

#### 3.2.1 极轴与 z 轴一致

此时有

$$\begin{cases} H_{41} = H_{42} = 0 \\ H_{43} = (e_{15}/k)^{(1)} + (e_{15}/k)^{(2)} \\ -H_{44} = (c_{44}/k)^{(1)} + (c_{44}/k)^{(2)} \end{cases} \quad (58)$$

式中上标 (1), (2) 分别对应材料 1 和材料 2 的有关量. 由此得出

$$d = \frac{e_{15}^{(1)} l e_{15}^{(2)} + c_{44}^{(1)} l l^{(2)} + e_{15}^{(2)} l e_{15}^{(1)} + c_{44}^{(2)} l l^{(1)}}{c_{44}^{(1)} k^{(2)} + c_{44}^{(2)} k^{(1)}} \quad (59)$$

$$K_D = K = K \frac{e_{15}^{(1)} k^{(2)} + e_{15}^{(2)} k^{(1)}}{c_{44}^{(1)} k^{(2)} + c_{44}^{(2)} k^{(1)}} \quad (60)$$

现在来考察裂纹尖端的电场特性. 由本构方程不难推得

$$E_2 = (c_{44} D_2 - e_{15} \sigma_3) / k \quad (61)$$

由此得出在裂纹前方

$$E_2^+(x) = (c_{44}^{(1)} d - e_{15}^{(1)} \sigma_3) 2f_0(x) / k^{(1)} = \frac{c_{44}^{(1)} e_{15}^{(2)} - c_{44}^{(2)} e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)} k^{(2)} + c_{44}^{(2)} k^{(1)}} \sigma_3 2f_0(x) \quad |x| > a \quad (62)$$

由此可以看出电场强度  $E_2$  在裂纹前方是有奇性的, 它对应的应力强度因子

$$K_E^+ = E K \quad (63)$$

$$E = \frac{c_{44}^{(1)} e_{15}^{(2)} - c_{44}^{(2)} e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)} k^{(2)} + c_{44}^{(2)} k^{(1)}} \quad (64)$$

类似的可以证明, 在材料 2 内, 有

$$E_2^-(x) = -E \sigma_3 2f_0(x) = -E_2^+(x) \quad (65)$$

这说明电场强度  $E_2$ , 越过界面时发生跳跃. 此外不难证明电场强度  $E_1$  在裂纹前方并无奇性, 且在界面上是连续的.

进而考察裂纹面上的电场强度. 由 (23), (27) 式, 得到

$$\begin{cases} f_1(z) = B_1^{-1} h(z) = {}_1 T f_0(z) & y > 0 \\ f_2(z) = B_2^{-1} h(z) = {}_2 T f_0(z) & y < 0 \end{cases} \quad (66)$$

式中

由此得到各个分量函数

$$\begin{cases} f_{1j}(z) = c_j^{(1)} f_0(z) & y > 0 \\ f_{2j}(z) = c_j^{(2)} f_0(z) & y < 0 \end{cases} \quad (67)$$

其中

$$c_j^{(i)} = \sum_{k=1}^4 {}^{(i)} T_{jk} \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad i = 1, 2 \quad (68)$$

又由 (14) 得

$$\begin{cases} U(x) = A f(x) + \overline{A} \overline{f(x)} \\ U^+(x) = A_1 B_1^{-1} T f_0^+(x) + \overline{A_1 B_1^{-1} T f_0^+(x)} \end{cases} \quad (69)$$

在裂纹面上, 有

$$f_0^+(x) = -\frac{1}{2} \left[ 1 + i \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] \quad (70)$$

$$U^+(x) = 2\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{i} Y_1 T f_0^+(x)\right\} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \operatorname{Re}\{Y_1\} T - \operatorname{Im}\{Y_1\} T \quad (71)$$

$$E_1^+ = -\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \{e_{15}^{(1)} \quad 23 - c_{44}^{(1)} d\} / k^{(1)} = -E_{23} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (72)$$

同理可证明

$$E_1^- = -E_{23} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = E_1^+ \quad |x| < a \quad (73)$$

$$E_2^+ = -E_2^- = (c_{44}^{(1)} d - e_{15}^{(1)} \quad 23) / k^{(1)} = E_{23} \quad (74)$$

由此看出电场强度  $E_1$  穿越裂纹是连续的,且具有奇异性,电场强度  $E_2$  穿越裂纹有跳跃,但无奇异性.

在裂纹内部,扰动电场为

$$\begin{cases} E_1 = -E_{23} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ E_2 = d / 0 \end{cases} \quad (75)$$

### 3.2.2 极轴与 $y$ 轴一致

$$H_{41} = H_{43} = 0, \quad H_{42} = 1/c_e^{(1)} + 1/c_e^{(2)}$$

$$H_{44} = -(1/c_e^{(1)} + 1/c_e^{(2)})$$

$$d = \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{e^{(1)} e^{(2)}} \cdot \frac{e^{(1)} + e^{(2)}}{e^{(1)} + e^{(2)}} \quad 22 \quad (76)$$

参量  $d$  只依赖于  $22$ .

$$K_D = K = {}_D K \quad (77)$$

$$D = \frac{e^{(1)} e^{(2)}}{e^{(1)} e^{(2)}} \cdot \frac{e^{(1)} + e^{(2)}}{e^{(1)} + e^{(2)}} \quad (78)$$

由(9)式,得

$$= 2\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^4 A_{4k} f_k(z_k)\right\} \quad (79)$$

$$E_1 = -2\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^4 A_{4k} f_k(z_k)\right\} \quad (80)$$

$$E_2 = -2\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^4 A_{4k} p_k f_k(z_k)\right\} \quad (81)$$

将(67)式,代入上式,得

$$E_1 = -2\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^4 A_{4k} B_{kj}^{-1} T_j f_0(z_k)\right\} \quad (82)$$

$$E_2 = -2\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^4 A_{4k} B_{kj}^{-1} T_j p_k f_0(z_k)\right\} \quad (83)$$

在实轴上,

$$E_1 = -2\operatorname{Im}\left\{\sum_{j=1}^4 Y_{4j} T_j f_0\right\} \quad (84)$$

$$E_2 = -2\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^4 A_{4k} p_k c_k f_0\right\} \quad (85)$$



利用  $H$  是实矩阵的假设, 不难证实在裂纹前方  $E_1^+ = E_1^-$ , 而一般说来,  $E_2^+ \neq E_2^-$ , 电场强度  $E_1, E_2$  在裂纹前方都是有奇异性的。

在裂纹面上利用 (32) 式, 同样可以证明  $E_1^+ = E_1^-$ , 但一般说来  $E_2^+ \neq E_2^-$ . 电场强度  $E_1^+, E_1^-, E_2^+, E_2^-$  同样有奇性。

### 参 考 文 献

- 1 Parton V Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astronautica*, 1976, 3:671~683
- 2 Zhang T Y, Hack I E. Mode cracks in piezoelectric materials. *J Appl Phys*, 1992, 71:5865~5870
- 3 Hao Tianhu, Shen Ziyuan. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its application. *Int J Eng Frac Mech*, 1994, 47:793~802
- 4 Dunn M L. The effects of crack face boundary conditions on the fracture mechanics. *Eng Frac Mech*, 1994, 48:25~39
- 5 Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for a mode crack in a piezoelectric material. *Int J Solids & Struct*, 1996, 33:343~359
- 6 Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material. *J Appl Mech*, 1990, 57:647~653
- 7 Sosa H A, Pak Y E. Three dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric material. *Int J Solids Structures*, 1990, 26:1~15
- 8 Kuo C M, Barnett D M. In modern theory of anisotropic elasticity and applications, End Wu J J, Ting T C T and Barnett D M. SIAM pub, 1991
- 9 Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, Willis J R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *J Mech Phys Solids*, 1992, 40:739~765
- 10 McMeeking R M. Electrostrictive forces near crack like flaws. *J Appl Phys*, 1989, 40:615~627

## CENTER CRACK PROBLEM OF PIEZOELECTRIC MATERIALS

Wang Ziqiang Han Xueli

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing, 100080)

**Abstract** An analysis for the problems of crack in homogeneous piezoelectrics or on the interfaces of two dissimilar piezoelectric materials is presented based on the continuity of normal electric displacement and electric potential across the crack faces. The explicit analytic solutions are obtained for a single crack in piezoelectrics or on the interfaces of piezoelectric bimetals. A class of boundary problems involving many cracks is also solved. For homogeneous materials it is found that the normal electric displacement  $D_2$ , induced by the crack, is constant along the crack faces which depends only on the applied remote stress field. Within the crack slit, the electric fields induced by the crack are also constant and not affected by the applied electric field. For the bimetals with real  $H$ , the normal electric displacement  $D_2$  is constant along the crack faces and electric field  $E_2$  has the singularity ahead of the crack tip and has a jump across the interface.

**Key words** piezoelectric material, crack, interface